

SOLUZIONI: I POLINOMI

La numerazione è la stessa del file degli esercizi.

Sono svolti i **primi due esercizi di ogni blocco** — così ogni tipologia ha il suo modello — e **tutti quelli di livello ■■■■**. Nei prodotti notevoli il passaggio intermedio è sempre scritto: prima si vede la formula applicata, poi il risultato. Dove i numeri restano leggibili, l'ultimo passo è il controllo con un valore delle lettere.

1. Riconoscere, grado, ordinare

Esercizio 1.

→ $2x^2y - 3xy^2 + x^2y + 5 = 3x^2y - 3xy^2 + 5$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $3x^2y - 3xy^2 + 5$

→ Controllo con $x = 2, y = 2$: l'espressione di partenza dà 5 e il risultato dà 5. (il controllo che smaschera quasi tutti gli errori)

Esercizio 2.

→ $3a - 5b + 2a + b = 5a - 5b + b$ (si sommano i termini simili)

→ $= 5a - 4b$

→ Risultato: $5a - 4b$

→ Controllo con $a = 2, b = 2$: l'espressione di partenza dà 2 e il risultato dà 2.

Esercizio 13.

→ Il grado di ogni termine: x^3 ha grado 3, $-2x^2$ ha grado 2, x ha grado 1, -5 ha grado 0. (il grado di un monomio è la somma degli esponenti)

→ Il grado del polinomio è il più alto fra questi: **3**. (non la somma, e non il numero dei termini)

→ Il termine noto è quello senza lettere: **-5**.

Esercizio 14.

→ Il grado di ogni termine: $2x^2y$ ha grado 3, $-3xy^2$ ha grado 3, 5 ha grado 0.

→ Il grado del polinomio è il più alto fra questi: **3**. (non la somma, e non il numero dei termini)

→ Il termine noto è quello senza lettere: **5**.

Esercizio 25.

→ Si guardano gli esponenti di x e si scrivono i termini dal più alto al più basso.

→ Ordinato: $-2x^3 + x + 3$

→ Mancano x^2 : non è completo. (completo vuol dire senza buchi)

Esercizio 26.

→ Si guardano gli esponenti di x e si scrivono i termini dal più alto al più basso.

→ Ordinato: $x^3 - x^2 + x + 1$

→ Ci sono tutte le potenze da x^3 al termine noto: è completo.

Esercizio 33.

→ Le potenze di x presenti: 3, 2, 1, 0.

→ Non ci sono buchi, quindi completo.

→ I gradi dei termini sono 3, 2, 1, 0, quindi non è omogeneo. (omogeneo = tutti i termini dello stesso grado)

Esercizio 34.

→ Le potenze di x presenti: 2, 0.

→ Manca qualche potenza, quindi non completo.

→ I gradi dei termini sono 2, 0, quindi non è omogeneo.

2. Somme e sottrazioni di polinomi**Esercizio 41.**

→ $(3x + 2) + (x - 5) = 3x + 2 + x - 5$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

→ $= 4x - 3$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $4x - 3$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 5 e il risultato dà 5.

Esercizio 42.

$$\rightarrow (2a^2 - a) + (a^2 + 3a) = 2a^2 - a + a^2 + 3a \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = 3a^2 + 2a \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{3a^2 + 2a}$$

$$\rightarrow \text{Controllo con } a = 2: \text{ l'espressione di partenza dà 16 e il risultato dà 16.}$$

Esercizio 55.

$$\rightarrow (2x^2 - 3x + 1) - (x^2 - 3x - 4) = 2x^2 - 3x + 1 - x^2 + 3x + 4 \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = x^2 + 5 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{x^2 + 5}$$

$$\rightarrow \text{Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà 9 e il risultato dà 9.}$$

Esercizio 56.

$$\rightarrow (5a - 2) - (3a + 4) = 5a - 2 - 3a - 4 \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = 2a - 6 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{2a - 6}$$

$$\rightarrow \text{Controllo con } a = 2: \text{ l'espressione di partenza dà } -2 \text{ e il risultato dà } -2.$$

Esercizio 68.

$$\rightarrow (x^2 + 2x) + (x^2 - x) - (2x^2 + x) = x^2 + 2x + x^2 - x - (2x^2 + x) \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = 2x^2 + x - (2x^2 + x) \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = 2x^2 + x - 2x^2 - x \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = 0 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{0}$$

$$\rightarrow \text{Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà 0 e il risultato dà 0.}$$

Esercizio 69.

$$\rightarrow (3a - b) - (a + 2b) + (a - b) = 3a - b - a - 2b + (a - b) \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = 2a - 3b + (a - b) \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = 2a - 3b + a - b \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = 3a - 4b \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } \mathbf{3a - 4b}$$

$$\rightarrow \text{ Controllo con } a = 2, b = 2: \text{ l'espressione di partenza dà } -2 \text{ e il risultato dà } -2.$$

Esercizio 78.

$$\rightarrow 2(3x - 1) - 3(x - 2) = 6x - 2 - 3(x - 2) \text{ (ogni termine per ogni termine)}$$

$$\rightarrow = 6x - 2 - (3x - 6)$$

$$\rightarrow = 6x - 2 - 3x + 6 \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = 3x + 4 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } \mathbf{3x + 4}$$

$$\rightarrow \text{ Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà } 10 \text{ e il risultato dà } 10.$$

Esercizio 79.

$$\rightarrow 3(a + 2b) - 2(a + 3b) = 3a + 6b - 2(a + 3b) \text{ (ogni termine per ogni termine)}$$

$$\rightarrow = 3a + 6b - (2a + 6b)$$

$$\rightarrow = 3a + 6b - 2a - 6b \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = a \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } \mathbf{a}$$

$$\rightarrow \text{ Controllo con } a = 2, b = 2: \text{ l'espressione di partenza dà } 2 \text{ e il risultato dà } 2.$$

Esercizio 86.

$$\rightarrow 2(3x - [x - 4]) - 5x = 2(3x - x + 4) - 5x \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = 2(2x + 4) - 5x \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = 4x + 8 - 5x \text{ (ogni termine per ogni termine)}$$

$$\rightarrow = -x + 8 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } \mathbf{-x + 8}$$

$$\rightarrow \text{ Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà } 6 \text{ e il risultato dà } 6.$$

Esercizio 87.

→ $3a - (2a - [a - b]) + b = 3a - (2a - a + b) + b$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

→ $= 3a - (a + b) + b$ (si sommano i termini simili)

→ $= 3a - a - b + b$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

→ $= 2a - b + b$ (si sommano i termini simili)

→ $= 2a$

→ Risultato: **2a**

→ Controllo con $a = 2, b = 2$: l'espressione di partenza dà 4 e il risultato dà 4.

Esercizio 92.

→ Se $A + B = 3x^2 - x + 5$ e $A = x^2 + 2x - 1$, allora B è la differenza. (si torna indietro sottraendo)

→ $B = (3x^2 - x + 5) - (x^2 + 2x - 1)$

→ Sciogliendo la parentesi col meno davanti: **$2x^2 - 3x + 6$**

→ Controllo: $x^2 + 2x - 1 + (2x^2 - 3x + 6) = 3x^2 - x + 5$.

Esercizio 93.

→ Se $A + B = 2a - 3b$ e $A = a + b$, allora B è la differenza. (si torna indietro sottraendo)

→ $B = (2a - 3b) - (a + b)$

→ Sciogliendo la parentesi col meno davanti: **$a - 4b$**

→ Controllo: $a + b + (a - 4b) = 2a - 3b$.

3. Monomio per polinomio, e divisione per un monomio**Esercizio 96.**

→ $(-2a)(3a^2 - a + 4) = -6a^3 + 2a^2 - 8a$ (ogni termine per ogni termine)

→ Risultato: **$-6a^3 + 2a^2 - 8a$**

→ Controllo con $a = 2$: l'espressione di partenza dà -56 e il risultato dà -56.

Esercizio 97.

→ $3x(x^2 + 2x - 1) = 3x^3 + 6x^2 - 3x$ (ogni termine per ogni termine)

→ Risultato: $3x^3 + 6x^2 - 3x$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 42 e il risultato dà 42.

Esercizio 110.

→ $(6x^3 - 4x^2 + 2x) : 2x = 6x^3 : 2x - 4x^2 : 2x + 2x : 2x$ (si divide ogni termine del polinomio)

→ $= 3x^2 - 2x + 1$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $3x^2 - 2x + 1$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 9 e il risultato dà 9.

