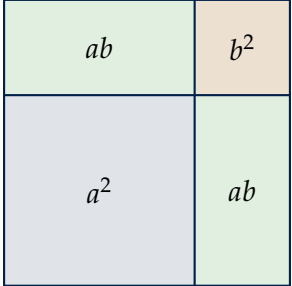


I POLINOMI

ALGEBRA

Operazioni, prodotti notevoli,
triangolo di Tartaglia, espressioni



The diagram shows a large square divided into four smaller regions by a vertical line and a horizontal line. The top-left region is light green and labeled ab . The top-right region is light orange and labeled b^2 . The bottom-left region is light blue and labeled a^2 . The bottom-right region is light green and labeled ab . Below the square, a horizontal line with arrows at both ends is divided into two segments. The left segment is labeled a and the right segment is labeled b . Below this line, the equation $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ is written.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima di partire	3
2	Che cos'è un polinomio	3
3	Ordinato, completo, omogeneo	5
4	Somme algebriche di polinomi	5
5	Monomio per polinomio, e divisione per un monomio	6
6	Prodotto di due polinomi	7
7	Somma per differenza	9
8	Il quadrato di un binomio (e di un trinomio)	10
9	Il cubo di un binomio	12
10	La potenza di un binomio: il triangolo di Tartaglia	13
11	Espressioni con i polinomi	14
12	Valore numerico, geometria e i prodotti notevoli al contrario	15

1 Cosa serve prima di partire

Un polinomio è una somma di monomi, quindi tutto quello che si fa qui è fatto di operazioni fra monomi. Un errore sui polinomi, nove volte su dieci, è un errore sui monomi con più termini attorno.

Cosa devi già sapere

- **Le operazioni fra monomi.** Prodotto: coefficienti moltiplicati, esponenti sommati ($3a^2 \cdot 2a = 6a^3$). Quoziente: coefficienti divisi, esponenti sottratti ($6x^3 : 2x = 3x^2$). Potenza: l'esponente agisce su tutto ($(2a)^3 = 8a^3$).
- **Monomi simili.** Si sommano solo quelli con la stessa parte letterale, e si sommano i coefficienti: $3x^2 + 5x^2 = 8x^2$, mai $8x^4$.
- **Il meno davanti a una parentesi** cambia il segno di *ogni* termine: $-(3a - 2b) = -3a + 2b$.
- **Le frazioni.** I coefficienti sono spesso frazionari: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$, semplificando in croce prima di moltiplicare.

Esempio Svolto 1.1: Riscaldamento: quattro conti da rifare adesso:

1. Prodotto di monomi.

$$(-3x^2y) \cdot 2xy^3 = -6x^3y^4$$

2. Quoziente di monomi.

$$12a^4b^2 : (-4a^2b) = -3a^2b$$

3. Potenza di un monomio.

$$(-2x^3)^2 = 4x^6$$

4. Parentesi col meno davanti.

$$5x - (2x - 7) = 5x - 2x + 7 = 3x + 7$$

Se il quarto è venuto $3x - 7$, il capitolo va letto con calma: quel segno torna in ogni pagina.

2 Che cos'è un polinomio

Con i monomi si scrive il perimetro di un quadrato (4ℓ), ma non l'area di questa figura: un quadrato di lato a con accanto un rettangolo $a \times b$. L'area è $a^2 + ab$, e a^2 e ab non sono simili: la somma resta scritta. Quella somma è un polinomio.

Formula 2.1: Polinomio: Un **polinomio** è una somma algebrica di monomi. Ogni monomio è un **termine** del polinomio.

$$3x^2 - 5x + 2 \quad a^2 + 2ab + b^2 \quad x^3 - 1$$

Con due termini si chiama **binomio**, con tre **trinomio**. Un monomio da solo è un polinomio con un termine.

Formula 2.2: Forma normale, grado, termine noto: Un polinomio è in **forma normale** quando tutti i termini simili sono stati sommati e ogni monomio è in forma normale.

- Il **grado** è il grado *più alto* fra i suoi termini.
- Il **grado relativo** a una lettera è il massimo esponente con cui quella lettera compare.
- Il **termine noto** è il termine senza lettere. Se non c'è, il termine noto è 0.

