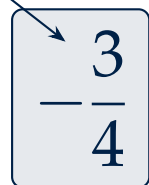


I MONOMI

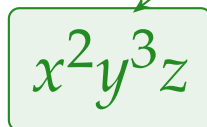
ALGEBRA

Calcolo letterale, grado, operazioni,
valore numerico, MCD e mcm

coefficiente

A light blue rounded rectangle containing the fraction $-\frac{3}{4}$. A blue arrow points from the word "coefficiente" to the fraction.
$$-\frac{3}{4}$$

parte letterale

A light green rounded rectangle containing the expression x^2y^3z . A green arrow points from the word "parte letterale" to the expression.
$$x^2y^3z$$

Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima di partire	3
2	Perché si usano le lettere	3
3	Monomi e forma normale	4
4	Il grado	5
5	Simili, uguali, opposti	6
6	Somme algebriche	6
7	Prodotti	8
8	Quozienti	9
9	Potenze	10
10	Espressioni con i monomi	11
11	Valore numerico	11
12	MCD e mcm fra monomi	12
13	Monomi e geometria	13

1 Cosa serve prima di partire

Qui comincia l'algebra, ma i conti restano quelli dell'aritmetica: metà degli errori sui monomi sono errori di aritmetica travestiti da errori di algebra. Servono quattro cose.

Cosa devi già sapere

- **Le proprietà delle potenze.** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^n \cdot b^n = (ab)^n$, $a^0 = 1$. Sono la regola di tutto il capitolo.
- **La regola dei segni.** Segni uguali danno $+$, segni diversi danno $-$, in prodotti e quozienti. Nelle somme no.
- **Le frazioni.** I coefficienti sono spesso frazionari: $-\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = -\frac{3}{2}$, semplificando in croce prima di moltiplicare.
- **MCD e mcm.** $\text{MCD}(12, 18) = 6$ e $\text{mcm}(12, 18) = 36$: fra monomi si fa la stessa cosa, più le lettere.

Esempio Svolto 1.1: Riscaldamento: tre conti da rifare adesso:

1. Potenze con la stessa base.

$$(a^3 \cdot a^2) : a^4 = a^{3+2-4} = a$$

2. Frazioni, semplificando in croce.

$$-\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = -\frac{\cancel{2}^1}{\cancel{3}^1} \cdot \frac{\cancel{9}^3}{\cancel{4}^2} = -\frac{3}{2}$$

3. Segni e potenze.

$$(-2)^3 = -8 \quad (-2)^2 = +4$$

Se questi tre conti sono venuti al primo colpo, il capitolo si legge di fila. Se no, conviene tornare sui numeri interi e razionali: qui si usano a ogni riga.

2 Perché si usano le lettere

Una lettera è **un numero di cui non si conosce il valore**, o che può cambiare. Serve per scrivere una regola una volta sola invece di infinite volte.

Il perimetro di un quadrato di lato 3 è 12; di lato 7 è 28; di lato $\frac{1}{2}$ è 2. Scriverli tutti è impossibile. Scrivere 4ℓ li dice tutti insieme, e permette di *calcolare* con la regola prima di conoscere il numero.

Esempio Svolto 2.1: Una formula, infiniti casi:

Il perimetro di un quadrato di lato ℓ è 4ℓ . Vediamo cosa vuol dire.

1. Si sostituisce.

$$\ell = 3 \rightarrow 4 \cdot 3 = 12 \quad \ell = 7 \rightarrow 4 \cdot 7 = 28$$

$$\ell = \frac{1}{2} \rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

2. Il vantaggio. La scrittura 4ℓ contiene tutti questi casi e infiniti altri. Ma soprattutto permette di *calcolare prima di sapere*: se il lato raddoppia, il perimetro diventa $4 \cdot (2\ell) = 8\ell$, cioè il doppio — e questo si sa senza conoscere ℓ .

3. Il punto delicato. 4ℓ non è «quattro e elle»: è una moltiplicazione con il segno omesso.

La lettera non è un mistero

$3a$ significa $3 \cdot a$: il segno di moltiplicazione fra un numero e una lettera non si scrive. E a^2 significa $a \cdot a$, non $2a$.

Tutte le regole che seguono sono le regole dei numeri: se un passaggio con le lettere sembra strano, si prova con un numero al posto della lettera e si vede subito se torna. È il controllo più utile del capitolo.