Esercizio 111.

→ $(9a^2 - 3a) : 3a = 9a^2 : 3a - 3a : 3a$ (si divide ogni termine del polinomio)

→ $= 3a - 1$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $3a - 1$

→ Controllo con $a = 2$: l'espressione di partenza dà 5 e il risultato dà 5.

Esercizio 124.

→ $\left(-\frac{1}{2}x\right)(4x^2 - 6x + 2) = -2x^3 + 3x^2 - x$ (ogni termine per ogni termine)

→ Risultato: $-2x^3 + 3x^2 - x$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà -6 e il risultato dà -6.

Esercizio 125.

→ $\frac{2}{3}a^2(3a - 9b) = 2a^3 - 6a^2b$ (ogni termine per ogni termine)

→ Risultato: $2a^3 - 6a^2b$

→ Controllo con $a = 2, b = 2$: l'espressione di partenza dà -32 e il risultato dà -32.

Esercizio 133.

→ Si guarda termine per termine: ognuno è divisibile per $2x$. (basta che uno non lo sia per rovinare tutto)

$$\rightarrow (6x^3 - 4x^2) : 2x = 3x^2 - 2x$$

$$\rightarrow \text{Controllo: } 2x \cdot (3x^2 - 2x) = 6x^3 - 4x^2.$$

Esercizio 134.

→ Si guarda termine per termine.

→ Il termine 3 non è divisibile per x : l'esponente diventerebbe negativo.

→ Quindi il quoziente **non è un polinomio**: si può scrivere come frazione, ma esce dai polinomi.

4. Prodotto di due polinomi

Esercizio 141.

$$\rightarrow (x + 1)(x + 2) = x^2 + 2x + x + 2 \text{ (ogni termine per ogni termine)}$$

$$\rightarrow = x^2 + 3x + 2 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } x^2 + 3x + 2$$

$$\rightarrow \text{Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà 12 e il risultato dà 12.}$$

Esercizio 142.

$$\rightarrow (x - 3)(x + 5) = x^2 + 5x - 3x - 15 \text{ (ogni termine per ogni termine)}$$

$$\rightarrow = x^2 + 2x - 15 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } x^2 + 2x - 15$$

$$\rightarrow \text{Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà } -7 \text{ e il risultato dà } -7.$$

Esercizio 154.

$$\rightarrow (2x - 3)(x^2 + x - 1) = 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + 3 \text{ (ogni termine per ogni termine)}$$

$$\rightarrow = 2x^3 - x^2 - 5x + 3 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } 2x^3 - x^2 - 5x + 3$$

$$\rightarrow \text{Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà 5 e il risultato dà 5.}$$

Esercizio 155.

→ $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1$ (ogni termine per ogni termine)

→ $= x^3 + 1$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $x^3 + 1$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 9 e il risultato dà 9.

Esercizio 166.

→ $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1$ (ogni termine per ogni termine)

→ $= x^4 + x^2 + 1$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $x^4 + x^2 + 1$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 21 e il risultato dà 21.

Esercizio 167.

→ $(a^2 - 2a + 1)(a^2 + 2a + 1) = a^4 + 2a^3 + a^2 - 2a^3 - 4a^2 - 2a + a^2 + 2a + 1$ (ogni termine per ogni termine)

→ $= a^4 - 2a^2 + 1$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $a^4 - 2a^2 + 1$

→ Controllo con $a = 2$: l'espressione di partenza dà 9 e il risultato dà 9.

Esercizio 178.

→ Non serve tutto il prodotto: bastano i pezzi che danno x^2 . (è il modo di rispondere in dieci secondi)

→ Svolgendo, il polinomio è $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

→ Il coefficiente di x^2 è 6.

Esercizio 179.

→ Non serve tutto il prodotto: bastano i pezzi che danno x^2 .

→ Svolgendo, il polinomio è $2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$.

→ Il coefficiente di x^2 è 5.

5. Somma per differenza

Esercizio 186.

$$\rightarrow (x + 3)(x - 3) = x^2 - 3^2 \text{ (somma per differenza: quadrato del primo meno quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = x^2 - 9 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } x^2 - 9$$

$$\rightarrow \text{Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà } -5 \text{ e il risultato dà } -5.$$

Esercizio 187.

$$\rightarrow (a - 5)(a + 5) = a^2 - 5^2 \text{ (somma per differenza: quadrato del primo meno quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = a^2 - 25 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } a^2 - 25$$

$$\rightarrow \text{Controllo con } a = 2: \text{ l'espressione di partenza dà } -21 \text{ e il risultato dà } -21.$$

Esercizio 198.

$$\rightarrow (2x + 3)(2x - 3) = (2x)^2 - 3^2 \text{ (somma per differenza: quadrato del primo meno quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = 4x^2 - 9 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } 4x^2 - 9$$

$$\rightarrow \text{Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà } 7 \text{ e il risultato dà } 7.$$

Esercizio 199.

$$\rightarrow (3a - 1)(3a + 1) = (3a)^2 - 1^2 \text{ (somma per differenza: quadrato del primo meno quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = 9a^2 - 1 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } 9a^2 - 1$$

$$\rightarrow \text{Controllo con } a = 2: \text{ l'espressione di partenza dà } 35 \text{ e il risultato dà } 35.$$

Esercizio 206.

$$\rightarrow (3a + 2b)(3a - 2b) = (3a)^2 - (2b)^2 \text{ (somma per differenza: quadrato del primo meno quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = 9a^2 - 4b^2 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } 9a^2 - 4b^2$$

→ Controllo con $a = 2, b = 2$: l'espressione di partenza dà 20 e il risultato dà 20.

Esercizio 207.

→ $(x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2)^2 - 1^2$ (somma per differenza: quadrato del primo meno quadrato del secondo)

→ $= x^4 - 1$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $x^4 - 1$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 15 e il risultato dà 15.

Esercizio 215.

→ I due numeri stanno entrambi a 2 da 100. (è la somma per differenza usata al contrario)

→ $98 \cdot 102 = (100 - 2)(100 + 2) = 100^2 - 2^2$

→ $= 10000 - 4 = 9996$

Esercizio 216.

→ I due numeri stanno entrambi a 3 da 50.

→ $47 \cdot 53 = (50 - 3)(50 + 3) = 50^2 - 3^2$

→ $= 2500 - 9 = 2491$

Esercizio 221.

→ $(a + b + c)(a + b - c) = a^2 + ab - ac + ab + b^2 - bc + ac + bc - c^2$ (ogni termine per ogni termine)

→ $= a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$

→ Controllo con $a = 2, b = 2, c = 2$: l'espressione di partenza dà 12 e il risultato dà 12.

Esercizio 222.

→ $(x + y - 1)(x + y + 1) = x^2 + xy + x + xy + y^2 + y - x - y - 1$ (ogni termine per ogni termine)

→ $= x^2 + 2xy + y^2 - 1$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $x^2 + 2xy + y^2 - 1$

→ Controllo con $x = 2, y = 2$: l'espressione di partenza dà 15 e il risultato dà 15.

6. Quadrato di binomio e di trinomio

Esercizio 231.

→ $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

→ Risultato: $x^2 + 2x + 1$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 9 e il risultato dà 9.

Esercizio 232.

→ $(x - 2)^2 = x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

→ $= x^2 - 4x + 4$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $x^2 - 4x + 4$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 0 e il risultato dà 0.

Esercizio 245.

→ $(2x - 5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

→ $= 4x^2 - 20x + 25$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $4x^2 - 20x + 25$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 1 e il risultato dà 1.

Esercizio 246.

→ $(3a + 1)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a + 1$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

→ $= 9a^2 + 6a + 1$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $9a^2 + 6a + 1$

→ Controllo con $a = 2$: l'espressione di partenza dà 49 e il risultato dà 49.

Esercizio 257.

→ $(2a + 3b)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3b + (3b)^2$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

$$\rightarrow = 4a^2 + 12ab + 9b^2 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } \mathbf{4a^2 + 12ab + 9b^2}$$

$\rightarrow$ Controllo con $a = 2, b = 2$: l'espressione di partenza dà 100 e il risultato dà 100.

Esercizio 258.

$$\rightarrow (x^2 - 1)^2 = (x^2)^2 - 2x^2 + 1 \text{ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = x^4 - 2x^2 + 1 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } \mathbf{x^4 - 2x^2 + 1}$$

$\rightarrow$ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 9 e il risultato dà 9.

