

SOLUZIONI: FRAZIONI ALGEBRICHE

La numerazione è la stessa del file degli esercizi.

Sono svolti i **primi due esercizi di ogni blocco** — così ogni tipologia ha il suo modello — e **tutti quelli di livello ■■■■**. Le C.E. compaiono in ogni procedimento, al punto in cui si scrivono davvero: subito dopo aver scomposto i denominatori, e prima di semplificare qualunque cosa.

1. Condizioni di esistenza

Esercizio 1.

$$\rightarrow \frac{1}{x}$$

→ Guardo solo il denominatore: x . (il numeratore non pone nessuna condizione)

→ C.E.: $x \neq 0$. (si leggono sul denominatore scomposto, prima di toccare la frazione)

Esercizio 2.

$$\rightarrow \frac{3}{x}$$

→ Guardo solo il denominatore: x .

→ C.E.: $x \neq 0$.

Esercizio 41.

$$\rightarrow \frac{x}{x^2 - 4}$$

→ Guardo solo il denominatore: $x^2 - 4$.

→ Lo scompongo: $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$.

→ $x + 2 \neq 0$

→ $x - 2 \neq 0$

→ C.E.: $x \neq -2, x \neq 2$.

Esercizio 42.

$$\rightarrow \frac{1}{x^2 - 9}$$

→ Guardo solo il denominatore: $x^2 - 9$.

→ Lo scompongo: $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$.

$$\rightarrow x + 3 \neq 0$$

$$\rightarrow x - 3 \neq 0$$

$$\rightarrow \text{C.E.: } x \neq -3, x \neq 3.$$

2. Semplificazione: monomi e raccoglimenti

Esercizio 61.

$$\rightarrow \frac{6x^2y}{9xy^3}$$

$\rightarrow$ Coefficienti: divido 6 e 9 per il loro MCD. (è la stessa semplificazione delle frazioni numeriche)

$\rightarrow$ Lettere: ognuna resta dalla parte dove l'esponente è maggiore, con la differenza degli esponenti.

$$(\frac{x^5}{x^2} = x^3, \text{ e } \frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3})$$

$$\rightarrow \frac{6x^2y}{9xy^3} = \frac{2x}{3y^2}$$

$$\rightarrow \text{C.E.: } x \neq 0, y \neq 0.$$

Esercizio 62.

$$\rightarrow \frac{4x^3}{8x}$$

$\rightarrow$ Coefficienti: divido 4 e 8 per il loro MCD.

$\rightarrow$ Lettere: ognuna resta dalla parte dove l'esponente è maggiore, con la differenza degli esponenti.

$$\rightarrow \frac{4x^3}{8x} = \frac{x^2}{2}$$

$$\rightarrow \text{C.E.: } x \neq 0.$$

Esercizio 81.

$$\rightarrow \frac{2x+2}{2x-2}$$

$\rightarrow$ Sopra e sotto c'è il fattore comune 2: lo raccolgo. (prima si raccoglie, poi si semplifica: solo i FATTORI si cancellano)

$$\rightarrow \frac{2x+2}{2x-2} = \frac{2(x+1)}{2(x-1)}$$

$$\rightarrow \text{Cancello 2: } \frac{x+1}{x-1}$$

$$\rightarrow \text{C.E.: } x \neq 1.$$

Esercizio 82.

$$\rightarrow \frac{3x+6}{3x-9}$$

→ Sopra e sotto c'è il fattore comune 3: lo raccolgo.

$$\rightarrow \frac{3x+6}{3x-9} = \frac{3(x+2)}{3(x-3)}$$

$$\rightarrow \text{Cancello } 3: \frac{x+2}{x-3}$$

→ C.E.: $x \neq 3$.

Esercizio 106.

$$\rightarrow \frac{x^2y + xy^2}{x^2y - xy^2}$$

→ Sopra e sotto c'è il fattore comune xy : lo raccolgo.

$$\rightarrow \frac{x^2y + xy^2}{x^2y - xy^2} = \frac{xy(x+y)}{xy(x-y)}$$

$$\rightarrow \text{Cancello } xy: \frac{x+y}{x-y}$$

→ C.E.: $x \neq 0, y \neq 0, x \neq y$.

Esercizio 107.

$$\rightarrow \frac{3a^2 + 6ab}{3a^2 - 3ab}$$

→ Sopra e sotto c'è il fattore comune $3a$: lo raccolgo.

$$\rightarrow \frac{3a^2 + 6ab}{3a^2 - 3ab} = \frac{3a(a+2b)}{3a(a-b)}$$

$$\rightarrow \text{Cancello } 3a: \frac{a+2b}{a-b}$$

→ C.E.: $a \neq 0, a \neq b$.