Il polinomio nullo, cioè lo zero, non ha grado.

Esempio Svolto 2.1: Forma normale e grado di $2x^2y - 3xy^2 + x^2y + 5$:

1. Si cercano i termini simili. $2x^2y$ e x^2y hanno la stessa parte letterale: si sommano.

$$2x^2y + x^2y = 3x^2y$$

2. Forma normale.

$$3x^2y - 3xy^2 + 5$$

3. Il **grado**. I gradi dei tre termini sono 3, 3 e 0: il grado del polinomio è il massimo, cioè 3.

4. I **gradi relativi**. Rispetto a x è 2; rispetto a y è 2.

5. Il **termine noto** è 5.

6. **Controllo con un numero**, $x = y = 1$: il polinomio di partenza vale $2 - 3 + 1 + 5 = 5$, la forma normale vale $3 - 3 + 5 = 5$. Torna.

Il grado non è il numero dei termini

$3x^2 - 5x + 2$ ha tre termini e grado 2: le due cose non c'entrano niente fra loro.

E il grado non è la somma dei gradi dei termini: si prende il massimo. In $x^3 + x^2 + x$ il grado è 3, non 6.

3 Ordinato, completo, omogeneo

Formula 3.1: Le tre parole: Rispetto a una lettera, un polinomio è

- **ordinato** se i termini sono scritti con le potenze di quella lettera in ordine decrescente;
- **completo** se ci sono tutte le potenze, dal grado del polinomio fino a x^0 (il termine noto), senza buchi;
- **omogeneo** se tutti i termini hanno lo stesso grado.

Ordinare si può sempre; completare no: se un termine manca, manca.

Esempio Svolto 3.1: Ordinare e completare $3 - 2x^3 + x$:

1. Si **ordina** secondo le potenze decrescenti di x .

$$-2x^3 + x + 3$$

2. È **completo**? I gradi presenti sono 3, 1, 0: manca il grado 2, quindi **non** è completo.

3. Si può **scrivere completo** mettendo il termine che manca con coefficiente zero, quando serve per fare i conti in colonna:

$$-2x^3 + 0x^2 + x + 3$$

4. È **omogeneo**? No: i termini hanno gradi diversi. Un polinomio omogeneo è per esempio $a^2 + 2ab + b^2$, dove ogni termine ha grado 2.

A cosa serve ordinare

A tre cose, tutte più avanti: la divisione fra polinomi, la regola di Ruffini e il riconoscimento dei prodotti notevoli. In un polinomio ordinato il primo e l'ultimo termine si vedono a occhio, e sono quelli che si guardano per capire se c'è un quadrato di binomio.

Da qui in poi, in questi appunti, i polinomi si scrivono sempre ordinati per potenze decrescenti.

4 Somme algebriche di polinomi

Formula 4.1: Come si sommano: Si sciolgono le parentesi e si sommano i termini simili. Una parentesi con il **più** davanti si toglie e non cambia niente. Una parentesi con il **meno** davanti, togliendola, cambia il segno di *tutti* i suoi termini.

Il grado della somma è al massimo il grado più alto dei due addendi: può abbassarsi, se i termini di grado massimo si elidono.

Esempio Svolto 4.1: $(2x^2 - 3x + 1) - (x^2 - 3x - 4)$:

1. Si sciolgono le parentesi. La seconda ha il meno davanti: tre segni da cambiare.

$$2x^2 - 3x + 1 - x^2 + 3x + 4$$

2. Si sommano i simili. In x^2 : $2x^2 - x^2 = x^2$. In x : $-3x + 3x = 0$, spariscono. Termini noti: $1 + 4 = 5$.

$$x^2 + 5$$

3. Controllo con un numero, $x = 2$: a sinistra $(8 - 6 + 1) - (4 - 6 - 4) = 3 - (-6) = 9$; a destra $4 + 5 = 9$. Torna.

Il meno davanti alla parentesi cambia tutti i segni

$$-(x^2 - 3x + 1) = -x^2 + 3x - 1$$

Non $-x^2 - 3x + 1$: cambiare solo il primo segno è l'errore più diffuso di tutta l'algebra del biennio.