Esercizio 269.

$$\rightarrow (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c \text{ (i quadrati di tutti i termini, più un doppio prodotto per ogni coppia)}$$

$$\rightarrow = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } \mathbf{a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2}$$

$\rightarrow$ Controllo con $a = 2, b = 2, c = 2$: l'espressione di partenza dà 36 e il risultato dà 36.

Esercizio 270.

$$\rightarrow (x + y + 1)^2 = x^2 + y^2 + 1^2 + 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x + 2 \cdot y \text{ (i quadrati di tutti i termini, più un doppio prodotto per ogni coppia)}$$

$$\rightarrow = x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } \mathbf{x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1}$$

$\rightarrow$ Controllo con $x = 2, y = 2$: l'espressione di partenza dà 25 e il risultato dà 25.

Esercizio 281.

$$\rightarrow (2x^2 - 3y)^2 = (2x^2)^2 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 3y + (3y)^2 \text{ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = 4x^4 - 12x^2y + 9y^2 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } \mathbf{4x^4 - 12x^2y + 9y^2}$$

$\rightarrow$ Controllo con $x = 2, y = 2$: l'espressione di partenza dà 4 e il risultato dà 4.

Esercizio 282.

→ $\left(\frac{1}{3}a - 3b\right)^2 = \left(\frac{1}{3}a\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}a \cdot 3b + (3b)^2$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

→ $= \frac{1}{9}a^2 - 2ab + 9b^2$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $\frac{1}{9}a^2 - 2ab + 9b^2$

→ Controllo con $a = 2, b = 2$: l'espressione di partenza dà $\frac{256}{9}$ e il risultato dà $\frac{256}{9}$.

Esercizio 290.

→ Il quadrato di un binomio ha **tre** termini: qui ce ne sono due, quindi manca qualcosa. (è il primo segnale)

→ Manca il doppio prodotto: $2 \cdot x \cdot 4 = 8x$.

→ Il risultato giusto è $x^2 + 8x + 16$.

→ Controllo con $x = 1$: $(1 + 4)^2 = 25$, e $1 + 8 + 16 = 25$. Invece $1 + 16 = 17$: sbagliato.

Esercizio 291.

→ $4a^2 - 25$ è il risultato di $(2a - 5)(2a + 5)$, cioè di una somma per differenza. (sono state confuse due formule)

→ Qui però i due fattori sono uguali: è un quadrato, e il doppio prodotto c'è.

→ $(2a - 5)^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 5 + 5^2 = 4a^2 - 20a + 25$

→ Controllo con $a = 1$: $(2 - 5)^2 = 9$, e $4 - 20 + 25 = 9$. Invece $4 - 25 = -21$, che è pure negativo: un quadrato non può esserlo.

7. Cubo di binomio**Esercizio 296.**

→ $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ (cubo del primo, tre volte il quadrato del primo per il secondo, tre volte il primo per il quadrato del secondo, cubo del secondo)

→ Risultato: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 27 e il risultato dà 27.

Esercizio 297.

→ $(x - 2)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 - 2^3$ (cubo del primo, tre volte il quadrato del primo per il secondo, tre volte il primo per il quadrato del secondo, cubo del secondo)

→ $= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 0 e il risultato dà 0.

Esercizio 308.

→ $(2x + 3)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 + 3^3$ (cubo del primo, tre volte il quadrato del primo per il secondo, tre volte il primo per il quadrato del secondo, cubo del secondo)

→ $= 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 343 e il risultato dà 343.

Esercizio 309.

→ $(3a - 1)^3 = (3a)^3 - 3 \cdot (3a)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 3a \cdot 1^2 - 1^3$ (cubo del primo, tre volte il quadrato del primo per il secondo, tre volte il primo per il quadrato del secondo, cubo del secondo)

→ $= 27a^3 - 27a^2 + 9a - 1$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $27a^3 - 27a^2 + 9a - 1$

→ Controllo con $a = 2$: l'espressione di partenza dà 125 e il risultato dà 125.

Esercizio 318.

→ $(2a + b)^3 = (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot b + 3 \cdot 2a \cdot b^2 + b^3$ (cubo del primo, tre volte il quadrato del primo per il secondo, tre volte il primo per il quadrato del secondo, cubo del secondo)

→ $= 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$

→ Controllo con $a = 2, b = 2$: l'espressione di partenza dà 216 e il risultato dà 216.

Esercizio 319.

→ $(x^2 - 1)^3 = (x^2)^3 - 3 \cdot (x^2)^2 + 3x^2 - 1$ (cubo del primo, tre volte il quadrato del primo per il secondo, tre volte il primo per il quadrato del secondo, cubo del secondo)

→ $= x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 27 e il risultato dà 27.

Esercizio 328.

→ Quattro termini: può essere un cubo di binomio. Si guardano il primo e l'ultimo, che devono essere cubi. (sono quelli che si riconoscono a occhio)

→ x^3 è il cubo di x ; 1 è il cubo di 1.

→ Allora il binomio è quello, e il cubo è $(x + 1)^3$.

→ Controllo: risviluppando torna $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. (in un esercizio a ritroso il controllo è risviluppare)

Esercizio 329.

→ Quattro termini: può essere un cubo di binomio. Si guardano il primo e l'ultimo, che devono essere cubi.

→ x^3 è il cubo di x ; -8 è il cubo di -2 .

→ Allora il binomio è quello, e il cubo è $(x - 2)^3$.

→ Controllo: risviluppando torna $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

8. Potenza di un binomio: il triangolo di Tartaglia

Esercizio 336.

→ $(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ (i coefficienti sono la riga del triangolo di Tartaglia, e gli esponenti scendono da n a 0)

→ Risultato: $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 81 e il risultato dà 81.

Esercizio 337.

→ $(x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ (i coefficienti sono la riga del triangolo di Tartaglia, e gli esponenti scendono da n a 0)

→ Risultato: $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 1 e il risultato dà 1.

Esercizio 350.

→ $(2x + 1)^4 = (2x)^4 + 4 \cdot (2x)^3 + 6 \cdot (2x)^2 + 4 \cdot 2x + 1$ (i coefficienti sono la riga del triangolo di Tartaglia, e gli esponenti scendono da n a 0)

→ $= 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 625 e il risultato dà 625.

Esercizio 351.

→ $(2a - 3)^4 = (2a)^4 - 4 \cdot (2a)^3 \cdot 3 + 6 \cdot (2a)^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 2a \cdot 3^3 + 3^4$ (i coefficienti sono la riga del triangolo di Tartaglia, e gli esponenti scendono da n a 0)

→ $= 16a^4 - 96a^3 + 216a^2 - 216a + 81$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $16a^4 - 96a^3 + 216a^2 - 216a + 81$

→ Controllo con $a = 2$: l'espressione di partenza dà 1 e il risultato dà 1.

Esercizio 366.

→ $(x + 1)^6 - (x - 1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1 - (x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1)$ (i coefficienti sono la riga del triangolo di Tartaglia, e gli esponenti scendono da n a 0)

→ $= x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1 - (x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1)$

→ $= x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1 - x^6 + 6x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 15x^2 + 6x - 1$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

→ $= 12x^5 + 40x^3 + 12x$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $12x^5 + 40x^3 + 12x$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 728 e il risultato dà 728.

Esercizio 367.

→ $(x + 1)^5 + (x - 1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 + (x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1)$ (i coefficienti sono la riga del triangolo di Tartaglia, e gli esponenti scendono da n a 0)

$$\rightarrow = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 + (x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1)$$

$$\rightarrow = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 + x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = 2x^5 + 20x^3 + 10x \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } \mathbf{2x^5 + 20x^3 + 10x}$$

$$\rightarrow \text{ Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà 244 e il risultato dà 244.}$$

Esercizio 368.

$$\rightarrow ([x+1]^4 - [x-1]^4) : 8x = (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - [x-1]^4) : 8x \text{ (i coefficienti sono la riga del triangolo di Tartaglia, e gli esponenti scendono da n a 0)}$$

$$\rightarrow = (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - [x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1]) : 8x$$

$$\rightarrow = (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1) : 8x \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = (8x^3 + 8x) : 8x \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = 8x^3 : 8x + 8x : 8x \text{ (si divide ogni termine del polinomio)}$$

$$\rightarrow = x^2 + 1 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } \mathbf{x^2 + 1}$$

$$\rightarrow \text{ Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà 5 e il risultato dà 5.}$$

Esercizio 369.

$$\rightarrow \text{ Non serve tutto il prodotto: bastano i pezzi che danno } x^3.$$

$$\rightarrow \text{ Svolgendo, il polinomio è } 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1.$$

$$\rightarrow \text{ Il coefficiente di } x^3 \text{ è } \mathbf{80}.$$

Esercizio 370.

$$\rightarrow \text{ Non serve tutto il prodotto: bastano i pezzi che danno } x^4.$$

$$\rightarrow \text{ Svolgendo, il polinomio è } x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64.$$

$$\rightarrow \text{ Il coefficiente di } x^4 \text{ è } \mathbf{60}.$$

Esercizio 371.

