

FORMULARIO: FRAZIONI ALGEBRICHE

In ogni riquadro: la regola con le sue condizioni e un esempio con i numeri.

1 Esistenza e semplificazione

1.1 Che cos'è una frazione algebrica

Il quoziente di due polinomi, con almeno una lettera a **denominatore**:

$$\frac{A(x)}{B(x)}$$

Se sotto c'è solo un numero non è una frazione algebrica, ed è definita ovunque.

ESEMPIO

$$\frac{x+1}{x-3} \text{ sì} \quad \frac{x^2+1}{5} \text{ no (è un polinomio)}$$

1.2 Condizioni di esistenza (C.E.)

La frazione $\frac{A}{B}$ esiste dove il denominatore non si annulla:

$$B \neq 0$$

Si **scompone** B e si pone diverso da zero ogni fattore con la lettera. Il numeratore non pone condizioni.

ESEMPIO

$$\frac{x+1}{x^2-4} = \frac{x+1}{(x+2)(x-2)} \quad \text{C.E. } x \neq -2, x \neq 2$$

1.3 Quando non c'è nessuna condizione

Se il denominatore non si annulla mai (somma di quadrati, trinomio irriducibile), la frazione esiste per ogni valore.

ESEMPIO

$$\frac{3}{x^2+1} : x^2+1 > 0 \text{ sempre} \Rightarrow \text{nessuna C.E.}$$

1.4 Proprietà invariantiva (semplificazione)

$$\frac{A \cdot C}{B \cdot C} = \frac{A}{B} \quad (C \neq 0)$$

Si semplificano **solo fattori**: prima si scompone sopra e sotto, poi si cancella. Le C.E. si scrivono *prima* di semplificare e restano anche dopo.

ESEMPIO

$$\frac{3x+6}{x^2-4} = \frac{3(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{3}{x-2} \quad (x \neq \pm 2)$$

1.5 Semplificare monomi

Coefficienti divisi per il loro MCD; le lettere restano dalla parte dove l'esponente è maggiore, con la differenza degli esponenti.

ESEMPIO

$$\frac{6x^2y}{9xy^3} = \frac{2x}{3y^2} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

1.6 Fattori opposti

Due binomi con i termini scambiati sono opposti: si raccoglie il meno.

$$b - a = -(a - b)$$

ESEMPIO

$$\frac{x-2}{2-x} = \frac{x-2}{-(x-2)} = -1 \quad (x \neq 2)$$

2 Le quattro operazioni

2.1 Moltiplicazione

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \quad (B \neq 0, D \neq 0)$$

Si scompone tutto e si semplifica **in croce** *prima* di moltiplicare.

ESEMPIO

$$\frac{x^2-1}{x} \cdot \frac{2x}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x} \cdot \frac{2x}{x+1} = 2(x-1)$$

2.2 Divisione

Si moltiplica per il reciproco del **divisore** (la seconda frazione):

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} \quad (B \neq 0, D \neq 0, C \neq 0)$$

La condizione $C \neq 0$ è **in più**: il numeratore del divisore diventa un denominatore.

ESEMPIO

$$\frac{x^2 - 4}{x} : \frac{x + 2}{x^2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x} \cdot \frac{x^2}{x + 2} = x(x - 2)$$

2.3 mcm dei denominatori

Scomposti i denominatori: **tutti** i fattori, ciascuno con l'esponente **maggiore**. Il complementare di una frazione è il mcm diviso il suo denominatore.

ESEMPIO

$$\text{mcm}[(x + 1)(x - 1), (x - 1)^2] = (x + 1)(x - 1)^2$$

Complementari: $(x - 1)$ per la prima, $(x + 1)$ per la seconda.

2.4 Somma e differenza

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot \frac{\text{mcm}}{B} + C \cdot \frac{\text{mcm}}{D}}{\text{mcm}}$$

Fatti i conti sopra, si **scompone il numeratore**: se ha un fattore comune col denominatore, si semplifica.