3. Semplificazione con le scomposizioni**Esercizio 121.**

$$\rightarrow \frac{x+2}{x^2-4}$$

→ Scompongo sopra e sotto: $\frac{x+2}{x^2-4} = \frac{(x+2)}{(x+2)(x-2)}$. (senza scomporre non si vede nessun fattore comune)

→ C.E.: $x \neq -2, x \neq 2$.

→ Cancello il fattore comune $x+2$. (si semplificano solo fattori, mai gli addendi)

$$\rightarrow \frac{1}{x-2}$$

Esercizio 122.

$$\rightarrow \frac{x-3}{x^2-9}$$

→ Scompongo sopra e sotto: $\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{(x-3)}{(x+3)(x-3)}$.

→ C.E.: $x \neq -3, x \neq 3$.

→ Cancello il fattore comune $x-3$.

$$\rightarrow \frac{1}{x+3}$$

Esercizio 151.

$$\rightarrow \frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$$

→ Scompongo sopra e sotto: $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)^2}$.

→ C.E.: $x \neq -2$.

→ Cancello il fattore comune $x+2$.

$$\rightarrow \frac{x-2}{x+2}$$

Esercizio 152.

$$\rightarrow \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$$

→ Scompongo sopra e sotto: $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}$.

→ C.E.: $x \neq 1, x \neq -1$.

→ Cancello il fattore comune $x-1$.

$$\rightarrow \frac{x-1}{x+1}$$

4. Moltiplicazione

Esercizio 171.

$$\rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} \cdot \frac{2x}{x + 1}$$

$\rightarrow$ Scompongo tutto: $\frac{(x+1)(x-1)}{x} \cdot \frac{2x}{x+1}$ (si semplifica PRIMA di moltiplicare: dopo i polinomi sarebbero enormi)

$\rightarrow$ C.E.: $x \neq 0, x \neq -1$.

$\rightarrow$ Semplifico in croce i fattori uguali, poi moltiplico quello che resta.

$$\rightarrow 2(x - 1)$$

Esercizio 172.

$$\rightarrow \frac{x+2}{x-3} \cdot \frac{x-3}{x^2-4}$$

$\rightarrow$ Scompongo tutto: $\frac{x+2}{x-3} \cdot \frac{x-3}{(x+2)(x-2)}$

$\rightarrow$ C.E.: $x \neq 3, x \neq -2, x \neq 2$.

$\rightarrow$ Semplifico in croce i fattori uguali, poi moltiplico quello che resta.

$$\rightarrow \frac{1}{x-2}$$

Esercizio 191.

$$\rightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} \cdot \frac{x^2 + x}{x^2 - 4x + 4}$$

$\rightarrow$ Scompongo tutto: $\frac{(x+2)(x-2)}{x(x+1)} \cdot \frac{x(x+1)}{(x-2)^2}$

$\rightarrow$ C.E.: $x \neq 0, x \neq -1, x \neq 2$.

$\rightarrow$ Semplifico in croce i fattori uguali, poi moltiplico quello che resta.

$$\rightarrow \frac{x+2}{x-2}$$

Esercizio 192.

$$\rightarrow \frac{x^2 + 6x + 9}{x-3} \cdot \frac{x^2 - 9}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}$$

$\rightarrow$ Scompongo tutto: $\frac{(x+3)^2}{x-3} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)^3}$

$\rightarrow$ C.E.: $x \neq 3, x \neq -3$.

→ Semplifico in croce i fattori uguali, poi moltiplico quello che resta.

→ **1**

5. Divisione

Esercizio 206.

$$\rightarrow \frac{x^2 - 4}{x} : \frac{x + 2}{x^2}$$

→ Rovescio il **divisore** e moltiplico: $\frac{(x + 2)(x - 2)}{x} \cdot \frac{x^2}{x + 2}$ (dividere per una frazione è moltiplicare per il suo reciproco)

→ Alle condizioni dei denominatori si aggiunge quella sul numeratore del divisore, che ora sta sotto. (è la condizione in più della divisione)

→ C.E.: $x \neq 0, x \neq -2$. (si leggono sul denominatore scomposto, prima di toccare la frazione)

→ Semplifico e moltiplico: **$x(x - 2)$**

Esercizio 207.

$$\rightarrow \frac{x + 1}{x - 1} : \frac{x + 1}{2}$$

→ Rovescio il **divisore** e moltiplico: $\frac{x + 1}{x - 1} \cdot \frac{2}{x + 1}$

→ Alle condizioni dei denominatori si aggiunge quella sul numeratore del divisore, che ora sta sotto.

→ C.E.: $x \neq 1, x \neq -1$.