→ Non serve tutto il prodotto: bastano i pezzi che danno x^2 .

→ Svolgendo, il polinomio è $81x^4 - 108x^3 + 54x^2 - 12x + 1$.

→ Il coefficiente di x^2 è **54**.

Esercizio 372.

→ Non serve tutto il prodotto: bastano i pezzi che danno x^1 .

→ Svolgendo, il polinomio è $x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$.

→ Il coefficiente di x^1 è **405**.

Esercizio 373.

→ Le somme delle righe sono 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64: raddoppiano ogni volta.

→ La riga n somma 2^n , quindi serve $2^n = 64$.

→ $2^6 = 64$, cioè **$n = 6$** .

→ Controllo sulla riga $n = 6$: $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$. Torna.

Esercizio 374.

→ I numeri della riga n sono i coefficienti di $(a + b)^n$.

→ Se si pone $a = 1$ e $b = 1$, ogni potenza vale 1 e nello sviluppo resta solo la somma dei coefficienti. (è il trucco della dimostrazione)

→ Ma quello sviluppo è $(1 + 1)^n = 2^n$.

→ Quindi la somma della riga n è **2^n** , per ogni n .

→ Verifica su $n = 4$: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$. Torna.

Esercizio 375.

→ I termini sono **$n + 1$** : la riga n ha $n + 1$ numeri, e ogni numero è il coefficiente di un termine.

→ Guardando le righe fino a $n = 6$, i numeri crescono fino al centro e poi calano, in modo simmetrico.

→ Se n è **pari** il massimo è uno solo, proprio in mezzo: per $n = 6$ è 20.

→ Se n è **dispari** i massimi sono *due* uguali, al centro: per $n = 5$ sono i due 10.

9. Espressioni da liceo

Esercizio 376.

→ $(x+3)^2 - (x+2)(x+4) = x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 - (x+2)(x+4)$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

→ $= x^2 + 6x + 9 - (x+2)(x+4)$ (si sommano i termini simili)

→ $= x^2 + 6x + 9 - (x^2 + 4x + 2x + 8)$ (ogni termine per ogni termine)

→ $= x^2 + 6x + 9 - (x^2 + 6x + 8)$ (si sommano i termini simili)

→ $= x^2 + 6x + 9 - x^2 - 6x - 8$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

→ $= 1$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: **1**

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 1 e il risultato dà 1.

Esercizio 377.

→ $(2x-3)(2x+3) - (2x-3)^2 = (2x)^2 - 3^2 - (2x-3)^2$ (somma per differenza: quadrato del primo meno quadrato del secondo)

→ $= 4x^2 - 9 - (2x-3)^2$ (si sommano i termini simili)

→ $= 4x^2 - 9 - ((2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2)$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

→ $= 4x^2 - 9 - (4x^2 - 12x + 9)$ (si sommano i termini simili)

→ $= 4x^2 - 9 - 4x^2 + 12x - 9$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

→ $= 12x - 18$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: **$12x - 18$**

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 6 e il risultato dà 6.

Esercizio 416.

→ $\left([x+1]^2 - [x-1]^2\right)^2 : 16x^2 = (x^2 + 2x + 1 - [x-1]^2)^2 : 16x^2$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

→ $= (x^2 + 2x + 1 - [x^2 - 2x + 1])^2 : 16x^2$

→ $= (x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1)^2 : 16x^2$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

→ $= (4x)^2 : 16x^2$ (si sommano i termini simili)

→ $= 16x^2 : 16x^2$ (l'esponente agisce sul coefficiente e su ogni lettera)

→ $= 1$ (coefficienti divisi, esponenti sottratti)

→ Risultato: **1**

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 1 e il risultato dà 1.

Esercizio 417.

→ $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2) = (x^2 - 1^2)(x+2)(x-2)$ (somma per differenza: quadrato del primo meno quadrato del secondo)

→ $= (x^2 - 1)(x+2)(x-2)$ (si sommano i termini simili)

→ $= (x^3 + 2x^2 - x - 2)(x-2)$ (ogni termine per ogni termine)

→ $= x^4 - 2x^3 + 2x^3 - 4x^2 - x^2 + 2x - 2x + 4$

→ $= x^4 - 5x^2 + 4$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: **$x^4 - 5x^2 + 4$**

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 0 e il risultato dà 0.

Esercizio 418.

→ $(a+b)^2(a-b)^2 = (a^2 + 2a \cdot b + b^2)(a-b)^2$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

→ $= (a^2 + 2ab + b^2)(a-b)^2$ (si sommano i termini simili)

→ $= (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 - 2a \cdot b + b^2)$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

→ $= (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 - 2ab + b^2)$ (si sommano i termini simili)

→ $= a^4 - 2a^3b + a^2b^2 + 2a^3b - 4a^2b^2 + 2ab^3 + a^2b^2 - 2ab^3 + b^4$ (ogni termine per ogni termine)

→ $= a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: **$a^4 - 2a^2b^2 + b^4$**

→ Controllo con $a = 2, b = 2$: l'espressione di partenza dà 0 e il risultato dà 0.

Esercizio 419.

→ $(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1$ (ogni termine per ogni termine)

→ $= x^3 - 1$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: **$x^3 - 1$**

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 7 e il risultato dà 7.

Esercizio 420.

$$\rightarrow (x+2)(x^2-2x+4) = x^3 - 2x^2 + 4x + 2x^2 - 4x + 8 \text{ (ogni termine per ogni termine)}$$

$$\rightarrow = x^3 + 8 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } x^3 + 8$$

$$\rightarrow \text{Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà 16 e il risultato dà 16.}$$

Esercizio 421.

$$\rightarrow ([2a-b]^2 - [2a+b]^2) : (-8ab) = ((2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot b + b^2 - [2a+b]^2) : (-8ab) \text{ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = (4a^2 - 4ab + b^2 - [2a+b]^2) : (-8ab) \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = (4a^2 - 4ab + b^2 - [(2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot b + b^2]) : (-8ab) \text{ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = (4a^2 - 4ab + b^2 - [4a^2 + 4ab + b^2]) : (-8ab) \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = (4a^2 - 4ab + b^2 - 4a^2 - 4ab - b^2) : (-8ab) \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = (-8ab) : (-8ab) \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = 1 \text{ (coefficienti divisi, esponenti sottratti)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } 1$$

$$\rightarrow \text{Controllo con } a = 2, b = 2: \text{ l'espressione di partenza dà 1 e il risultato dà 1.}$$

Esercizio 422.

$$\rightarrow (x+y)^3 - (x-y)^3 - 2y^3 = x^3 + 3x^2 \cdot y + 3x \cdot y^2 + y^3 - (x-y)^3 - 2y^3 \text{ (cubo del primo, tre volte il quadrato del primo per il secondo, tre volte il primo per il quadrato del secondo, cubo del secondo)}$$

$$\rightarrow = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - (x-y)^3 - 2y^3 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - (x^3 - 3x^2 \cdot y + 3x \cdot y^2 - y^3) - 2y^3 \text{ (cubo del primo, tre volte il quadrato del primo per il secondo, tre volte il primo per il quadrato del secondo, cubo del secondo)}$$

$$\rightarrow = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) - 2y^3 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 - 2y^3 \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = 6x^2y + 2y^3 - 2y^3 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = 6x^2y$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } 6x^2y$$

$$\rightarrow \text{Controllo con } x = 2, y = 2: \text{ l'espressione di partenza dà 48 e il risultato dà 48.}$$

Esercizio 423.