ESEMPIO

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} &= \frac{x + 1 + x}{x(x + 1)} = \frac{2x + 1}{x(x + 1)} \\ \frac{1}{x - 2} - \frac{4}{x^2 - 4} &= \frac{x + 2 - 4}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{1}{x + 2} \end{aligned}$$

2.5 Il meno davanti a una frazione

Vale per **tutto** il numeratore: si mettono le parentesi prima di fare i conti.

$$-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B}$$

ESEMPIO

$$\frac{3}{x} - \frac{x-1}{x} = \frac{3 - (x-1)}{x} = \frac{4-x}{x}$$

(non $\frac{3-x-1}{x}$).

2.6 Sommare un intero e una frazione

L'intero si scrive come frazione con denominatore 1: il suo complementare è il mcm stesso.

$$A + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D + C}{D}$$

ESEMPIO

$$x + \frac{1}{x} = \frac{x \cdot x + 1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$1 - \frac{2}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$$

2.7 Potenza

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n} \quad (B \neq 0)$$

L'esponente va su **ogni** fattore, coefficienti compresi.

ESEMPIO

$$\left(\frac{2x}{y^2}\right)^3 = \frac{8x^3}{y^6} \quad (y \neq 0)$$

2.8 Potenza a esponente negativo

Si rovescia la frazione:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-n} = \left(\frac{B}{A}\right)^n = \frac{B^n}{A^n} \quad (A \neq 0, B \neq 0)$$

Servono **entrambi** diversi da zero: anche il numeratore finisce sotto.

ESEMPIO

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-2} = \frac{(x+1)^2}{x^2} \quad (x \neq 0, x \neq -1)$$

3 Espressioni e controllo

L'ordine delle operazioni

	Che cosa	Nota
0	C.E.	su tutti i denominatori, e sui numeratori dei divisori
1	parentesi	dentro c'è quasi sempre una somma: mcm
2	potenze	esponente su ogni fattore, sopra e sotto
3	prodotti e quozienti	si semplifica prima di moltiplicare
4	somme e differenze	mcm, e occhio al meno
5	risultato	semplificato, con le C.E. accanto

3.1 Come si scrive il risultato

Numeratore e denominatore **scomposti** (così si vede che non c'è più niente da semplificare); se il numeratore è irriducibile resta sviluppato, per grado decrescente. Il meno davanti alla frazione. Le C.E. accanto: sono parte della risposta.

ESEMPIO

$$\frac{2x+1}{x(x+1)} \quad (x \neq 0, x \neq -1) \quad -\frac{1}{x+2} \quad (\text{non } \frac{1}{-x-2})$$

3.2 La verifica numerica

Si sceglie un valore **ammesso** dalle C.E. e si calcolano il testo e il risultato: devono dare lo stesso numero.

ESEMPIO

$\frac{x+3}{x} \stackrel{?}{=} 3$: con $x = 1$ il testo dà 4 e la risposta 3. Diversi $\Rightarrow$ sbagliato.

Frazioni algebriche o equazioni fratte?

	Espressione	Equazione fratta
com'è fatta	non c'è l'uguale	c'è l'uguale
il mcm	resta a denominatore	si moltiplica: i denominatori spariscono
che cosa si trova	una frazione ridotta	i valori dell'incognita
le condizioni	si riportano nel risultato	servono a scartare le soluzioni

I sei errori che costano di più

- Semplificare gli **addendi**: $\frac{x+3}{x} \neq 3$. Solo i fattori.
- Scrivere le C.E. sul denominatore **non scomposto**, e perdere metà dei valori vietati.

- Togliere le C.E. dopo che il fattore si è semplificato: restano.
- Trattare una somma come un'equazione, e far sparire i denominatori.
- Il meno davanti alla frazione non distribuito su tutto il numeratore.
- Nella divisione, rovesciare il dividendo invece del divisore — e dimenticare la condizione $C \neq 0$.