→ Semplifico e moltiplico: **$\frac{2}{x - 1}$**

Esercizio 226.

$$\rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x} : \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2}$$

→ Rovescio il **divisore** e moltiplico: $\frac{(x + 1)(x - 1)}{x(x + 2)} \cdot \frac{x^2(x + 2)}{(x - 1)(x + 1)}$

→ Alle condizioni dei denominatori si aggiunge quella sul numeratore del divisore, che ora sta sotto.

→ C.E.: $x \neq 0, x \neq -2, x \neq 1, x \neq -1$.

→ Semplifico e moltiplico: **x**

Esercizio 227.

$$\rightarrow \frac{x^2 - 6x + 9}{x + 3} : \frac{x - 3}{x^2 + 6x + 9}$$

$$\rightarrow \text{Rovescio il **divisore** e moltiplico: } \frac{(x - 3)^2}{x + 3} \cdot \frac{(x + 3)^2}{x - 3}$$

→ Alle condizioni dei denominatori si aggiunge quella sul numeratore del divisore, che ora sta sotto.

$$\rightarrow \text{C.E.: } x \neq -3, x \neq 3.$$

$$\rightarrow \text{Semplifico e moltiplico: } (x - 3)(x + 3)$$

6. Somme e differenze con denominatori facili**Esercizio 241.**

$$\rightarrow \frac{1}{x} + \frac{2}{x}$$

→ Denominatore comune: x . (qui basta il prodotto: i denominatori non hanno fattori comuni)

$$\rightarrow \text{C.E.: } x \neq 0.$$

→ I complementari (mcm diviso ogni denominatore) sono 1 e 1: moltiplico i numeratori. (il denominatore resta: qui non si moltiplicano i due membri come in un'equazione)

→ Sopra restano 1 e 2, che sommati danno 3.

$$\rightarrow \frac{3}{x}$$

Esercizio 242.

$$\rightarrow \frac{3}{x} + \frac{x}{x}$$

→ Denominatore comune: x .

$$\rightarrow \text{C.E.: } x \neq 0.$$

→ I complementari (mcm diviso ogni denominatore) sono 1 e 1: moltiplico i numeratori.

→ Sopra restano 3 e x , che sommati danno $x + 3$.

$$\rightarrow \frac{x + 3}{x}$$

Esercizio 281.

$$\rightarrow x + \frac{1}{x}$$

→ Denominatore comune: x .

→ C.E.: $x \neq 0$.

→ I complementari (mcm diviso ogni denominatore) sono x e 1: multiplico i numeratori.

→ Sopra restano x^2 e 1, che sommati danno $x^2 + 1$.

$$\rightarrow \frac{x^2 + 1}{x}$$

Esercizio 282.

$$\rightarrow x - \frac{1}{x}$$

→ Denominatore comune: x .

→ C.E.: $x \neq 0$.

→ I complementari (mcm diviso ogni denominatore) sono x e 1: multiplico i numeratori.

→ Il meno vale per **tutto** il numeratore che segue: metto le parentesi prima di fare i conti. (è l'errore più frequente delle differenze)

→ Sopra restano x^2 e -1 , che sommati danno $x^2 - 1$.

$$\rightarrow \frac{x^2 - 1}{x}$$

7. Somme e differenze con il mcm da scomporre

Esercizio 306.

$$\rightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}$$

→ Scompongo i denominatori e costruisco il mcm: $(x-2)(x+2)$. (tutti i fattori, ciascuno con l'esponente maggiore)

→ C.E.: $x \neq 2, x \neq -2$.

→ I complementari (mcm diviso ogni denominatore) sono $x+2$ e 1: multiplico i numeratori.

→ Il meno vale per **tutto** il numeratore che segue: metto le parentesi prima di fare i conti.

→ Sopra restano $x+2$ e -4 , che sommati danno $x-2$.

→ Il numeratore contiene $x-2$: si semplifica col denominatore. (dopo la somma si guarda SEMPRE se il numeratore si scompone)

$$\rightarrow \frac{1}{x+2}$$

Esercizio 307.

$$\rightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2-1}$$

→ Scompongo i denominatori e costruisco il mcm: $(x-1)(x+1)$.

→ C.E.: $x \neq 1, x \neq -1$.

→ I complementari (mcm diviso ogni denominatore) sono $x+1$ e 1 : multiplico i numeratori.

→ Sopra restano $x+1$ e 2 , che sommati danno $x+3$.

$$\rightarrow \frac{x+3}{(x-1)(x+1)}$$

8. Potenze

Esercizio 336.

$$\rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2$$

→ L'esponente si applica a **ogni** fattore, sopra e sotto — coefficienti compresi. ($(2x)^3 = 8x^3$, non $2x^3$)

$$\rightarrow \frac{x^2}{y^2}$$

→ C.E.: $y \neq 0$. (si leggono sul denominatore scomposto, prima di toccare la frazione)

Esercizio 337.

$$\rightarrow \left(\frac{2x}{y}\right)^2$$

→ L'esponente si applica a **ogni** fattore, sopra e sotto — coefficienti compresi.

$$\rightarrow \frac{4x^2}{y^2}$$

→ C.E.: $y \neq 0$.