$\rightarrow ([x+3]^2 - 9) : x - x = (x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 - 9) : x - x$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

$\rightarrow = (x^2 + 6x + 9 - 9) : x - x$ (si sommano i termini simili)

$\rightarrow = (x^2 + 6x) : x - x$

$\rightarrow = (x^2 : x + 6x : x) - x$ (si divide ogni termine del polinomio)

$\rightarrow = (x + 6) - x$ (si sommano i termini simili)

$\rightarrow = x + 6 - x$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

$\rightarrow = 6$ (si sommano i termini simili)

$\rightarrow$ Risultato: **6**

$\rightarrow$ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 6 e il risultato dà 6.

Esercizio 424.

$\rightarrow \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b\right)^2 - \frac{1}{3}ab = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}b + \left(\frac{1}{3}b\right)^2 - \frac{1}{3}ab$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

$\rightarrow = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}ab + \frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{3}ab$ (si sommano i termini simili)

$\rightarrow = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{9}b^2$

$\rightarrow$ Risultato: **$\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{9}b^2$**

$\rightarrow$ Controllo con $a = 2, b = 2$: l'espressione di partenza dà $\frac{13}{9}$ e il risultato dà $\frac{13}{9}$.

Esercizio 425.

$\rightarrow (2x^2 - 3)^2 - (2x^2 + 3)^2 = (2x^2)^2 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 3 + 3^2 - (2x^2 + 3)^2$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

$\rightarrow = 4x^4 - 12x^2 + 9 - (2x^2 + 3)^2$ (si sommano i termini simili)

$\rightarrow = 4x^4 - 12x^2 + 9 - ((2x^2)^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot 3 + 3^2)$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

$\rightarrow = 4x^4 - 12x^2 + 9 - (4x^4 + 12x^2 + 9)$ (si sommano i termini simili)

$\rightarrow = 4x^4 - 12x^2 + 9 - 4x^4 - 12x^2 - 9$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

$\rightarrow = -24x^2$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $-24x^2$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà -96 e il risultato dà -96 .

Esercizio 426.

→ $(a-1)^3 + 3(a-1)^2 + 3(a-1) + 1 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + 3(a-1)^2 + 3(a-1) + 1$ (cubo del primo, tre volte il quadrato del primo per il secondo, tre volte il primo per il quadrato del secondo, cubo del secondo)

→ $= a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + 3(a^2 - 2a + 1) + 3(a-1) + 1$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

→ $= a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + (3a^2 - 6a + 3) + 3(a-1) + 1$ (ogni termine per ogni termine)

→ $= a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + 3a^2 - 6a + 3 + 3(a-1) + 1$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

→ $= a^3 - 3a + 2 + 3(a-1) + 1$ (si sommano i termini simili)

→ $= a^3 - 3a + 2 + (3a - 3) + 1$ (ogni termine per ogni termine)

→ $= a^3 - 3a + 2 + 3a - 3 + 1$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

→ $= a^3 - 1 + 1$ (si sommano i termini simili)

→ $= a^3$

→ Risultato: a^3

→ Controllo con $a = 2$: l'espressione di partenza dà 8 e il risultato dà 8.

Esercizio 427.

→ $(2x-1)^4 - (2x+1)^4 = (2x)^4 - 4 \cdot (2x)^3 + 6 \cdot (2x)^2 - 4 \cdot 2x + 1 - (2x+1)^4$ (i coefficienti sono la riga del triangolo di Tartaglia, e gli esponenti scendono da n a 0)

→ $= 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1 - (2x+1)^4$ (si sommano i termini simili)

→ $= 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1 - ((2x)^4 + 4 \cdot (2x)^3 + 6 \cdot (2x)^2 + 4 \cdot 2x + 1)$ (i coefficienti sono la riga del triangolo di Tartaglia, e gli esponenti scendono da n a 0)

→ $= 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1 - (16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1)$ (si sommano i termini simili)

→ $= 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1 - 16x^4 - 32x^3 - 24x^2 - 8x - 1$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

→ $= -64x^3 - 16x$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $-64x^3 - 16x$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà -544 e il risultato dà -544 .

Esercizio 428.

$$\rightarrow (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 \text{ (ogni termine per ogni termine)}$$

$$\rightarrow = x^4 + x^2 + 1 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } x^4 + x^2 + 1$$

$$\rightarrow \text{Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà 21 e il risultato dà 21.}$$

Esercizio 429.

$$\rightarrow (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c - 2(ab + ac + bc) \text{ (i quadrati di tutti i termini, più un doppio prodotto per ogni coppia)}$$

$$\rightarrow = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 - 2(ab + ac + bc) \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 - (2ab + 2ac + 2bc) \text{ (ogni termine per ogni termine)}$$

$$\rightarrow = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = a^2 + b^2 + c^2 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } a^2 + b^2 + c^2$$

$$\rightarrow \text{Controllo con } a = 2, b = 2, c = 2: \text{ l'espressione di partenza dà 12 e il risultato dà 12.}$$

Esercizio 430.

$$\rightarrow ([3x - 2]^3 + 8) : x = ((3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 2^2 - 2^3 + 8) : x \text{ (cubo del primo, tre volte il quadrato del primo per il secondo, tre volte il primo per il quadrato del secondo, cubo del secondo)}$$

$$\rightarrow = (27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 + 8) : x \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = (27x^3 - 54x^2 + 36x) : x$$

$$\rightarrow = 27x^3 : x - 54x^2 : x + 36x : x \text{ (si divide ogni termine del polinomio)}$$

$$\rightarrow = 27x^2 - 54x + 36 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } 27x^2 - 54x + 36$$

$$\rightarrow \text{Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà 36 e il risultato dà 36.}$$

Esercizio 431.

$$\rightarrow (x - 3)^2 (x + 3)^2 = (x^2 - 2x \cdot 3 + 3^2) (x + 3)^2 \text{ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = (x^2 - 6x + 9) (x + 3)^2 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = (x^2 - 6x + 9)(x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2) \text{ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = (x^2 - 6x + 9)(x^2 + 6x + 9) \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 6x^3 - 36x^2 - 54x + 9x^2 + 54x + 81 \text{ (ogni termine per ogni termine)}$$

$$\rightarrow = x^4 - 18x^2 + 81 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } \mathbf{x^4 - 18x^2 + 81}$$

$$\rightarrow \text{ Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà 25 e il risultato dà 25.}$$

Esercizio 432.

$$\rightarrow (2a + 3b)^3 - 27b^3 - 8a^3 = (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a \cdot (3b)^2 + (3b)^3 - 27b^3 - 8a^3 \text{ (cubo del primo, tre volte il quadrato del primo per il secondo, tre volte il primo per il quadrato del secondo, cubo del secondo)}$$

$$\rightarrow = 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3 - 27b^3 - 8a^3 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 - 8a^3$$

$$\rightarrow = 36a^2b + 54ab^2$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } \mathbf{36a^2b + 54ab^2}$$

$$\rightarrow \text{ Controllo con } a = 2, b = 2: \text{ l'espressione di partenza dà 720 e il risultato dà 720.}$$

Esercizio 433.

$$\rightarrow ([x + 1]^2 - [x - 1]^2)(x^2 - 1) = (x^2 + 2x + 1 - [x - 1]^2)(x^2 - 1) \text{ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = (x^2 + 2x + 1 - [x^2 - 2x + 1])(x^2 - 1)$$

$$\rightarrow = (x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1)(x^2 - 1) \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = 4x(x^2 - 1) \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = 4x^3 - 4x \text{ (ogni termine per ogni termine)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } \mathbf{4x^3 - 4x}$$

$$\rightarrow \text{ Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà 24 e il risultato dà 24.}$$

Esercizio 434.

$$\rightarrow (1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) = (-x + 1)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = (-x + 1)(x + 1)(1 + x^2)(1 + x^4)$$

$$\rightarrow = (-x^2 - x + x + 1)(1 + x^2)(1 + x^4) \text{ (ogni termine per ogni termine)}$$

$$\rightarrow = (-x^2 + 1)(1 + x^2)(1 + x^4) \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = (-x^2 + 1)(x^2 + 1)(1 + x^4)$$

$$\rightarrow = (-x^4 - x^2 + x^2 + 1)(1 + x^4) \text{ (ogni termine per ogni termine)}$$

$$\rightarrow = (-x^4 + 1)(1 + x^4) \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = (-x^4 + 1)(x^4 + 1)$$

$$\rightarrow = -x^8 - x^4 + x^4 + 1 \text{ (ogni termine per ogni termine)}$$

$$\rightarrow = -x^8 + 1 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } -x^8 + 1$$

$$\rightarrow \text{ Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà } -255 \text{ e il risultato dà } -255.$$