3 Monomi e forma normale

Formula 3.1: Che cos'è un monomio: Un **monomio** è un'espressione in cui numeri e lettere sono legati **solo** da moltiplicazioni (e potenze con esponente naturale).

$$-\frac{3}{4}x^2y^3z \quad 5ab \quad -a \quad 7$$

Non sono monomi $a + b$ (c'è una somma), $\frac{3}{a}$ (c'è una divisione per una lettera), a^{-2} (esponente negativo).

Dividere per un *numero* invece si può: $\frac{a}{4}$ è un monomio, perché vuol dire $\frac{1}{4}a$, cioè il coefficiente è $\frac{1}{4}$.

Formula 3.2: Forma normale: Un monomio è in **forma normale** quando è scritto come:

- un solo **coefficiente** numerico, davanti;
- la **parte letterale**, con ogni lettera una volta sola, in ordine alfabetico, con il proprio esponente.

Il coefficiente 1 non si scrive: si scrive ab , non $1ab$.

Esempio Svolto 3.1: Ridurre a forma normale:**1. Il monomio di partenza.**

$$3a^2b \cdot (-2)ab^3$$

Non è in forma normale: ci sono due coefficienti e due volte la a .

2. Si raggruppano i numeri e le lettere uguali.

$$[3 \cdot (-2)] \cdot a^{2+1} \cdot b^{1+3}$$

3. Si calcola. Segni diversi: il coefficiente è negativo.

$$-6a^3b^4$$

4. Le parti del risultato. Coefficiente -6 , parte letterale a^3b^4 .

5. Controllo con un numero. Per $a = 1$, $b = 1$ il monomio di partenza vale $3 \cdot (-2) = -6$, e il risultato vale -6 . Torna.

4 Il grado

Formula 4.1: Grado complessivo e grado relativo:

- Il **grado complessivo** (o semplicemente «grado») è la **somma degli esponenti** di tutte le lettere.
- Il **grado relativo** a una lettera è l'esponente di quella lettera.

Un monomio senza lettere (per esempio 7) ha grado 0. Il monomio nullo, cioè lo zero, non ha grado.

Esempio Svolto 4.1: I gradi di $-\frac{3}{4}x^2y^3z$:

1. Gli esponenti. x ha esponente 2, y ha 3, z ha 1 (l'1 non si scrive ma c'è).

2. Grado complessivo: la somma.

$$2 + 3 + 1 = 6$$

3. Gradi relativi: 2 rispetto a x , 3 rispetto a y , 1 rispetto a z .

4. Il coefficiente non conta. Il $-\frac{3}{4}$ non entra nel grado, nemmeno col suo denominatore: il grado riguarda solo le lettere.

Il coefficiente non ha grado

Il grado di $-\frac{3}{4}x^2$ è 2, non 3 e non -2 : il coefficiente non si conta.

E il grado di 5 è 0, non «non esiste»: $5 = 5x^0$, e $x^0 = 1$. Solo lo zero fa eccezione, perché $0 = 0 \cdot x^n$ per qualunque n e il grado sarebbe indeterminato.

5 Simili, uguali, opposti

Formula 5.1: Le tre relazioni: Due monomi sono

- **simili** se hanno la **stessa parte letterale** (stesse lettere con gli stessi esponenti), qualunque sia il coefficiente;
- **uguali** se sono simili e hanno anche lo stesso coefficiente;
- **opposti** se sono simili e hanno coefficienti opposti.

«Simili» è la relazione che conta: è la condizione per poterli sommare.

Esempio Svolto 5.1: Riconoscere le relazioni:

1. **Simili.** $\frac{1}{2}x^2y$ e $-5x^2y$ sono simili: la parte letterale x^2y è identica. I coefficienti non c'entrano.

2. **Non simili.** $3x^2y$ e $3xy^2$ **non** sono simili: gli esponenti sono scambiati, quindi la parte letterale è diversa.

3. **Uguali.** $-7a^3b$ e $-7a^3b$.

4. **Opposti.** $+4x^2$ e $-4x^2$: la loro somma è 0.

Controllo pratico: se coprendo i coefficienti i due monomi si vedono identici, sono simili.

6 Somme algebriche

Formula 6.1: Si sommano solo i simili: La somma di monomi simili è un monomio simile a loro, che ha per coefficiente la somma dei coefficienti:

$$5a^2b - 3a^2b + a^2b = (5 - 3 + 1)a^2b = 3a^2b$$

Monomi **non** simili non si possono sommare: la loro somma resta scritta così com'è, e non è un monomio (è un polinomio).