Esercizio 361.

$$\rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$$

→ Esponente negativo: rovescio la frazione e cambio il segno all'esponente, cioè $\left(\frac{y}{x}\right)^2$. (servono entrambi diversi da zero: anche il numeratore finisce sotto)

→ L'esponente si applica a **ogni** fattore, sopra e sotto — coefficienti compresi.

$$\rightarrow \frac{y^2}{x^2}$$

→ C.E.: $y \neq 0, x \neq 0$.

Esercizio 362.

$$\rightarrow \left(\frac{2x}{y} \right)^{-1}$$

→ Esponente negativo: rovescio la frazione e cambio il segno all'esponente, cioè $\left(\frac{y}{2x} \right)^1$.

→ L'esponente si applica a **ogni** fattore, sopra e sotto — coefficienti compresi.

$$\rightarrow \frac{y}{2x}$$

→ C.E.: $y \neq 0, x \neq 0$.

Esercizio 381.

$$\rightarrow \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right)^2$$

→ L'esponente si applica a **ogni** fattore, sopra e sotto — coefficienti compresi.

$$\rightarrow \frac{(x+1)^2(x-1)^2}{x^2}$$

→ C.E.: $x \neq 0$.

Esercizio 382.

$$\rightarrow \left(\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} \right)^3$$

→ L'esponente si applica a **ogni** fattore, sopra e sotto — coefficienti compresi.

$$\rightarrow \frac{x^3}{(x-2)^3}$$

→ C.E.: $x \neq 2, x \neq -2$.

9. Espressioni di riepilogo**Esercizio 386.**

$$\rightarrow \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) : \frac{2x}{x^2-1}$$

→ C.E.: $x \neq 1, x \neq -1, x \neq 0$. (si leggono sul denominatore scomposto, prima di toccare la frazione)

→ Risolvo la prima parentesi: $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$. (dentro le parentesi c'è una somma: serve il mcm)

→ Poi divido: rovescio il divisore e semplifico.

→ **1**

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 387.

$$\rightarrow \left(\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x+1} \right) \cdot \frac{x+1}{x-1}$$

→ C.E.: $x \neq -1, x \neq 1$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}.$$

→ Poi moltiplico quello che resta.

→ **1**

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 406.

$$\rightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+x} \right)$$

→ C.E.: $x \neq 0, x \neq -1, x \neq -2$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{x(x+1)}.$$

$$\rightarrow \text{Risolvo la seconda parentesi: } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+x} = \frac{x+2}{x(x+1)}.$$

→ Poi divido: rovescio il divisore e semplifico.

$$\rightarrow \frac{2x+1}{x+2}$$

Esercizio 407.

$$\rightarrow \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) : \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right)$$

→ C.E.: $x \neq 1, x \neq -1, x \neq 0$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}.$$

$$\rightarrow \text{Risolvo la seconda parentesi: } \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)}.$$

→ Poi divido: rovescio il divisore e semplifico.

$$\rightarrow \frac{1}{x}$$

Esercizio 408.

$$\rightarrow \frac{x}{x+2} + \frac{2}{x-2} - \frac{8}{x^2-4}$$

$$\rightarrow \text{C.E.: } x \neq -2, x \neq 2.$$

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{x}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)}.$$

→ Poi sottraggo quello che resta.

$$\rightarrow \mathbf{1}$$

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 409.

$$\rightarrow \frac{x+3}{x} \cdot \frac{x}{x-3} - \frac{6}{x-3}$$

$$\rightarrow \text{C.E.: } x \neq 0, x \neq 3.$$

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{x+3}{x} \cdot \frac{x}{x-3} = \frac{x+3}{x-3}.$$

→ Poi sottraggo quello che resta.

$$\rightarrow \mathbf{1}$$

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 410.

$$\rightarrow \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^2}$$

$$\rightarrow \text{C.E.: } x \neq -1, x \neq 0.$$

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 = \frac{x^2}{(x+1)^2}.$$

→ Poi moltiplico quello che resta.

$$\rightarrow \mathbf{1}$$

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 411.

$$\rightarrow \left(\frac{x+2}{x} \right)^{-1} \cdot \frac{x+2}{x}$$

$$\rightarrow \text{C.E.: } x \neq 0, x \neq -2.$$

→ Risolvo la prima parentesi: $\left(\frac{x+2}{x}\right)^{-1} = \frac{x}{x+2}$.

