

# FORMULARIO: EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

In ogni riquadro: la regola con le sue condizioni e un esempio con i numeri.

## 1 Che cos'è

### 1.1 Identità ed equazione

**Identità:** uguaglianza vera per *qualsunque* valore delle lettere. **Equazione:** vera solo per *particolari* valori, detti soluzioni. A sinistra dell'uguale c'è il **primo membro**, a destra il **secondo**.

#### ESEMPIO

$$2(x + 3) = 2x + 6 \text{ identità} \quad 3x + 2 = 11 \text{ equazione}$$

### 1.2 Grado e forma $ax = b$

Il grado si guarda **dopo** aver svolto i calcoli. Ogni equazione di primo grado si riduce a

$$ax = b$$

con  $a$  e  $b$  numeri (o espressioni nel parametro, se è letterale).

#### ESEMPIO

$(x + 1)^2 = x^2 + 3$  sembra di secondo grado: sviluppando i termini  $x^2$  si elidono e resta  $2x = 2$ .

### 1.3 Le tre possibilità

| Caso          | Condizione        | Soluzioni                |
|---------------|-------------------|--------------------------|
| determinata   | $a \neq 0$        | una: $x = \frac{b}{a}$   |
| impossibile   | $a = 0, b \neq 0$ | nessuna: $S = \emptyset$ |
| indeterminata | $a = 0, b = 0$    | tutte                    |

#### ESEMPIO

$0 \cdot x = 3$  impossibile;  $0 \cdot x = 0$  indeterminata;  $3x = 0$  determinata, con  $x = 0$ .

## 2 I due principi

### 2.1 Primo principio

Aggiungendo o togliendo la **stessa quantità ai due membri** si ottiene un'equazione equivalente.

$$A = B \iff A + c = B + c$$

In pratica: un termine si sposta da un membro all'altro **cambiando segno**.

#### ESEMPIO

$$3x - 5 = x + 1 \longrightarrow 3x - x = 1 + 5$$

### 2.2 Secondo principio

Moltiplicando o dividendo i due membri per uno **stesso numero diverso da zero** si ottiene un'equazione equivalente.

$$A = B \iff A \cdot c = B \cdot c \quad (c \neq 0)$$

In pratica: si tolgono i denominatori col mcm, e alla fine si divide per il coefficiente dell'incognita.

#### ESEMPIO

$$2x = 6 \longrightarrow x = 3 \quad \frac{x}{2} = 3 \longrightarrow x = 6$$

La condizione  $c \neq 0$  è tutta la discussione delle letterali.

## 3 Come si risolvono

### 3.1 Equazione intera: i cinque passi

- 1 svolgi i calcoli nei due membri
- 2 porta le  $x$  a sinistra e i numeri a destra, cambiando segno
- 3 somma i simili: resta  $ax = b$
- 4 dividi per  $a$
- 5 verifica nell'equazione di partenza

#### ESEMPIO

$$2(x - 3) + 4 = 5x - 8 \longrightarrow 2x - 2 = 5x - 8 \longrightarrow -3x = -6 \longrightarrow x = 2.$$

### 3.2 Coefficienti frazionari

Si calcola il mcm dei denominatori e si moltiplica per quello **ogni** termine dei due membri, compresi quelli senza denominatore.

#### ESEMPIO

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x}{3} = \frac{1}{6} \rightarrow 3(x-1) - 2x = 1 \rightarrow x = 4$$

$$\frac{x}{2} + 3 = \frac{x}{4} \rightarrow 2x + 12 = x \quad (\text{non } 2x + 3 = x)$$

### 3.3 Equazione fratta

L'incognita è a denominatore. **Prima** le condizioni di esistenza (C.E.): ogni denominatore diverso da zero. Poi si moltiplica per il mcm, si risolve, e la soluzione si **confronta con le C.E.**: se le viola si scarta.

#### ESEMPIO

$$\frac{2}{x-1} = \frac{3}{x+2} \quad \text{C.E. } x \neq 1, x \neq -2$$

$$2(x+2) = 3(x-1) \rightarrow x = 7 \text{ accettabile}$$

### 3.4 Quando la soluzione si scarta

Se l'unico valore trovato è vietato dalle C.E., l'equazione è **impossibile**: non si scrive quel numero come soluzione.

#### ESEMPIO

$$\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2} \quad \text{C.E. } x \neq 2$$

$$x = 2 \text{ vietato} \rightarrow S = \emptyset$$

### 3.5 Equazione letterale: la discussione

Ridotta a  $ax = b$ , con  $a$  e  $b$  espressioni nel parametro:

- se  $a \neq 0$ : determinata,  $x = \frac{b}{a}$ ;
- se  $a = 0$  e  $b \neq 0$ : impossibile;
- se  $a = 0$  e  $b = 0$ : indeterminata.