Il motivo: il meno vale -1 che moltiplica la parentesi, e la moltiplicazione tocca ogni termine. Controllo con $x = 1$: $-(1 - 3 + 1) = +1$, e $-1 + 3 - 1 = 1$. Torna.

5 Monomio per polinomio, e divisione per un monomio

Formula 5.1: Proprietà distributiva: Si moltiplica il monomio per **ogni** termine del polinomio:

$$c \cdot (A + B + C) = cA + cB + cC$$

Per dividere un polinomio per un monomio si fa la stessa cosa: si divide ogni termine.

$$(A + B) : c = A : c + B : c$$

Il risultato è un polinomio solo se *ogni* termine è divisibile; altrimenti compaiono lettere al denominatore e si esce dai polinomi.

Esempio Svolto 5.1: $-2a(3a^2 - a + 4)$ e $(6x^3 - 4x^2 + 2x) : 2x$:

1. Il prodotto. Il monomio $-2a$ moltiplica tutti e tre i termini, segni compresi.

$$(-2a)(3a^2) = -6a^3 \quad (-2a)(-a) = +2a^2 \quad (-2a)(4) = -8a$$

$$-6a^3 + 2a^2 - 8a$$

2. La divisione. Ogni termine diviso $2x$:

$$6x^3 : 2x = 3x^2 \quad -4x^2 : 2x = -2x \quad 2x : 2x = 1$$

$$3x^2 - 2x + 1$$

3. Controllo della divisione, che si fa sempre moltiplicando:

$$2x(3x^2 - 2x + 1) = 6x^3 - 4x^2 + 2x$$

È il polinomio di partenza. Torna.

Nella divisione si divide *ogni* termine

$$(6x^3 - 4x^2 + 2x) : 2x = 3x^2 - 2x + 1$$

L'ultimo termine dà 1, non 0 e non niente: $2x : 2x = 1$. Il termine che si dimentica è quasi sempre quello, perché «sembra sparire».

E attenzione al caso opposto: $(x^2 + 3) : x$ **non** è un polinomio, perché $3 : x$ non lo è.

6 Prodotto di due polinomi

Formula 6.1: Ogni termine per ogni termine: Si moltiplica ciascun termine del primo polinomio per ciascun termine del secondo, e poi si sommano i termini simili.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Se il primo ha m termini e il secondo n , i prodotti da scrivere sono $m \cdot n$: contarli è il modo di non perderne uno.

Due controlli che costano un secondo:

- il **grado** del prodotto è la somma dei gradi;
- il **termine noto** del prodotto è il prodotto dei termini noti.

Metodo 6.1: Moltiplicare due polinomi:

1. Ordina entrambi i polinomi.
2. Moltiplica il primo termine del primo per tutti quelli del secondo, poi il secondo, e così via: $m \cdot n$ prodotti.
3. Somma i termini simili.
4. Controlla grado e termine noto.

Esempio Svolto 6.1: $(2x - 3)(x^2 + x - 1)$:

1. Quanti prodotti. $2 \cdot 3 = 6$.

2. Si moltiplica.

$$\begin{array}{lll} 2x \cdot x^2 = 2x^3 & 2x \cdot x = 2x^2 & 2x \cdot (-1) = -2x \\ -3 \cdot x^2 = -3x^2 & -3 \cdot x = -3x & (-3)(-1) = +3 \end{array}$$

3. Si somma.

$$2x^3 + 2x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + 3 = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$$

4. Controlli. Grado: $1 + 2 = 3$, e infatti è 3. Termine noto: $(-3)(-1) = 3$, e infatti è 3.

5. Controllo con un numero, $x = 1$: a sinistra $(2 - 3)(1 + 1 - 1) = -1$; a destra $2 - 1 - 5 + 3 = -1$. Torna.

Trovare un solo coefficiente

A volte non serve tutto il prodotto: serve un coefficiente. In $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$, per sapere quanto vale il coefficiente di x^2 basta cercare i prodotti che danno x^2 , cioè quelli che prendono due x e un numero:

$$x \cdot x \cdot 3 + x \cdot 2 \cdot x + 1 \cdot x \cdot x = 3x^2 + 2x^2 + x^2 = 6x^2$$

Il coefficiente è 6, e non si è svolto il resto. Sui prodotti lunghi è la differenza fra dieci secondi e mezza pagina.