→ Poi multiplico quello che resta.

→ **1**

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 412.

→ $\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}\right) \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)$

→ C.E.: $x \neq 2, x \neq -2, x \neq 0$.

→ Risolvo la prima parentesi: $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{2x}{(x-2)(x+2)}$.

→ Risolvo la seconda parentesi: $\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2 - 4}{2x}$.

→ Poi multiplico quello che resta.

→ **1**

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 413.

→ $\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)$

→ C.E.: $x \neq 1, x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}$.

→ Risolvo la prima parentesi: $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} = 1$.

→ Risolvo la seconda parentesi: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-1}{x(x-1)}$.

→ Poi divido: rovescio il divisore e semplifico.

→ $\frac{x(x-1)}{2x-1}$

Esercizio 414.

→ $\left(\frac{2}{x+3} + \frac{3}{x-3}\right) \cdot \frac{x^2-9}{5x}$

→ C.E.: $x \neq -3, x \neq 3, x \neq 0$.

→ Risolvo la prima parentesi: $\frac{2}{x+3} + \frac{3}{x-3} = \frac{5x+3}{(x+3)(x-3)}$.

→ Poi moltiplico quello che resta.

$$\rightarrow \frac{5x+3}{5x}$$

Esercizio 415.

$$\rightarrow \left(\frac{1}{x^2 - 8x + 16} - \frac{1}{x - 4} \right) : \frac{x - 5}{x^2 - 8x + 16}$$

→ C.E.: $x \neq 4, x \neq 5$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{1}{x^2 - 8x + 16} - \frac{1}{x - 4} = \frac{-x + 5}{(x - 4)^2}.$$

→ Poi divido: rovescio il divisore e semplifico.

$$\rightarrow -1$$

→ Un risultato numerico: l'espressione vale -1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 416.

$$\rightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \cdot \frac{x^2}{x + 2}$$

→ C.E.: $x \neq 0, x \neq -2$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x + 2}{x^2}.$$

→ Poi moltiplico quello che resta.

$$\rightarrow 1$$

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 417.

$$\rightarrow \left(\frac{x + 5}{x - 5} - 1 \right) : \frac{10}{x - 5}$$

→ C.E.: $x \neq 5$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{x + 5}{x - 5} - 1 = \frac{10}{x - 5}.$$

→ Poi divido: rovescio il divisore e semplifico.

$$\rightarrow 1$$

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 418.

$$\rightarrow \left(\frac{1}{x+6} + \frac{1}{x-6} \right) \cdot \frac{x^2 - 36}{2x}$$

→ C.E.: $x \neq -6, x \neq 6, x \neq 0$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x-6} = \frac{2x}{(x+6)(x-6)}.$$

→ Poi moltiplico quello che resta.

→ **1**

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 419.

$$\rightarrow \left(\frac{2x}{x-7} \right)^2 : \frac{4x^2}{x^2 - 14x + 49}$$

→ C.E.: $x \neq 7, x \neq 0$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \left(\frac{2x}{x-7} \right)^2 = \frac{4x^2}{(x-7)^2}.$$

→ Poi divido: rovescio il divisore e semplifico.

→ **1**

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 420.

$$\rightarrow \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+8} \right) : \frac{8}{x^2 + 8x}$$

→ C.E.: $x \neq 0, x \neq -8$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{1}{x} - \frac{1}{x+8} = \frac{8}{x(x+8)}.$$

→ Poi divido: rovescio il divisore e semplifico.

→ **1**

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 421.

$$\rightarrow \frac{x}{x-9} + \frac{9}{x-9} - \frac{x+9}{x-9}$$

→ C.E.: $x \neq 9$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{x}{x-9} + \frac{9}{x-9} = \frac{x+9}{x-9}.$$

$\rightarrow$ Poi sottraggo quello che resta.

$\rightarrow 0$

Esercizio 422.

$$\rightarrow \frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x}$$

$\rightarrow$ C.E.: $x \neq 0$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{x}{x^2+1} = 1.$$

$\rightarrow$ Poi sommo quello che resta.

$$\rightarrow \frac{x+1}{x}$$

Esercizio 423.

$$\rightarrow \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} \right) : \frac{2x}{x^2-y^2}$$

$\rightarrow$ C.E.: $x \neq -y, x \neq y, x \neq 0$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{2x}{(x+y)(x-y)}.$$

$\rightarrow$ Poi divido: rovescio il divisore e semplifico.

$\rightarrow 1$

$\rightarrow$ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 424.

$$\rightarrow \left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b} \right) : \frac{1}{a-b}$$

$\rightarrow$ C.E.: $a \neq b$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b} = 1.$$

$\rightarrow$ Poi divido: rovescio il divisore e semplifico.