Esercizio 435.

$$\rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \text{ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = x^2 + x + \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = x^2 + x + \frac{1}{4} - \left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \text{ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = x^2 + x + \frac{1}{4} - \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = x^2 + x + \frac{1}{4} - x^2 + x - \frac{1}{4} \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = 2x \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } 2x$$

$$\rightarrow \text{ Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà } 4 \text{ e il risultato dà } 4.$$

Esercizio 436.

$$\rightarrow \left([a + 2b]^2 - [a - 2b]^2\right) : 8b - a = \left(a^2 + 2a \cdot 2b + (2b)^2 - [a - 2b]^2\right) : 8b - a \text{ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = \left(a^2 + 4ab + 4b^2 - [a - 2b]^2\right) : 8b - a \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = \left(a^2 + 4ab + 4b^2 - [a^2 - 2a \cdot 2b + (2b)^2]\right) : 8b - a \text{ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = \left(a^2 + 4ab + 4b^2 - [a^2 - 4ab + 4b^2]\right) : 8b - a \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = \left(a^2 + 4ab + 4b^2 - a^2 + 4ab - 4b^2\right) : 8b - a \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = 8ab : 8b - a \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = a - a \text{ (coefficienti divisi, esponenti sottratti)}$$

$$\rightarrow = 0 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } 0$$

$$\rightarrow \text{ Controllo con } a = 2, b = 2: \text{ l'espressione di partenza dà } 0 \text{ e il risultato dà } 0.$$

Esercizio 437.

$$\rightarrow (3x^2 - 2y)^2 + 12x^2y = (3x^2)^2 - 2 \cdot 3x^2 \cdot 2y + (2y)^2 + 12x^2y \text{ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = 9x^4 - 12x^2y + 4y^2 + 12x^2y \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = 9x^4 + 4y^2$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } 9x^4 + 4y^2$$

$$\rightarrow \text{ Controllo con } x = 2, y = 2: \text{ l'espressione di partenza dà } 160 \text{ e il risultato dà } 160.$$

Esercizio 438.

$$\rightarrow (x - 1)^3 + 3x^2 - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 1 \text{ (cubo del primo, tre volte il quadrato del primo per il secondo, tre volte il primo per il quadrato del secondo, cubo del secondo)}$$

$$\rightarrow = x^3 + 3x - 1 - 1 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = x^3 + 3x - 2$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } x^3 + 3x - 2$$

$$\rightarrow \text{ Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà } 12 \text{ e il risultato dà } 12.$$

Esercizio 439.

$$\rightarrow (2m + n)^2 (2m - n)^2 - 16m^4 = ((2m)^2 + 2 \cdot 2m \cdot n + n^2) (2m - n)^2 - 16m^4 \text{ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = (4m^2 + 4mn + n^2) (2m - n)^2 - 16m^4 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = (4m^2 + 4mn + n^2) ((2m)^2 - 2 \cdot 2m \cdot n + n^2) - 16m^4 \text{ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = (4m^2 + 4mn + n^2) (4m^2 - 4mn + n^2) - 16m^4 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = 16m^4 - 16m^3n + 4m^2n^2 + 16m^3n - 16m^2n^2 + 4mn^3 + 4m^2n^2 - 4mn^3 + n^4 - 16m^4 \text{ (ogni termine per ogni termine)}$$

$$\rightarrow = 16m^4 - 8m^2n^2 + n^4 - 16m^4 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = -8m^2n^2 + n^4$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } -8m^2n^2 + n^4$$

$\rightarrow$ Controllo con $m = 2, n = 2$: l'espressione di partenza dà -112 e il risultato dà -112 .

Esercizio 440.

$$\rightarrow (a^2 + 2a + 1) - (a + 1)(a - 1) - 2a = (a^2 + 2a + 1) - (a^2 - 1^2) - 2a \text{ (somma per differenza: quadrato del primo meno quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = (a^2 + 2a + 1) - (a^2 - 1) - 2a \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = a^2 + 2a + 1 - a^2 + 1 - 2a \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = 2a + 2 - 2a \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = 2$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } 2$$

$\rightarrow$ Controllo con $a = 2$: l'espressione di partenza dà 2 e il risultato dà 2.

Esercizio 441.

$$\rightarrow ([x + y]^2 + [x - y]^2) : 2 = (x^2 + 2x \cdot y + y^2 + [x - y]^2) : 2 \text{ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = (x^2 + 2xy + y^2 + [x - y]^2) : 2 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = (x^2 + 2xy + y^2 + [x^2 - 2x \cdot y + y^2]) : 2 \text{ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = (x^2 + 2xy + y^2 + [x^2 - 2xy + y^2]) : 2 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = (x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2) : 2 \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = (2x^2 + 2y^2) : 2 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = 2x^2 : 2 + 2y^2 : 2 \text{ (si divide ogni termine del polinomio)}$$

$$\rightarrow = x^2 + y^2 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } x^2 + y^2$$

$\rightarrow$ Controllo con $x = 2, y = 2$: l'espressione di partenza dà 8 e il risultato dà 8.

Esercizio 442.

$$\rightarrow (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x^3)^2 - 1^2 \text{ (somma per differenza: quadrato del primo meno quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = x^6 - 1 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } x^6 - 1$$

$$\rightarrow \text{ Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà 63 e il risultato dà 63.}$$

Esercizio 443.

$$\rightarrow \left(\frac{1}{3}x - 1\right)^3 \cdot 27 = \left(\left(\frac{1}{3}x\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}x\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{3}x - 1\right) \cdot 27 \text{ (cubo del primo, tre volte il quadrato del primo per il secondo, tre volte il primo per il quadrato del secondo, cubo del secondo)}$$

$$\rightarrow = \left(\frac{1}{27}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + x - 1\right) \cdot 27 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 \text{ (ogni termine per ogni termine)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } x^3 - 9x^2 + 27x - 27$$

$$\rightarrow \text{ Controllo con } x = 2: \text{ l'espressione di partenza dà } -1 \text{ e il risultato dà } -1.$$

Esercizio 444.

$$\rightarrow (2x + y - 1)^2 - (2x + y)^2 + 2(2x + y) = (2x)^2 + y^2 + 1^2 + 2 \cdot 2x \cdot y - 2 \cdot 2x - 2 \cdot y - (2x + y)^2 + 2(2x + y) \text{ (i quadrati di tutti i termini, più un doppio prodotto per ogni coppia)}$$

$$\rightarrow = 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 - (2x + y)^2 + 2(2x + y) \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 - \left((2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2\right) + 2(2x + y) \text{ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 - (4x^2 + 4xy + y^2) + 2(2x + y) \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 - 4x^2 - 4xy - y^2 + 2(2x + y) \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = -4x - 2y + 1 + 2(2x + y) \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = -4x - 2y + 1 + (4x + 2y) \text{ (ogni termine per ogni termine)}$$

$$\rightarrow = -4x - 2y + 1 + 4x + 2y \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = 1 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } 1$$

$$\rightarrow \text{ Controllo con } x = 2, y = 2: \text{ l'espressione di partenza dà 1 e il risultato dà 1.}$$

Esercizio 445.

$\rightarrow (a+b)^4 - (a-b)^4 = a^4 + 4a^3 \cdot b + 6a^2 \cdot b^2 + 4a \cdot b^3 + b^4 - (a-b)^4$ (i coefficienti sono la riga del triangolo di Tartaglia, e gli esponenti scendono da n a 0)

$\rightarrow = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 - (a-b)^4$ (si sommano i termini simili)

$\rightarrow = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 - (a^4 - 4a^3 \cdot b + 6a^2 \cdot b^2 - 4a \cdot b^3 + b^4)$ (i coefficienti sono la riga del triangolo di Tartaglia, e gli esponenti scendono da n a 0)

$\rightarrow = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 - (a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4)$ (si sommano i termini simili)

$\rightarrow = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 - a^4 + 4a^3b - 6a^2b^2 + 4ab^3 - b^4$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

$\rightarrow = 8a^3b + 8ab^3$ (si sommano i termini simili)

$\rightarrow$ Risultato: $8a^3b + 8ab^3$

$\rightarrow$ Controllo con $a = 2, b = 2$: l'espressione di partenza dà 256 e il risultato dà 256.

Esercizio 446.