Somma e prodotto non sono la stessa cosa

$$(x + 1) + (x + 2) = 2x + 3 \quad \text{ma} \quad (x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$$

Nella somma i termini simili si sommano e il grado resta 1; nel prodotto ogni termine incontra ogni termine e il grado diventa 2.

Il segnale per accorgersene: se fra le due parentesi non c'è nessun segno, è un prodotto.

7 Somma per differenza

I prossimi quattro paragrafi sono i **prodotti notevoli**: prodotti che capitano così spesso che il risultato si impara invece di rifarlo ogni volta. Non sono scorciatoie facoltative: dalla scomposizione in poi si usano al contrario, e chi non li riconosce si blocca.

Formula 7.1: Somma per differenza:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Il prodotto della **somma** di due termini per la loro **differenza** è la differenza dei loro quadrati.

Condizione: i due binomi devono essere **coniugati**, cioè avere il primo termine identico e il secondo opposto. Il risultato è un binomio, non un trinomio: i doppi prodotti si elidono.

Esempio Svolto 7.1: $(3a + 2b)(3a - 2b)$, e un caso in cui la formula non si applica:

1. **Si riconoscono i due termini.** Il primo è $3a$, il secondo $2b$: i binomi sono coniugati.

2. **Si applica la formula:** quadrato del primo meno quadrato del secondo.

$$(3a)^2 - (2b)^2 = 9a^2 - 4b^2$$

Il quadrato prende anche il coefficiente: $(3a)^2 = 9a^2$, non $3a^2$.

3. **Perché funziona.** Facendo il prodotto per intero:

$$9a^2 - 6ab + 6ab - 4b^2$$

i due termini in mezzo sono opposti e si elidono.

4. **Un caso in cui non si applica.** In $(3a + 2b)(3a + 2b)$ i binomi non sono coniugati: quello è un quadrato, e fa $9a^2 + 12ab + 4b^2$.

5. **Controllo con numeri**, $a = b = 1$: $(3 + 2)(3 - 2) = 5$, e $9 - 4 = 5$. Torna.

Un uso che serve fuori dai compiti

$98 \cdot 102$ a mente: sono $(100 - 2)(100 + 2)$, cioè $100^2 - 2^2 = 10000 - 4 = 9996$.

Funziona ogni volta che due numeri sono equidistanti da uno tondo: $47 \cdot 53 = 50^2 - 3^2 = 2500 - 9 = 2491$.

Coniugati, non «somiglianti»

$$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25 \quad \text{ma} \quad (x + 5)(x - 3) \neq x^2 - 15$$

Nel secondo caso i binomi non sono coniugati e il prodotto va fatto per intero: $x^2 + 2x - 15$. Il termine in x non sparisce perché $+5x$ e $-3x$ non sono opposti.

8 Il quadrato di un binomio (e di un trinomio)

Formula 8.1: Quadrato di binomio:

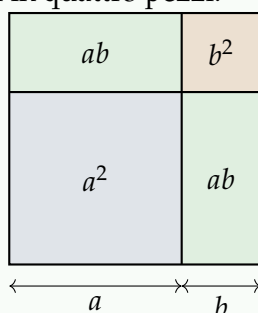
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

A parole, sempre in questo ordine: **quadrato del primo, doppio prodotto** dei due, **quadrato del secondo**.

I due quadrati sono **sempre positivi**; il segno del doppio prodotto è quello che sta fra i due termini.

Esempio Svolto 8.1: Il quadrato si vede: da dove viene il doppio prodotto:

Un quadrato di lato $a + b$ si taglia in quattro pezzi.



L'area di tutto è $(a + b)^2$; l'area dei pezzi è $a^2 + ab + ab + b^2$. I due rettangoli sono uguali: ecco il **doppio** prodotto.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Chi scrive $a^2 + b^2$ tiene i due quadrati e butta via i due rettangoli: nel disegno si vede quanta area è.