$\rightarrow a - b$

Esercizio 425.

$$\rightarrow \left(\frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{x - 1} \right) : \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$$

→ C.E.: $x \neq 1, x \neq 0$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{x - 1} = \frac{x}{(x - 1)^2}.$$

→ Poi divido: rovescio il divisore e semplifico.

→ **1**

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 426.

$$\rightarrow \left(\frac{x}{x + 2} \right)^{-2} \cdot \frac{x^2}{x^2 + 4x + 4}$$

→ C.E.: $x \neq -2, x \neq 0$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \left(\frac{x}{x + 2} \right)^{-2} = \frac{(x + 2)^2}{x^2}.$$

→ Poi multiplico quello che resta.

→ **1**

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 427.

$$\rightarrow \left(\frac{3}{x} + \frac{3}{x + 3} \right) : \frac{3}{x^2 + 3x}$$

→ C.E.: $x \neq 0, x \neq -3$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{3}{x} + \frac{3}{x + 3} = \frac{6x + 9}{x(x + 3)}.$$

→ Poi divido: rovescio il divisore e semplifico.

→ **$2x + 3$**

Esercizio 428.

$$\rightarrow \left(\frac{x}{x + 4} - \frac{4}{x + 4} \right) \cdot \frac{x + 4}{x - 4}$$

→ C.E.: $x \neq -4, x \neq 4$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{x}{x + 4} - \frac{4}{x + 4} = \frac{x - 4}{x + 4}.$$

→ Poi multiplico quello che resta.

→ **1**

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 429.

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} \right) \cdot \frac{6x}{5}$$

→ C.E.: $x \neq 0$.

→ Risolvo la prima parentesi: $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{5}{6x}$.

→ Poi moltiplico quello che resta.

→ **1**

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 430.

$$\rightarrow \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right) \cdot x + 3$$

→ C.E.: $x \neq 3, x \neq -3$.

→ Risolvo la prima parentesi: $\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} = \frac{1}{x+3}$.

→ Poi moltiplico quello che resta.

→ **1**

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 431.

$$\rightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \cdot xy$$

→ C.E.: $y \neq 0, x \neq 0$.

→ Risolvo la prima parentesi: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$.

→ Poi moltiplico quello che resta.

$$\rightarrow x^2 + y^2$$

Esercizio 432.

$$\rightarrow \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{4}{x^2-1}$$

→ C.E.: $x \neq 1, x \neq -1$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{(x-1)(x+1)}.$$

→ Poi divido: rovescio il divisore e semplifico.

→ **1**

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 433.

$$\rightarrow \left(\frac{x+1}{x} \right)^2 \cdot x^2$$

→ C.E.: $x \neq 0$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \left(\frac{x+1}{x} \right)^2 = \frac{(x+1)^2}{x^2}.$$

→ Poi moltiplico quello che resta.

$$\rightarrow (x+1)^2$$

Esercizio 434.

$$\rightarrow \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right) : \frac{2x}{x^2-4}$$

→ C.E.: $x \neq -2, x \neq 2, x \neq 0$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{2x}{(x+2)(x-2)}.$$

→ Poi divido: rovescio il divisore e semplifico.

→ **1**

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 435.

$$\rightarrow \left(\frac{x-6}{x} \cdot \frac{x^2}{x^2-12x+36} \right) : \frac{x}{x-6}$$

→ C.E.: $x \neq 0, x \neq 6$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{x-6}{x} \cdot \frac{x^2}{x^2-12x+36} = \frac{x}{x-6}.$$

→ Poi divido: rovescio il divisore e semplifico.

→ **1**

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 436.

$$\rightarrow \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-2x+1} \right) : \frac{x}{x^2-2x+1}$$

→ C.E.: $x \neq 1, x \neq 0$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-2x+1} = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

→ Poi divido: rovescio il divisore e semplifico.

→ **1**

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 437.

$$\rightarrow \left(\frac{x}{x+5} - \frac{5}{x+5} \right) \cdot \frac{x+5}{x-5}$$

→ C.E.: $x \neq -5, x \neq 5$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{x}{x+5} - \frac{5}{x+5} = \frac{x-5}{x+5}.$$

→ Poi moltiplico quello che resta.

→ **1**

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 438.

$$\rightarrow \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{-1} : \frac{x-1}{x+1}$$

→ C.E.: $x \neq 1, x \neq -1$.

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{-1} = \frac{x-1}{x+1}.$$

→ Poi divido: rovescio il divisore e semplifico.

→ **1**

→ Un risultato numerico: l'espressione vale 1 *dove esiste*, e le C.E. restano parte della risposta.