Esempio Svolto 6.1: Una somma algebrica, e una che resta com'è:**1. Monomi simili.**

$$5a^2b - 3a^2b + a^2b$$

La parte letterale a^2b è la stessa in tutti e tre: si sommano i coefficienti, ricordando che davanti ad a^2b c'è un 1.

$$(5 - 3 + 1)a^2b = \mathbf{3a^2b}$$

2. Monomi non simili.

$$4x^2y + 4xy^2$$

Gli esponenti sono scambiati: le parti letterali sono diverse, quindi la somma **resta così**. Non è un lavoro incompleto: è il risultato.

3. Un caso misto.

$$2ab + 5a - 3ab = (2 - 3)ab + 5a = \mathbf{-ab + 5a}$$

Si sommano solo i due simili; il terzo resta.

4. Controllo con numeri, $a = 2$, $b = 1$: a sinistra $4 + 10 - 6 = 8$; a destra $-2 + 10 = 8$. Torna.

La parte letterale non si somma

$$3a^2 + 5a^2 = 8a^2 \quad \text{non} \quad 8a^4$$

Si sommano i *coefficienti*; la parte letterale **resta quella**.

Il motivo, con un numero al posto della lettera: per $a = 2$ il primo membro vale $12 + 20 = 32$, e $8a^2 = 8 \cdot 4 = 32$. Torna. Invece $8a^4 = 8 \cdot 16 = 128$: sbagliato.

Gli esponenti si sommano nei **prodotti**, non nelle somme.

 $3a + 2b$ non si può semplificare

$$3a + 2b \neq 5ab \quad 3a + 2b \neq 5(a + b)$$

I due monomi non sono simili, quindi la somma resta $3a + 2b$. Non è un risultato «incompleto»: è il risultato.

Controllo con $a = 1$, $b = 10$: a sinistra $3 + 20 = 23$; $5ab$ farebbe 50. Diversi.

Esempio Svolto 6.2: Le parentesi dentro una somma:

1. Parentesi con un più davanti. Si toglie e non cambia niente.

$$(3a - 2b) + (5a + b) = 3a - 2b + 5a + b = \mathbf{8a - b}$$

2. Parentesi con un meno davanti. Togliendola, *ogni* segno che sta dentro cambia.

$$(4x^2 + x) - (x^2 - 3x) = 4x^2 + x - x^2 + 3x = 3x^2 + 4x$$

Il $-3x$ è diventato $+3x$: è qui che si sbaglia.

3. Un numero davanti alla parentesi. Moltiplica ogni termine, uno per uno.

$$2(3a - b) = 2 \cdot 3a - 2 \cdot b = 6a - 2b$$

4. Tutto insieme.

$$2(3a - b) - 3(a - 2b) = 6a - 2b - (3a - 6b) = 6a - 2b - 3a + 6b = 3a + 4b$$

5. Controllo con $a = b = 1$: a sinistra $2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 4 + 3 = 7$; a destra $3 + 4 = 7$. Torna.

Il meno davanti alla parentesi cambia *tutti* i segni

$$-(3a - 6b) = -3a + 6b \quad \text{non} \quad -3a - 6b$$

Cambiare solo il primo segno e lasciare gli altri è l'errore più frequente di tutta l'algebra. Il motivo: il meno davanti vale -1 che moltiplica la parentesi, e moltiplica *ogni* termine. Controllo con $a = 1, b = 1$: $-(3 - 6) = +3$, e $-3 + 6 = 3$. Torna. Invece $-3 - 6 = -9$: sbagliato.

7 Prodotti

Formula 7.1: Prodotto di due monomi: Il prodotto di due monomi è sempre un monomio:

- il coefficiente è il **prodotto** dei coefficienti (regola dei segni);
- gli esponenti delle lettere uguali si **sommano**;
- le lettere che compaiono in uno solo restano come sono.

Il grado del prodotto è la somma dei gradi.

Esempio Svolto 7.1: Un prodotto con coefficienti frazionari:

$$\left(-\frac{2}{3}a^2b\right) \cdot \left(\frac{9}{4}ab^2\right)$$

1. **I coefficienti**, semplificando in croce: 2 con 4 e 3 con 9.

$$-\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = -\frac{3}{2}$$

2. **Le lettere**: esponenti sommati.

$$a^{2+1} = a^3 \quad b^{1+2} = b^3$$

3. **Il risultato**.

$$-\frac{3}{2}a^3b^3$$

4. **Controllo sul grado**. I due monomi hanno grado 3; il prodotto ha grado $3 + 3 = 6$, e infatti $3 + 3 = 6$. Torna.