Esempio Svolto 8.2: $(2x - 5)^2$:

1. Il primo è $2x$, il secondo 5 , e fra i due c'è il meno.

2. Si scrivono i tre pezzi prima di calcolarli:

$$(2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot 5 + 5^2$$

3. Si calcola.

$$4x^2 - 20x + 25$$

4. Il conto sbagliato. $4x^2 + 25$ manca del doppio prodotto, e non è nemmeno vicino: con $x = 1$ il risultato giusto è $4 - 20 + 25 = 9$, cioè $(2 - 5)^2 = (-3)^2 = 9$. Torna. Invece $4 + 25 = 29$: sbagliato.

5. Il quadrato del secondo è +25, anche se il binomio ha il meno: un quadrato non è mai negativo.

Formula 8.2: Quadrato di trinomio:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

I quadrati sono tre e i doppi prodotti sono **tre**: uno per ogni coppia. Ogni termine va preso col suo segno.

Con quattro termini i doppi prodotti diventano sei, sempre uno per coppia.

Esempio Svolto 8.3: $(a + b - 2c)^2$:

1. I tre termini, coi segni: $a, +b, -2c$.

2. I tre quadrati.

$$a^2 \quad b^2 \quad (-2c)^2 = 4c^2$$

3. I tre doppi prodotti, uno per coppia.

$$2 \cdot a \cdot b = 2ab \quad 2 \cdot a \cdot (-2c) = -4ac \quad 2 \cdot b \cdot (-2c) = -4bc$$

4. Tutto insieme, e poi riordinato per potenze decrescenti come si fa sempre in questi appunti.

$$a^2 + b^2 + 4c^2 + 2ab - 4ac - 4bc = \mathbf{a^2 + 2ab - 4ac + b^2 - 4bc + 4c^2}$$

L'ordine in cui si scrivono i termini non cambia il polinomio: la formula si ricorda «quadrati e poi doppi prodotti», il risultato si scrive ordinato.

5. Controllo, $a = b = c = 1$: a sinistra $(1 + 1 - 2)^2 = 0$; a destra $1 + 2 - 4 + 1 - 4 + 4 = 0$. Torna.

$$(a + b)^2 \text{ non è } a^2 + b^2$$

È l'errore più costoso di tutta l'algebra, perché non si ferma qui: torna nelle equazioni, nei radicali, nelle derivate.

Si smonta coi numeri, in cinque secondi:

$$(3 + 4)^2 = 7^2 = 49 \quad \text{mentre} \quad 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

Mancano $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, che è esattamente il doppio prodotto.

Ogni volta che si eleva al quadrato una somma, il doppio prodotto c'è. Se nel risultato ci sono solo due termini, o si è perso qualcosa, o quello non era un quadrato ma una somma per differenza.

9 Il cubo di un binomio

Formula 9.1: Cubo di binomio:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Quattro termini: cubo del primo, **tre volte** il quadrato del primo per il secondo, tre volte il primo per il quadrato del secondo, cubo del secondo.

Col meno i segni si **alternano**, perché ogni termine contiene una potenza pari o dispari del secondo termine.

Esempio Svolto 9.1: $(x - 2)^3$:

1. Primo x , secondo 2, segno meno.

2. I quattro pezzi prima di calcolarli:

$$x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 - 2^3$$

3. Si calcola.

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

4. Non è $x^3 - 8$, che è un'altra cosa (una differenza di cubi, che si incontra nella scomposizione). Controllo con $x = 1$: $(1 - 2)^3 = -1$, e $1 - 6 + 12 - 8 = -1$. Torna. Invece $1 - 8 = -7$: sbagliato.

5. **Controllo dei segni.** Il primo termine è positivo, poi si alternano: $+, -, +, -$.

$(a + b)^3$ non è $a^3 + b^3$

Mancano i due termini in mezzo, che sono la parte grossa del risultato. Coi numeri: $(2 + 1)^3 = 27$, mentre $2^3 + 1^3 = 9$.

Un modo per non dimenticarli: il cubo ha **quattro** termini, come il quadrato ne ha tre. Se ne vengono due, manca qualcosa.

5. Controllo con un numero, $x = 1$: a sinistra $(1 - 2)^5 = -1$; a destra $1 - 10 + 40 - 80 + 80 - 32 = -1$. Torna.

I coefficienti di Tartaglia non sono quelli del risultato

Sviluppando $(2x + 3)^3$ non si scrive 1, 3, 3, 1 e via: ogni termine del binomio va sostituito *per intero*, coefficiente compreso.

$$(2x + 3)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 3 + 3(2x) \cdot 3^2 + 3^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$$

I coefficienti finali (8, 36, 54, 27) sono quelli di Tartaglia *moltiplicati* per le potenze di 2 e di 3.

