

FORMULARIO: I POLINOMI

In ogni riquadro: la regola con le sue condizioni e un esempio con i numeri.

1 Che cos'è un polinomio

1.1 Polinomio, termini, forma normale

Un **polinomio** è una somma algebrica di monomi, detti **termini**. Due termini: **binomio**; tre: **trinomio**.

È in **forma normale** quando i termini simili sono stati sommati.

ESEMPIO

$$2x^2y - 3xy^2 + x^2y + 5 \longrightarrow 3x^2y - 3xy^2 + 5$$

1.2 Grado e termine noto

Il **grado** è il grado più alto fra i termini (non la somma, non il numero dei termini). Il **grado relativo** a una lettera è il massimo esponente con cui compare. Il **termine noto** è il termine senza lettere; se non c'è, vale 0. Il polinomio nullo non ha grado.

ESEMPIO

In $3x^2y - 3xy^2 + 5$: grado 3; relativo a x : 2; relativo a y : 2; termine noto 5.

1.3 Ordinato, completo, omogeneo

ordinato	potenze della lettera in ordine decrescente
completo	ci sono tutte le potenze, dal grado fino al termine noto
omogeneo	tutti i termini hanno lo stesso grado

ESEMPIO

$-2x^3 + x + 3$ è ordinato, non completo (manca x^2), non omogeneo.

$a^2 + 2ab + b^2$ è omogeneo di grado 2.

2 Le operazioni

2.1 Somma e sottrazione

Si sciolgono le parentesi e si sommano i termini simili. Parentesi col **più** davanti: si toglie. Parentesi col **meno** davanti: **ogni** segno dentro cambia.

ESEMPIO

$$(2x^2 - 3x + 1) - (x^2 - 3x - 4) = 2x^2 - 3x + 1 - x^2 + 3x + 4 = x^2 + 5$$

2.2 Monomio per polinomio, e divisione per un monomio

$$c(A + B + C) = cA + cB + cC \quad (A + B) : c = A : c + B : c$$

Si moltiplica, o si divide, **ogni** termine. La divisione dà un polinomio solo se ogni termine è divisibile.

ESEMPIO

$$-2a(3a^2 - a + 4) = -6a^3 + 2a^2 - 8a$$

$$(6x^3 - 4x^2 + 2x) : 2x = 3x^2 - 2x + 1$$

2.3 Prodotto di due polinomi

Ogni termine del primo per ogni termine del secondo, poi si sommano i simili. Con m e n termini i prodotti sono $m \cdot n$.

Controlli: il grado del prodotto è la **somma** dei gradi; il termine noto è il **prodotto** dei termini noti.

ESEMPIO

$$(2x - 3)(x^2 + x - 1) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$$

Grado $1 + 2 = 3$; termine noto $(-3)(-1) = 3$.

3 I prodotti notevoli

3.1 Somma per differenza

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Solo se i binomi sono **coniugati**: primo termine identico, secondo opposto. Il risultato ha due termini, non tre.

ESEMPIO

$$(3a + 2b)(3a - 2b) = 9a^2 - 4b^2$$
$$98 \cdot 102 = (100 - 2)(100 + 2) = 10000 - 4 = 9996$$

3.2 Quadrato di binomio

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Quadrato del primo, **doppio prodotto**, quadrato del secondo. I due quadrati sono sempre positivi; il segno del doppio prodotto è quello fra i due termini.

ESEMPIO

$$(2x - 5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$$

Mai $4x^2 + 25$: con $x = 1$ il primo dà 9, il secondo 29.

3.3 Quadrato di trinomio

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Tre quadrati e **tre** doppi prodotti, uno per ogni coppia. Ogni termine si prende col suo segno. La formula si ricorda in quest'ordine; il risultato si scrive ordinato per potenze decrescenti.

ESEMPIO

$$(a + b - 2c)^2 = a^2 + 2ab - 4ac + b^2 - 4bc + 4c^2$$

3.4 Cubo di binomio

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Quattro termini. Col meno i segni si alternano.