Esercizio 439.

$$\rightarrow \frac{x}{x+7} \cdot \frac{x+7}{x-7} + \frac{7}{x-7}$$

$$\rightarrow \text{C.E.: } x \neq -7, x \neq 7.$$

$$\rightarrow \text{Risolvo la prima parentesi: } \frac{x}{x+7} \cdot \frac{x+7}{x-7} = \frac{x}{x-7}.$$

→ Poi sommo quello che resta.

$$\rightarrow \frac{x+7}{x-7}$$

10. Casi limite, errori e parametri**Esercizio 440.**

$$\rightarrow \frac{x+3}{x} = 3$$

→ Provo con un valore ammesso, $x = 1$: il testo vale $\frac{4}{1}$. (la prova numerica non dimostra il vero, ma smaschera il falso in dieci secondi)

→ I due numeri sono diversi: **falso**. L'errore è aver semplificato un *addendo*, che non si può.

Esercizio 441.

$$\rightarrow \frac{x+3}{x} = 1 + \frac{3}{x}$$

→ Provo con un valore ammesso, $x = 1$: il testo vale $\frac{4}{1}$.

→ Il conto torna, e la ragione è che si è semplificato un **fattore**: **vero**.

Esercizio 455.

$$\rightarrow \text{Lo svolgimento proposto: } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2x+1}$$

→ Dov'è l'errore: i denominatori non si sommano: serve il mcm. (il conto sbagliato si riconosce anche provando con un numero)

$$\rightarrow \text{Il risultato giusto è } \frac{2x+1}{x(x+1)}.$$

Esercizio 456.

$$\rightarrow \text{Lo svolgimento proposto: } \frac{3}{x} - \frac{x-1}{x} = \frac{3-x-1}{x} = \frac{2-x}{x}$$

→ Dov'è l'errore: il meno vale per tutto il numeratore: $3 - (x - 1) = 4 - x$.

→ Il risultato giusto è $\frac{-x+4}{x}$.

Esercizio 465.

→ Per quale k la frazione $\frac{x^2-k}{x-2}$ si semplifica?

→ Serve $x^2 - k = (x-2)(x+2)$, e quindi $k = 4$. (si scrive la condizione richiesta e si risolve nel parametro)

→ **$k = 4$**

Esercizio 466.

→ Per quale k la frazione $\frac{5}{x-k}$ ha C.E. $x \neq 3$?

→ Il denominatore si annulla in $x = k$.

→ **$k = 3$**

Esercizio 475.

→ $\frac{?}{x^2-4} = \frac{3}{x-2}$

→ Il risultato è $\frac{3}{x-2}$: per tornare indietro moltiplico numeratore e denominatore per lo stesso fattore, quello che era stato semplificato. (è la proprietà invariantiva letta al contrario)

→ Il denominatore di partenza è $x^2 - 4$: diviso quello del risultato dà il fattore mancante.

→ Sopra c'era quindi **$3x + 6$** .

→ Controllo: semplificando $\frac{3x+6}{x^2-4}$ si ritrova $\frac{3}{x-2}$.

Esercizio 476.

→ $\frac{?}{x-1} = x+1$

→ Il risultato è $x+1$: per tornare indietro moltiplico numeratore e denominatore per lo stesso fattore, quello che era stato semplificato.

→ Il denominatore di partenza è $x-1$: diviso quello del risultato dà il fattore mancante.

→ Sopra c'era quindi **$x^2 - 1$** .

→ Controllo: semplificando $\frac{x^2-1}{x-1}$ si ritrova $x+1$.

Esercizio 485.

→ Dimostra che $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$ (per i valori ammessi).

→ Si dimostra svolgendo il primo membro: se arriva al secondo, l'uguaglianza è vera per ogni valore ammesso. (un'identità non si «risolve»: si trasforma un membro finché diventa l'altro)

→ mcm dei denominatori: $x(x+1)$.

→ Sopra restano $x+1$ e $-x$: sommati danno 1.

→ Semplificando: $\frac{1}{x(x+1)}$, che è il secondo membro.

→ Vale per ogni x che rispetta le C.E.: l'uguaglianza non dice niente sui valori in cui i due membri non esistono.

Esercizio 486.

→ Dimostra che $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$ (per i valori ammessi).

→ Si dimostra svolgendo il primo membro: se arriva al secondo, l'uguaglianza è vera per ogni valore ammesso.

→ mcm dei denominatori: $(x-1)(x+1)$.

→ Sopra restano $x+1$ e $x-1$: sommati danno $2x$.

→ Semplificando: $\frac{2x}{(x-1)(x+1)}$, che è il secondo membro.

→ Vale per ogni x che rispetta le C.E.: l'uguaglianza non dice niente sui valori in cui i due membri non esistono.

Esercizio 487.

→ Dimostra che $\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$ (per i valori ammessi).

