

FORMULARIO: SCOMPOSIZIONE IN FATTORI

In ogni riquadro: la formula con le sue condizioni e un esempio numerico.

1 I raccoglimenti

1.1 Raccoglimento totale (a fattore comune)

$$AB + AC = A(B + C)$$

Si raccoglie il MCD dei termini: coefficiente il MCD dei coefficienti, lettere comuni con l'esponente minore. Si tenta **sempre per primo**.

ESEMPIO

$$6x^3 + 4x^2 = 2x^2(3x + 2) \quad 3x + 3 = 3(x + 1)$$

Nel secondo: dentro resta 1, non zero.

1.2 Raccoglimento del segno meno

$$-A - B = -(A + B)$$

Raccogliendo il meno cambia il segno di **ogni** termine dentro.

ESEMPIO

$$-2x^3 - 4x^2 = -2x^2(x + 2) \quad -x + 5 = -(x - 5)$$

1.3 Raccoglimento parziale (a gruppi)

$$AC + AD + BC + BD = A(C + D) + B(C + D) = (C + D)(A + B)$$

Su quattro (o sei) termini: si raccoglie a coppie, e funziona solo se le parentesi vengono **identiche** — quello è il semaforo verde.

ESEMPIO

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = x^2(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(x^2 + 2)$$

2 I prodotti notevoli al rovescio

2.1 Differenza di quadrati

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Due termini, entrambi quadrati, segno meno. La **somma** di quadrati $a^2 + b^2$ invece è irriducibile.

ESEMPIO

$$9x^2 - 25 = (3x + 5)(3x - 5) \quad 4 - y^2 = (2 + y)(2 - y)$$

2.2 Trinomio quadrato di binomio

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Tre termini: due quadrati più il **doppio prodotto**, che va sempre verificato. Il suo segno è il segno nella parentesi.

ESEMPIO

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 \quad 9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2$$

2.3 Quadrato di trinomio

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$$

Sei termini: tre quadrati e **tre** doppi prodotti, uno per coppia.

ESEMPIO

$$x^2 + 4y^2 + 1 + 4xy + 2x + 4y = (x + 2y + 1)^2$$

2.4 Quadrinomio cubo di binomio

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

Quattro termini: due cubi e due **tripli prodotti**. Con b negativo i segni si alternano: $+, -, +, -$.

ESEMPIO

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3 \quad 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x + 1)^3$$

2.5 Somma e differenza di cubi

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Il binomio ha il segno del testo; nel trinomio il termine centrale ha il segno opposto. Il trinomio (*falso quadrato*: niente 2) è irriducibile.

ESEMPIO

$$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) \quad 8x^3 - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$

2.6 Trinomio speciale

$$x^2 + sx + p = (x + m)(x + n) \quad \text{con } m + n = s, \quad m \cdot n = p$$

Si parte dal **prodotto** p : si elencano le coppie di divisori e si sceglie quella con la somma giusta.
 $p > 0$: numeri concordi; $p < 0$: discordi.

ESEMPIO

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4) \quad x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$$

3 Teorema del resto e regola di Ruffini

3.1 Teorema del resto

Il resto della divisione di $P(x)$ per $x - a$ si trova **senza dividere**:

$$R = P(a)$$

Per il divisore $x + 3$ si scrive $x - (-3)$: quindi $a = -3$, e si calcola $P(-3)$.

ESEMPIO

$$P(x) = x^2 - 3x + 1, \text{ diviso } x - 2 : \quad R = P(2) = 4 - 6 + 1 = -1$$

3.2 Teorema di Ruffini (divisibilità)

$$x - a \text{ divide } P(x) \iff P(a) = 0$$

Un a così si chiama **radice** di $P(x)$. Le radici intere si cercano fra i **divisori del termine noto**, positivi e negativi.

ESEMPIO

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 : \quad P(2) = 8 - 8 + 2 - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2) \text{ è un fattore}$$

3.3 Regola di Ruffini (lo schema)

Coefficienti in grado decrescente (con 0 per i gradi mancanti), a a sinistra; si abbassa il primo, poi «moltiplica e somma» colonna per colonna. L'ultimo numero è il resto, gli altri il quoziente, di grado sceso di uno.

ESEMPIO

$x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ diviso $x + 1$ (qui $a = -1$):

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array} \quad Q(x) = x^2 + x - 6$$

3.4 Scomporre con Ruffini

1. Cerca una radice a fra i divisori del termine noto (prova con il teorema del resto).
2. Dividi con lo schema: $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$.
3. Guarda se $Q(x)$ si scompone ancora (trinomio speciale, o di nuovo Ruffini).

ESEMPIO

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x^2 + x - 6) = (x + 1)(x - 2)(x + 3)$$

4 La strategia

Quale metodo: si contano i termini

Termini	Che cosa tentare	Esempio
sempre, per primo	raccoglimento totale	$2x^2 - 50 = 2(x^2 - 25)$
due	differenza di quadrati	$x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$
	somma / differenza di cubi	$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
tre	quadrato di binomio	$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$
	trinomio speciale	$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$
quattro	cubo di binomio	$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$
	raccoglimento parziale	$x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = (x - 3)(x^2 + 2)$
se niente funziona	Ruffini	radici fra i divisori del noto

4.1 Fino ai fattori irriducibili

Dopo ogni scomposizione si guarda **ogni fattore**: si scompone ancora? Ci si ferma solo quando nessuno si scompone più.

ESEMPIO

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

Fermarsi al primo passaggio è l'errore classico: $x^2 - 4$ non era irriducibile.

4.2 La verifica (gratis, sempre)

Rimoltiplicare i fattori deve ridare il testo; oppure si sostituisce un valore comodo nel testo e nella scomposizione: stesso numero.

ESEMPIO

$$x^2 - 2x - 15 \stackrel{?}{=} (x - 3)(x + 5) : \text{con } x = 1 \rightarrow -16 \neq -12 \Rightarrow \text{sbagliata}$$

Irriducibili da riconoscere al volo

Faccia	Perché non si scompone
$a^2 + b^2$	somma di quadrati (niente doppio prodotto)
$a^2 - ab + b^2, a^2 + ab + b^2$	falso quadrato: il 2 non c'è
$x^2 + sx + p$ senza coppia intera	nessun m, n con somma s e prodotto p
$x + a$, e ogni primo grado	il grado non può scendere

I quattro errori che costano di più

- Fermarsi a metà: ogni fattore va ricontrollato.
- «Scomporre» $x^2 + 4$: la somma di quadrati non si tocca.
- Il segno nel teorema del resto: per $x + 3$ si calcola $P(-3)$.
- Lo zero dimenticato nello schema di Ruffini quando manca un grado.