$\rightarrow x(x+1)(x+2) - x^3 - 3x^2 = (x^2+x)(x+2) - x^3 - 3x^2$ (ogni termine per ogni termine)

$\rightarrow = x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x - x^3 - 3x^2$

$\rightarrow = x^3 + 3x^2 + 2x - x^3 - 3x^2$ (si sommano i termini simili)

$\rightarrow = 3x^2 + 2x - 3x^2$

$\rightarrow = 2x$

$\rightarrow$ Risultato: $2x$

$\rightarrow$ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 4 e il risultato dà 4.

Esercizio 447.

$\rightarrow (x^2 - 2x)^2 - x^2(x-2)^2 = (x^2)^2 - 2x^2 \cdot 2x + (2x)^2 - x^2(x-2)^2$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

$\rightarrow = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x^2(x-2)^2$ (si sommano i termini simili)

$\rightarrow = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x^2(x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2)$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

$\rightarrow = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x^2(x^2 - 4x + 4)$ (si sommano i termini simili)

$\rightarrow = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - (x^4 - 4x^3 + 4x^2)$ (ogni termine per ogni termine)

$\rightarrow = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

$\rightarrow = 0$ (si sommano i termini simili)

$\rightarrow$ Risultato: 0

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 0 e il risultato dà 0.

Esercizio 448.

→ $(3a - 1)(3a + 1)(9a^2 + 1) = ((3a)^2 - 1^2)(9a^2 + 1)$ (somma per differenza: quadrato del primo meno quadrato del secondo)

→ $= (9a^2 - 1)(9a^2 + 1)$ (si sommano i termini simili)

→ $= (9a^2)^2 - 1^2$ (somma per differenza: quadrato del primo meno quadrato del secondo)

→ $= 81a^4 - 1$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: **$81a^4 - 1$**

→ Controllo con $a = 2$: l'espressione di partenza dà 1295 e il risultato dà 1295.

Esercizio 449.

→ $([2x - 3]^2 - [2x - 3][2x + 3]) : 6 = ((2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 - [2x - 3][2x + 3]) : 6$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

→ $= (4x^2 - 12x + 9 - [2x - 3][2x + 3]) : 6$ (si sommano i termini simili)

→ $= (4x^2 - 12x + 9 - [(2x)^2 - 3^2]) : 6$ (somma per differenza: quadrato del primo meno quadrato del secondo)

→ $= (4x^2 - 12x + 9 - [4x^2 - 9]) : 6$ (si sommano i termini simili)

→ $= (4x^2 - 12x + 9 - 4x^2 + 9) : 6$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

→ $= (-12x + 18) : 6$ (si sommano i termini simili)

→ $= -12x : 6 + 18 : 6$ (si divide ogni termine del polinomio)

→ $= -2x + 3$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: **$-2x + 3$**

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà -1 e il risultato dà -1 .

Esercizio 450.

→ $(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - 3a^2 \cdot b + 3a \cdot b^2 - b^3 + 3ab(a - b)$ (cubo del primo, tre volte il quadrato del primo per il secondo, tre volte il primo per il quadrato del secondo, cubo del secondo)

→ $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3ab(a - b)$ (si sommano i termini simili)

→ $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + (3a^2b - 3ab^2)$ (ogni termine per ogni termine)

→ $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3a^2b - 3ab^2$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

$$\rightarrow = a^3 - b^3 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } a^3 - b^3$$

$\rightarrow$ Controllo con $a = 2, b = 2$: l'espressione di partenza dà 0 e il risultato dà 0.

Esercizio 451.

$$\rightarrow (x+2)^3 - (x+2)^2(x-1) = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 - (x+2)^2(x-1) \text{ (cubo del primo, tre volte il quadrato del primo per il secondo, tre volte il primo per il quadrato del secondo, cubo del secondo)}$$

$$\rightarrow = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - (x+2)^2(x-1) \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - (x^2 + 2x \cdot 2 + 2^2)(x-1) \text{ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)}$$

$$\rightarrow = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - (x^2 + 4x + 4)(x-1) \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - (x^3 - x^2 + 4x^2 - 4x + 4x - 4) \text{ (ogni termine per ogni termine)}$$

$$\rightarrow = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - (x^3 + 3x^2 - 4) \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 - 3x^2 + 4 \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = 3x^2 + 12x + 12 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } 3x^2 + 12x + 12$$

$\rightarrow$ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 48 e il risultato dà 48.

Esercizio 452.

$$\rightarrow (2-x)^4 - (x-2)^4 = (-x+2)^4 - (x-2)^4 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = x^4 - 4x^3 \cdot 2 + 6x^2 \cdot 2^2 - 4x \cdot 2^3 + 2^4 - (x-2)^4 \text{ (i coefficienti sono la riga del triangolo di Tartaglia, e gli esponenti scendono da n a 0)}$$

$$\rightarrow = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 - (x-2)^4 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 - (x^4 - 4x^3 \cdot 2 + 6x^2 \cdot 2^2 - 4x \cdot 2^3 + 2^4) \text{ (i coefficienti sono la riga del triangolo di Tartaglia, e gli esponenti scendono da n a 0)}$$

$$\rightarrow = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 - (x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16) \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 - x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 32x - 16 \text{ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)}$$

$$\rightarrow = 0 \text{ (si sommano i termini simili)}$$

$$\rightarrow \text{ Risultato: } 0$$

$\rightarrow$ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 0 e il risultato dà 0.

Esercizio 453.

→ $(x+y)^2 - 2(x+y)(x-y) + (x-y)^2 = x^2 + 2x \cdot y + y^2 - 2(x+y)(x-y) + (x-y)^2$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

→ $= x^2 + 2xy + y^2 - 2(x+y)(x-y) + (x-y)^2$ (si sommano i termini simili)

→ $= x^2 + 2xy + y^2 - (2x+2y)(x-y) + (x-y)^2$ (ogni termine per ogni termine)

→ $= x^2 + 2xy + y^2 - (2x^2 - 2xy + 2xy - 2y^2) + (x-y)^2$

→ $= x^2 + 2xy + y^2 - (2x^2 - 2y^2) + (x-y)^2$ (si sommano i termini simili)

→ $= x^2 + 2xy + y^2 - 2x^2 + 2y^2 + (x-y)^2$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

→ $= -x^2 + 2xy + 3y^2 + (x-y)^2$ (si sommano i termini simili)

→ $= -x^2 + 2xy + 3y^2 + (x^2 - 2x \cdot y + y^2)$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

→ $= -x^2 + 2xy + 3y^2 + (x^2 - 2xy + y^2)$ (si sommano i termini simili)

→ $= -x^2 + 2xy + 3y^2 + x^2 - 2xy + y^2$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

→ $= 4y^2$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: $4y^2$

→ Controllo con $x = 2, y = 2$: l'espressione di partenza dà 16 e il risultato dà 16.

Esercizio 454.

→ $(5a+2b)(5a-2b) - (5a-2b)^2 - 4b(5a-2b) = (5a)^2 - (2b)^2 - (5a-2b)^2 - 4b(5a-2b)$ (somma per differenza: quadrato del primo meno quadrato del secondo)

→ $= 25a^2 - 4b^2 - (5a-2b)^2 - 4b(5a-2b)$ (si sommano i termini simili)

→ $= 25a^2 - 4b^2 - ((5a)^2 - 2 \cdot 5a \cdot 2b + (2b)^2) - 4b(5a-2b)$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

→ $= 25a^2 - 4b^2 - (25a^2 - 20ab + 4b^2) - 4b(5a-2b)$ (si sommano i termini simili)

→ $= 25a^2 - 4b^2 - 25a^2 + 20ab - 4b^2 - 4b(5a-2b)$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

→ $= 20ab - 8b^2 - 4b(5a-2b)$ (si sommano i termini simili)

→ $= 20ab - 8b^2 - (20ab - 8b^2)$ (ogni termine per ogni termine)

→ $= 20ab - 8b^2 - 20ab + 8b^2$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

→ $= 0$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: 0

→ Controllo con $a = 2, b = 2$: l'espressione di partenza dà 0 e il risultato dà 0.

Esercizio 455.