ESEMPIO

$$(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

Non $x^3 - 8$: con $x = 1$ il primo dà -1 , il secondo -7 .

3.5 Potenza di un binomio: il triangolo di Tartaglia

I coefficienti di $(a + b)^n$ sono la riga n del triangolo; gli esponenti di a scendono da n a 0, quelli di b salgono da 0 a n . La riga n ha $n + 1$ numeri. Col meno i segni si alternano.

ESEMPIO

$$\begin{array}{ccccccc}
 n = 2 & 1 & 2 & 1 & & & \\
 n = 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 n = 4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 n = 5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 n = 6 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
 \end{array}$$

$$(x - 2)^5 = x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$$

3.6 I coefficienti del risultato non sono quelli di Tartaglia

Ogni termine del binomio va sostituito **per intero**, coefficiente compreso: i numeri di Tartaglia vanno moltiplicati per le potenze dei coefficienti.

ESEMPIO

$$\begin{aligned}
 (2x + 3)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 3 + 3(2x) \cdot 3^2 + 3^3 \\
 &= 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27
 \end{aligned}$$

4 Espressioni, valore numerico, al contrario

4.1 Ordine delle operazioni

Parentesi (dalla più interna), potenze, prodotti e quozienti, somme algebriche. In più, **prima di calcolare si guarda**: se c'è un prodotto notevole si usa la formula, e i pezzi opposti si elidono senza calcolarli.

ESEMPIO

$$(x + 3)^2 - (x + 2)(x + 4) = x^2 + 6x + 9 - x^2 - 6x - 8 = 1$$

4.2 Quando conviene non sviluppare

Se due binomi si ripetono, spesso l'espressione è essa stessa un prodotto notevole: conviene trattare i binomi come un blocco unico.

ESEMPIO

$$\begin{aligned}
 (a + b)^2 - (a - b)^2 &= [(a + b) + (a - b)][(a + b) - (a - b)] \\
 &= (2a)(2b) = 4ab
 \end{aligned}$$

Due righe invece di sei.

4.3 Valore numerico

Si sostituisce a ogni lettera il suo valore, **fra parentesi** se negativo o frazionario, e si calcola rispettando l'ordine delle operazioni.

ESEMPIO

$2x^3 - x^2 + 5$ per $x = -2$:

$$2(-2)^3 - (-2)^2 + 5 = -16 - 4 + 5 = -15$$

Senza parentesi si otterrebbe -7 .

4.4 Le formule lette al contrario

Un trinomio è un quadrato di binomio se due termini sono quadrati e il terzo è il doppio prodotto delle loro basi. Un binomio è una somma per differenza se è una differenza di due quadrati. Qui si riconoscono solo i prodotti notevoli di questo formulario: il resto della scomposizione — raccoglimento, trinomio caratteristico, Ruffini — ha il suo capitolo.

ESEMPIO

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 \quad 4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5)$$

$x^2 + 7x + 9$ **non** è un quadrato: il doppio prodotto sarebbe $6x$.

I prodotti notevoli in una pagina

Nome	Formula	Esempio
somma per differenza	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$
quadrato di binomio	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$
quadrato di trinomio	$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	$(x + y + 1)^2$
cubo di binomio	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$	$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
potenza n -esima	coefficienti dalla riga n di Tartaglia	$(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

Quanti termini deve avere il risultato: quadrato di binomio 3, cubo 4, somma per differenza 2, potenza n -esima $n + 1$. Se ne vengono meno, manca qualcosa.

I sei errori che costano di più

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$: il doppio prodotto non si dimentica.
- In $(a - b)^2$ il quadrato del secondo è $+b^2$.
- $(a + b)^3$ ha quattro termini, non due.

- La somma per differenza vale solo fra binomi *coniugati*.
- Il meno davanti alla parentesi cambia *tutti* i segni.
- Dividendo un polinomio per un monomio si divide *ogni* termine, compreso l'ultimo.