→ Si dimostra svolgendo il primo membro: se arriva al secondo, l'uguaglianza è vera per ogni valore ammesso.

→ mcm dei denominatori: $(x-2)(x+2)$.

→ Sopra restano $x+2$ e -4 : sommati danno $x-2$.

→ Semplificando: $\frac{1}{x+2}$, che è il secondo membro.

→ Vale per ogni x che rispetta le C.E.: l'uguaglianza non dice niente sui valori in cui i due membri non esistono.

Esercizio 488.

→ Dimostra che $\frac{x}{x+3} + \frac{3}{x+3} = 1$ (per i valori ammessi).

→ Si dimostra svolgendo il primo membro: se arriva al secondo, l'uguaglianza è vera per ogni valore ammesso.

→ mcm dei denominatori: $(x+3)$.

→ Sopra restano x e 3 : sommati danno $x+3$.

→ Semplificando: **1**, che è il secondo membro.

→ Vale per ogni x che rispetta le C.E.: l'uguaglianza non dice niente sui valori in cui i due membri non esistono.

Esercizio 489.

→ Dimostra che $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ (per i valori ammessi).

→ Si dimostra svolgendo il primo membro: se arriva al secondo, l'uguaglianza è vera per ogni valore ammesso.

→ mcm dei denominatori: xx^2 .

→ Sopra restano x^2 e $-x$: sommati danno $x^2 - x$.

→ Semplificando: $\frac{x-1}{x^2}$, che è il secondo membro.

→ Vale per ogni x che rispetta le C.E.: l'uguaglianza non dice niente sui valori in cui i due membri non esistono.

Esercizio 490.

→ Dimostra che $\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x+4} = \frac{2x}{(x-4)(x+4)}$ (per i valori ammessi).

→ Si dimostra svolgendo il primo membro: se arriva al secondo, l'uguaglianza è vera per ogni valore ammesso.

→ mcm dei denominatori: $(x-4)(x+4)$.

→ Sopra restano $x+4$ e $x-4$: sommati danno $2x$.

→ Semplificando: $\frac{2x}{(x-4)(x+4)}$, che è il secondo membro.

→ Vale per ogni x che rispetta le C.E.: l'uguaglianza non dice niente sui valori in cui i due membri non esistono.

Esercizio 491.

→ Vero o falso: se il numeratore di una frazione algebrica si annulla, la frazione non esiste.

→ La risposta: falso: non esiste dove si annulla il *denominatore*; con numeratore nullo la frazione vale zero.

→ falso

Esercizio 492.

→ Vero o falso: semplificando una frazione le sue C.E. possono cambiare.

→ La risposta: falso: si leggono sulla frazione di partenza e restano fino alla fine.

→ falso

Esercizio 493.

→ Vero o falso: $\frac{a+b}{a}$ si semplifica e dà b .

→ La risposta: falso: a è un addendo, non un fattore. Con $a = b = 1$ il testo vale 2 e la «semplificazione» 1.

→ falso

Esercizio 494.

→ Vero o falso: il prodotto di due frazioni algebriche esiste dove esistono entrambe.

→ La risposta: vero: le C.E. del prodotto sono tutte le condizioni dei due fattori.

→ vero

Esercizio 495.

→ Vero o falso: nella divisione $\frac{A}{B} : \frac{C}{D}$ bastano le condizioni $B \neq 0$ e $D \neq 0$.

→ La risposta: falso: serve anche $C \neq 0$, perché C diventa un denominatore.

→ falso

Esercizio 496.

→ Vero o falso: $\frac{x-1}{1-x} = -1$ per ogni valore di x .

→ La risposta: falso: vale -1 per $x \neq 1$; in $x = 1$ la frazione non esiste.

→ falso

Esercizio 497.

→ Vero o falso: per sommare due frazioni si può sempre usare come denominatore comune il prodotto dei denominatori.

→ La risposta: vero, e il risultato è corretto: ma non essendo il mcm va poi semplificato.

→ vero

Esercizio 498.

→ Vero o falso: $\left(\frac{A}{B}\right)^{-1} = \frac{B}{A}$ senza nessuna condizione.

→ La risposta: falso: servono $A \neq 0$ e $B \neq 0$, perché anche A finisce sotto.

→ falso

Esercizio 499.

→ Vero o falso: una frazione con denominatore $x^2 + 1$ esiste per ogni valore di x .

→ La risposta: vero: una somma di quadrati non si annulla mai, quindi non ci sono C.E..

→ vero

Esercizio 500.

→ Vero o falso: se due frazioni hanno lo stesso denominatore, la loro somma ha per numeratore la somma dei numeratori.

→ La risposta: vero, ed è l'unico caso in cui il mcm non serve.

→ vero