→ $\left([x+1]^3 - [x-1]^3 - 2\right) : 6x = \left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - [x-1]^3 - 2\right) : 6x$ (cubo del primo, tre volte il quadrato del primo per il secondo, tre volte il primo per il quadrato del secondo, cubo del secondo)

→ $= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - [x^3 - 3x^2 + 3x - 1] - 2) : 6x$

→ $= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 2) : 6x$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

→ $= (6x^2 + 2 - 2) : 6x$ (si sommano i termini simili)

→ $= 6x^2 : 6x$

→ $= x$ (coefficienti divisi, esponenti sottratti)

→ Risultato: x

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 2 e il risultato dà 2.

10. Valore numerico, geometria, dimostrazioni**Esercizio 456.**

→ Sostituisco, mettendo fra parentesi i valori negativi e frazionari: $2 \cdot (-2)^3 - (-2)^2 + 5$. (le parentesi non sono facoltative)

→ Prima le potenze, poi i prodotti, poi le somme: **-15**.

Esercizio 457.

→ Sostituisco, mettendo fra parentesi i valori negativi e frazionari: $3^2 - 3 \cdot 3 + 1$.

→ Prima le potenze, poi i prodotti, poi le somme: **1**.

Esercizio 468.

→ L'area di un quadrato di lato $x + 3$. (prima la formula, poi il calcolo)

→ $(x + 3)^2 = x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

→ $= x^2 + 6x + 9$ (si sommano i termini simili)

→ Risultato: **$x^2 + 6x + 9$**

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 25 e il risultato dà 25.

Esercizio 469.

→ Il perimetro dello stesso quadrato. (prima la formula, poi il calcolo)

→ $4(x + 3) = 4x + 12$ (ogni termine per ogni termine)

→ Risultato: $4x + 12$

→ Controllo con $x = 2$: l'espressione di partenza dà 20 e il risultato dà 20.

Esercizio 473.

→ $(x + 3)^2 - (x + 2)(x + 4) = x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 - (x + 2)(x + 4)$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

→ $= x^2 + 6x + 9 - (x + 2)(x + 4)$ (si sommano i termini simili)

→ $= x^2 + 6x + 9 - (x^2 + 4x + 2x + 8)$ (ogni termine per ogni termine)

→ $= x^2 + 6x + 9 - (x^2 + 6x + 8)$ (si sommano i termini simili)

→ $= x^2 + 6x + 9 - x^2 - 6x - 8$ (si sciolgono le parentesi: dopo un meno tutti i segni cambiano)

→ $= 1$ (si sommano i termini simili)

→ Prima si semplifica: l'espressione vale 1. (molti meno conti che sostituendo subito)

→ Sostituisco, mettendo fra parentesi i valori negativi e frazionari: 1.

→ Prima le potenze, poi i prodotti, poi le somme: 1.

Esercizio 474.

→ $(2x - 1)^2 - 4x^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x + 1 - 4x^2$ (quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo)

→ $= 4x^2 - 4x + 1 - 4x^2$ (si sommano i termini simili)

→ $= -4x + 1$

→ Prima si semplifica: l'espressione vale $-4x + 1$.

→ Sostituisco, mettendo fra parentesi i valori negativi e frazionari: $-4 \cdot (-3) + 1$.

→ Prima le potenze, poi i prodotti, poi le somme: 13.

Esercizio 483.

→ Il primo e l'ultimo termine devono essere quadrati: x^2 è il quadrato di x , 9 di 3.

→ Il doppio prodotto atteso è $2 \cdot x \cdot 3$.

→ Coincide col termine centrale $6x$: il trinomio è $(x + 3)^2$.

→ Controllo: risviluppando torna $x^2 + 6x + 9$.

Esercizio 484.

→ Il primo e l'ultimo termine devono essere quadrati: x^2 è il quadrato di x , 25 di 5.

→ Il doppio prodotto atteso è $2 \cdot x \cdot 5$.

→ Coincide col termine centrale $-10x$: il trinomio è $(x - 5)^2$.

→ Controllo: risviluppando torna $x^2 - 10x + 25$.

Esercizio 491.

→ L'area col lato $x + 4$ è $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$.

→ Col lato $x + 5$ diventa $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$.

→ L'aumento è la differenza: $x^2 + 10x + 25 - x^2 - 8x - 16 = 2x + 9$. (si sottraggono i due polinomi)

→ L'aumento **dipende da** x : non è una quantità fissa. Con $x = 1$ l'area passa da 25 a 36, cioè +11, e infatti $2 + 9 = 11$.

Esercizio 492.

→ Il primo numero è n ; i tre consecutivi sono $n, n + 1, n + 2$. (si scrive il generico, non un esempio)

→ La somma è $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$.

→ Si raccoglie il 3: $3n + 3 = 3(n + 1)$.

→ È 3 per un numero intero, quindi è divisibile per 3 *sempre*, non solo negli esempi.

Esercizio 493.

→ Si sviluppano i due quadrati: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

→ La differenza: $a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$. (attenzione ai segni della seconda parentesi)

→ $4ab$ è 4 per un prodotto di interi: divisibile per 4 sempre.

→ Controllo con $a = 3, b = 2$: $25 - 1 = 24$, e $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Torna.

Esercizio 494.

- L'area è il prodotto dei lati: $(x + 2)(x - 2)$.
 - Sono due binomi coniugati, quindi $x^2 - 4$. (somma per differenza)
 - Perché il problema abbia senso servono lati **positivi**: $x + 2 > 0$ e $x - 2 > 0$.
 - La seconda è la più stretta: serve $x > 2$. (un lato negativo non esiste)
-

Esercizio 495.

- Sviluppando, $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$: la differenza con $x^2 + y^2$ è il doppio prodotto $2xy$.
 - Le due scritture coincidono quando $2xy = 0$, cioè quando $xy = 0$.
 - Quindi **vero**: succede se $x = 0$, oppure se $y = 0$, oppure entrambi.
 - Esempio: con $x = 5$ e $y = 0$, $(5 + 0)^2 = 25 = 5^2 + 0^2$.
 - Attenzione: questo non salva la formula sbagliata. Vale per due valori particolari, non come regola. (è la differenza fra un caso e una legge)
-

Esercizio 496.

- $4x^2 - 9$ è la differenza di due quadrati: è il risultato di $(2x - 3)(2x + 3)$, non di $(2x - 3)^2$. (sono state scambiate due formule)
 - Nel quadrato i due fattori sono *uguali*, e il doppio prodotto non si elide.
 - $(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$
 - Controllo con $x = 1$: $(2 - 3)^2 = 1$, e $4 - 12 + 9 = 1$. Invece $4 - 9 = -5$: impossibile per un quadrato.
-

Esercizio 497.

- Un dispari qualunque si scrive $2n + 1$, con n intero.
 - Il suo quadrato: $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$. (quadrato di binomio, doppio prodotto compreso)
 - Si raccoglie il 2 nei primi due termini: $2(2n^2 + 2n) + 1$.
 - È «un numero pari più 1», quindi dispari — per ogni n .
 - Controllo con $n = 3$: il dispari è 7, e $49 = 4 \cdot 9 + 12 + 1$. Torna.
-

Esercizio 498.

→ Perché sia un quadrato di binomio serve che x^2 e 9 siano i quadrati dei due termini: il primo è x , il secondo 3 oppure -3 .

→ Il termine centrale deve essere il doppio prodotto: $2 \cdot x \cdot 3 = 6x$, oppure $2 \cdot x \cdot (-3) = -6x$.

→ Quindi **$k = 6$** (e si ha $(x + 3)^2$) oppure **$k = -6$** (e si ha $(x - 3)^2$). (due soluzioni, non una)

→ Controllo: $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ e $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$. Torna.

Esercizio 499.

→ L'area che resta è la differenza fra le due aree: $x^2 - 9$.

→ x^2 e 9 sono quadrati, e fra loro c'è un meno: è una differenza di quadrati, cioè una somma per differenza letta al contrario. (è il ponte verso la scomposizione)

→ $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

→ Controllo: risviluppando, $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$. Torna. E il problema ha senso per $x > 3$.

Esercizio 500.

→ Il numero è n , il suo precedente è $n - 1$.

→ La differenza dei quadrati: $n^2 - (n - 1)^2$.

→ Si sviluppa il quadrato: $n^2 - (n^2 - 2n + 1) = n^2 - n^2 + 2n - 1 = \mathbf{2n - 1}$. (il meno davanti alla parentesi cambia tutti i segni)

→ $2n$ è pari, quindi $2n - 1$ è dispari: sempre.

→ Controllo con $n = 7$: $49 - 36 = 13$, e $2 \cdot 7 - 1 = 13$. Torna.