8 Quozienti

Formula 8.1: Quoziente di due monomi: Si dividono i coefficienti e si **sottraggono** gli esponenti delle lettere uguali.

$$12a^3b^2 : (-4ab) = -3a^2b$$

Il risultato è un monomio **solo se** ogni esponente del dividendo è maggiore o uguale a quello del divisore. Altrimenti il quoziente esiste come frazione, ma non è un monomio.

Esempio Svolto 8.1: Un quoziente, e uno che non si può fare:

1. **Il caso che funziona**.

$$12a^3b^2 : (-4ab)$$

Coefficienti: $12 : (-4) = -3$. Esponenti: $a^{3-1} = a^2$, $b^{2-1} = b$.

$$-3a^2b$$

Controllo: $(-3a^2b) \cdot (-4ab) = 12a^3b^2$. Torna.

2. **Il caso che non funziona**.

$$a^2 : a^3 = a^{2-3} = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

L'esponente viene negativo, quindi il risultato **non è un monomio**. La divisione si può scrivere, ma il risultato sta fuori dall'insieme dei monomi — come $7 : 2$ sta fuori dagli interi.

9 Potenze

Formula 9.1: Potenza di un monomio: Si eleva il coefficiente e si **moltiplicano** gli esponenti delle lettere per l'esponente della potenza:

$$(-2a^2b)^3 = (-2)^3 \cdot a^{2 \cdot 3} \cdot b^{1 \cdot 3} = -8a^6b^3$$

Il segno segue la regola vista sugli interi: base negativa ed esponente pari dà positivo, esponente dispari dà negativo.

Esempio Svolto 9.1: Due potenze, due segni:

1. Esponente dispari.

$$(-2a^2b)^3$$

Coefficiente: $(-2)^3 = -8$. Esponenti moltiplicati per 3: $a^{2 \cdot 3} = a^6$ e $b^{1 \cdot 3} = b^3$.

$$-8a^6b^3$$

2. Esponente pari.

$$\left(-\frac{1}{2}xy^3\right)^2$$

Coefficiente: $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = +\frac{1}{4}$. Esponenti raddoppiati.

$$\frac{1}{4}x^2y^6$$

3. Controllo sul grado. Il monomio $-2a^2b$ ha grado 3; elevato al cubo dà grado $3 \cdot 3 = 9$, e infatti $6 + 3 = 9$. Torna.

$(-2a^2b)^3$ e $-2a^2b^3$ non sono la stessa cosa

Nel primo caso l'esponente agisce su **tutto** il monomio: coefficiente compreso.

$$(-2a^2b)^3 = -8a^6b^3$$

Nel secondo agisce solo sulla b .

$$-2a^2b^3$$

Come sempre, sono le parentesi a dire su cosa agisce l'esponente. Un altro caso da tenere d'occhio: $(-2a)^2 = 4a^2$, mentre $-2a^2$ resta $-2a^2$.

10 Espressioni con i monomi

L'ordine delle operazioni è quello di sempre. La differenza è che ora bisogna controllare, a ogni somma, se i monomi sono simili.

Metodo 10.1: Un'espressione con i monomi, senza errori:

1. Parentesi, dalla più interna.
2. Potenze: sul coefficiente e su tutte le lettere.
3. Prodotti e quozienti da sinistra a destra: coefficienti fra loro, esponenti sommati o sottratti.
4. Somme algebriche: **prima** si controlla che i monomi siano simili. Se non lo sono, si lasciano.
5. Alla fine si riordinano le lettere in ordine alfabetico.

Esempio Svolto 10.1: Un'espressione con tutto dentro:

$$(2a^2b)^2 : (-4a^3b) + 3ab$$

1. La potenza.

$$(2a^2b)^2 = 4a^4b^2$$

2. Il quoziente: coefficienti $4 : (-4) = -1$, esponenti sottratti.

$$4a^4b^2 : (-4a^3b) = -ab$$

3. La somma. $-ab$ e $3ab$ sono simili: si sommano i coefficienti.

$$-ab + 3ab = 2ab$$

4. Controllo con numeri, $a = b = 1$: l'espressione di partenza vale $(2)^2 : (-4) + 3 = -1 + 3 = 2$, e $2ab = 2$. Torna.