11 Espressioni con i polinomi

L'ordine delle operazioni è quello di sempre. La differenza è che ora, prima di mettersi a moltiplicare, conviene **guardare**: se c'è un prodotto notevole si usa la formula, e se due pezzi sono uguali con segno opposto si elidono senza bisogno di calcolarli.

Metodo 11.1: Un'espressione con i polinomi, senza pagine di conti:

1. Guarda tutta l'espressione prima di scrivere: cerca quadrati di binomio, somme per differenza, cubi.
2. Sviluppa i prodotti notevoli con le formule, non a mano.
3. Sciogli le parentesi, badando al segno che hanno davanti.
4. Somma i termini simili.
5. Controlla il risultato con un valore delle lettere.

Esempio Svolto 11.1: $(x + 3)^2 - (x + 2)(x + 4)$:

1. Si guarda. Il primo pezzo è un quadrato di binomio, il secondo un prodotto normale: i binomi non sono coniugati.

2. Si sviluppano i due pezzi.

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9 \quad (x + 2)(x + 4) = x^2 + 6x + 8$$

3. Si sottrae, cambiando tutti i segni del secondo.

$$x^2 + 6x + 9 - x^2 - 6x - 8$$

4. Quasi tutto si elide.

5. Il senso del risultato. Non dipende da x : vale 1 per qualunque valore. Controllo con $x = 10$: $13^2 - 12 \cdot 14 = 169 - 168 = 1$. Torna.

Esempio Svolto 11.2: Una da liceo: $(2x - 3)(2x + 3) - (2x - 3)^2$:

1. Si guarda. Il primo pezzo è una somma per differenza, il secondo un quadrato: entrambi hanno la loro formula.

2. I due pezzi.

$$(2x - 3)(2x + 3) = 4x^2 - 9 \quad (2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

3. La sottrazione.

$$4x^2 - 9 - 4x^2 + 12x - 9 = 12x - 18$$

I termini in x^2 si elidono, e si poteva prevedere: entrambi i pezzi cominciavano con $4x^2$.

4. Si può raccogliere: $12x - 18 = 6(2x - 3)$. Non è obbligatorio, ma è la forma in cui si vede che l'espressione si annulla per $x = \frac{3}{2}$.

5. Controllo, $x = 1$: a sinistra $(-1)(5) - (-1)^2 = -5 - 1 = -6$; a destra $12 - 18 = -6$. Torna.

Quando conviene non sviluppare

In $(a + b)^2 - (a - b)^2$ si può sviluppare tutto e ottenere $4ab$. Ma si può anche vedere che è una differenza di quadrati, con «primo» = $(a + b)$ e «secondo» = $(a - b)$:

$$[(a + b) + (a - b)][(a + b) - (a - b)] = (2a)(2b) = 4ab$$

Due righe invece di sei. Negli esercizi da liceo la differenza fra chi guarda e chi sviluppa a testa bassa è mezza pagina di conti — e mezza pagina di conti è dove si sbaglia.

12 Valore numerico, geometria e i prodotti notevoli al contrario

Formula 12.1: Valore numerico: Si sostituisce a ogni lettera il suo valore e si calcola. I valori negativi e frazionari vanno **fra parentesi**.

Esempio Svolto 12.1: $2x^3 - x^2 + 5$ per $x = -2$:

1. Sostituzione, con le parentesi.

$$2 \cdot (-2)^3 - (-2)^2 + 5$$

2. Prima le potenze. $(-2)^3 = -8$ (esponente dispari, resta negativo); $(-2)^2 = +4$.

$$2 \cdot (-8) - 4 + 5$$

3. Si finisce.

$$-16 - 4 + 5 = -15$$

4. L'errore da evitare. Senza parentesi, -2^2 vale -4 e il segno del secondo termine si ribalta: si otterrebbe -7 .

Esempio Svolto 12.2: L'area che diventa un prodotto notevole:

Un quadrato ha il lato di $x + 3$ centimetri.