11 Valore numerico

Formula 11.1: Come si calcola: Si sostituisce a ogni lettera il suo valore e si esegue il calcolo. I valori negativi e frazionari vanno sostituiti **fra parentesi**.

Esempio Svolto 11.1: Valore di $-3a^2b$ per $a = -2$ e $b = \frac{1}{2}$:

1. Sostituzione, con le parentesi.

$$-3 \cdot (-2)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

2. La potenza per prima. Base negativa, esponente pari: positivo.

$$(-2)^2 = +4$$

3. I prodotti.

$$-3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = -12 \cdot \frac{1}{2} = -6$$

4. L'errore da evitare. Scrivendo $-3 \cdot -2^2$ senza parentesi si calcolerebbe $-2^2 = -4$, ottenendo $+6$: segno sbagliato.

A cosa serve il valore numerico

A controllare tutto il resto. Se una somma o un prodotto di monomi è sbagliato, basta dare un valore alle lettere e confrontare i due numeri: se non coincidono, c'è un errore. Non dimostra che il risultato è giusto — due monomi diversi possono coincidere su un valore particolare — ma smaschera quasi tutti gli errori in pochi secondi.

12 MCD e mcm fra monomi

Formula 12.1: Le due regole:

- **MCD**: il MCD dei coefficienti, e le lettere **comuni** con l'esponente **minore**.
- **mcm**: il mcm dei coefficienti, e **tutte** le lettere con l'esponente **maggiore**.

Sono le stesse regole dei numeri: le lettere si comportano come i fattori primi.

Esempio Svolto 12.1: MCD e mcm fra $12a^3b^2$ e $18ab^3c$:

1. I coefficienti.

$$\text{MCD}(12, 18) = 6 \qquad \text{mcm}(12, 18) = 36$$

2. Le lettere per il MCD: solo le comuni (a e b), esponente minore. La c sta in uno solo, quindi resta fuori.

$$\text{MCD} = 6ab^2$$

3. Le lettere per il mcm: tutte (a , b , c), esponente maggiore.

$$\text{mcm} = 36a^3b^3c$$

4. Controllo. Il MCD deve dividere entrambi, e lo fa: $12a^3b^2 : 6ab^2 = 2a^2$ e $18ab^3c : 6ab^2 = 3bc$. Il mcm, al contrario, deve essere divisibile per entrambi.

Una proprietà che torna utile

Come fra i numeri, per due monomi vale

$$\text{MCD} \cdot \text{mcm} = \text{prodotto dei due monomi}$$

Con l'esempio qui sopra: $6ab^2 \cdot 36a^3b^3c = 216a^4b^5c$, e $12a^3b^2 \cdot 18ab^3c = 216a^4b^5c$. Torna. Serve quando di due monomi si conoscono MCD e mcm e si cerca uno dei due: si fa il prodotto $\text{MCD} \cdot \text{mcm}$ e si divide per il monomio noto.

13 Monomi e geometria

I monomi servono a scrivere una misura che dipende da un'altra. È il loro primo uso vero, e anticipa tutta la geometria analitica.

Esempio Svolto 13.1: Il rettangolo di lati $3a$ e $2a$:

1. Il perimetro è la somma dei quattro lati:

$$2 \cdot (3a + 2a) = 2 \cdot 5a = 10a$$

I due monomi sono simili, quindi si sommano.

2. L'area è il prodotto dei lati:

$$3a \cdot 2a = 6a^2$$

3. Cosa dicono i gradi. Il perimetro è di grado 1, l'area di grado 2: una lunghezza dipende linearmente dal lato, un'area quadraticamente. Se il lato raddoppia, il perimetro raddoppia e l'area **quadruplica**.

4. Controllo. Per $a = 1$: rettangolo 3×2 , perimetro 10, area 6. Torna.

Perché i gradi dicono qualcosa di fisico

Un volume di lato a è a^3 : grado 3. Una superficie è di grado 2, una lunghezza di grado 1. Il grado di un monomio geometrico dice quante dimensioni ha la grandezza che misura — ed è il motivo per cui non si può sommare un'area a una lunghezza: non sono monomi simili.

Indice analitico

Calcolo letterale, 3

Espressioni con monomi, 11

Forma normale, 4

Grado di un monomio, 5

MCD fra monomi, 12

mcm fra monomi, 12

Monomi e geometria, 13

Monomi opposti, 6

Monomi simili, 6

Monomio, 4

Potenza di un monomio, 10

Prodotto di monomi, 8

Quoziente di monomi, 9

Somma di monomi, 6

Valore numerico, 11