1. L'area è il lato al quadrato:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

2. Il perimetro è quattro volte il lato:

$$4(x + 3) = 4x + 12$$

3. Se il lato aumenta di 1, l'area diventa $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$, cioè $2x + 7$ in più: l'aumento dipende da x , non è una quantità fissa.

4. Controllo, $x = 2$: il lato è 5 e l'area 25; la formula dà $4 + 12 + 9 = 25$. Torna.

Formula 12.2: Letti al contrario: Le formule dei prodotti notevoli si leggono anche da destra a sinistra, e così servono per **scomporre**:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 \quad 4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5)$$

Per riconoscere un quadrato di binomio: due termini devono essere quadrati (x^2 e 9) e il terzo il doppio prodotto delle loro basi ($2 \cdot x \cdot 3 = 6x$). Se il termine centrale non torna, non è un quadrato.

Anche il cubo si legge al contrario, e si riconosce dal primo e dall'ultimo termine, che devono essere cubi:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$$

Qui x^3 è il cubo di x e 1 è il cubo di 1: il binomio è $x + 1$, e si controlla risviluppando.

Esempio Svolto 12.3: Riconoscere, o accorgersi che non torna:

1. $x^2 + 10x + 25$. Quadrati: x^2 e $25 = 5^2$. Doppio prodotto atteso: $2 \cdot x \cdot 5 = 10x$, ed è quello che c'è.

$$(x + 5)^2$$

2. $x^2 + 7x + 9$. Quadrati: x^2 e 9. Doppio prodotto atteso: $6x$, ma qui c'è $7x$: **non** è un quadrato di binomio.

3. $x^2 - 4x + 4$. Quadrati: x^2 e $4 = 2^2$. Doppio prodotto atteso $4x$, e c'è col meno.

$$(x - 2)^2$$

4. **Controllo**, sempre lo stesso: si risviluppa. $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$. Torna.

Esempio Svolto 12.4: Dimostrare con le lettere: tre numeri consecutivi:

«La somma di tre numeri interi consecutivi è divisibile per 3»: provarlo su dieci esempi non lo dimostra. Coi polinomi si dimostra in tre righe.

1. **Si scrive il caso generico.** Il primo numero è n ; gli altri due sono $n + 1$ e $n + 2$.

2. **Si somma.**

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$$

3. **Si raccoglie il 3.**

$$3n + 3 = 3(n + 1)$$

4. **Si conclude.** È 3 moltiplicato per un intero, quindi è divisibile per 3 — per *qualunque* n , non solo negli esempi.

È la differenza fra «ho provato e viene» e «viene sempre», e la fa la lettera al posto del numero.

Dove finisce questo capitolo e dove comincia l'altro

Quello che si è fatto qui sopra è *riconoscere* un prodotto notevole già sviluppato: si guardano il primo e l'ultimo termine, si controlla il doppio prodotto, e si torna indietro. Serve a due cose: chiudere il cerchio con le formule di questo capitolo e controllare i propri sviluppi.

La **scomposizione in fattori** è un capitolo a parte, e non è questo. Là si impara il raccoglimento totale e parziale, il trinomio caratteristico, la somma e la differenza di cubi, la regola di Ruffini — e soprattutto la domanda che qui non c'è mai: davanti a un polinomio qualunque, che nessuno ha scritto apposta, *quale* metodo si prova per primo. Chi sa sviluppare a occhi chiusi i prodotti notevoli di queste pagine ci arriva con metà del lavoro già fatto. Ma è metà, non tutto.

Indice analitico

Binomio, 3

Cubo di binomio, 12

Divisione per un monomio, 6

Doppio prodotto, 10

Espressioni con polinomi, 14

Forma normale, 3

Polinomi e geometria, 15

Polinomio, 3

Polinomio completo, 5

Polinomio omogeneo, 5

Polinomio ordinato, 5

Potenza di un binomio, 13

Prodotti notevoli, 9

Prodotto di polinomi, 7

Prodotto monomio per polinomio, 6

Quadrato di binomio, 10

Quadrato di trinomio, 10

Scomposizione, 15

Somma di polinomi, 5

Somma per differenza, 9

Termine noto, 3

Triangolo di Tartaglia, 13

Trinomio, 3

Valore numerico, 15