I valori critici sono quelli che **annullano il coefficiente**.

**ESEMPIO**

$$(k-1)x = k^2 - 1 : \quad k \neq 1 \Rightarrow x = k+1; \quad k = 1 \Rightarrow \text{indeterminata}$$

$$ax = 2a - 4 : \quad a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{2a-4}{a}; \quad a = 0 \Rightarrow \text{impossibile}$$

**4 Problemi e verifica****4.1 Tradurre un problema**

Si scrive **a parole** che cosa si chiama  $x$ , si esprimono le altre quantità in funzione di  $x$ , si traduce la frase che dà l'uguaglianza. Alla fine si torna al problema: la soluzione deve avere senso.

**ESEMPIO**

«Marco ha 12 anni più di Luca; fra 4 anni ne avrà il doppio.»  
 $x = \text{età di Luca oggi} \rightarrow x + 16 = 2(x + 4) \rightarrow x = 8.$

**4.2 Le traduzioni più frequenti**

|                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| il doppio di $x$                | $2x$                            |
| il triplo di $x$ diminuito di 5 | $3x - 5$                        |
| due numeri consecutivi          | $x$ e $x + 1$                   |
| due numeri pari consecutivi     | $x$ e $x + 2$                   |
| fra $n$ anni                    | $x + n$                         |
| $n$ anni fa                     | $x - n$                         |
| la metà di $x$ aumentata di 3   | $\frac{x}{2} + 3$               |
| il 20% di $x$                   | $\frac{20}{100}x = \frac{x}{5}$ |

**ESEMPIO**

«Il triplo di un numero, diminuito di 5, è uguale al doppio del numero aumentato di 1»:  
 $3x - 5 = 2x + 1$ , da cui  $x = 6$ .

**4.3 Il meno davanti a una frazione**

Il segno meno davanti a una frazione vale per **tutto** il numeratore: quando si tolgono i denominatori, cambiano i segni di ogni termine.

**ESEMPIO**

$$-\frac{x-1}{2} = \frac{-x+1}{2} \quad \text{non} \quad \frac{-x-1}{2}$$

$$x - \frac{x-3}{4} = 1 \rightarrow 4x - (x-3) = 4 \rightarrow 3x + 3 = 4$$

#### 4.4 Coefficienti decimali

Si moltiplicano i due membri per una potenza di 10 che li faccia diventare interi: è il secondo principio, e da lì in poi è un'equazione normale.

##### ESEMPIO

$$0,5x + 1,2 = 2 \longrightarrow 5x + 12 = 20 \longrightarrow x = \frac{8}{5}$$

#### 4.5 Come si scrive la risposta

Una soluzione si scrive  $x = \frac{3}{2}$ , in forma di frazione ridotta, non in decimale. Se non ce ne sono si scrive  $S = \emptyset$ ; se ce ne sono infinite si scrive «indeterminata». Nelle fratte la risposta comprende le C.E.

##### ESEMPIO

$x = \frac{7}{2}$  (non 3,5)     $S = \emptyset$     C.E.  $x \neq 1$ , soluzione  $x = 7$ : accettabile.

#### 4.6 Verifica

Si sostituisce la soluzione nell'**equazione di partenza** — non nell'ultima riga scritta — e si calcolano i due membri separatamente: devono dare lo stesso numero. Nelle fratte si controllano anche le C.E.

##### ESEMPIO

$3(x - 2) = x + 4$  con  $x = 5$ : primo membro  $3 \cdot 3 = 9$ , secondo membro 9. Torna.

#### Che cosa rispondere, in una riga

| Se resta                                 | La risposta è                   |
|------------------------------------------|---------------------------------|
| $ax = b$ con $a \neq 0$                  | $x = \frac{b}{a}$               |
| $0 \cdot x = 0$                          | indeterminata: ogni $x$ va bene |
| $0 \cdot x = b$ con $b \neq 0$           | impossibile: $S = \emptyset$    |
| una soluzione vietata dalle C.E.         | impossibile: $S = \emptyset$    |
| un parametro che annulla il coefficiente | si discute quel caso a parte    |
| una misura negativa in un problema       | il problema non ha soluzione    |

#### I sei errori che costano di più

- Spostare un termine *senza* cambiargli segno.
- Moltiplicare per il mcm solo i termini che hanno il denominatore.

- Dividere per il coefficiente dell'incognita senza chiedersi se può essere zero (letterali).
- Risolvere una fratta senza scrivere le C.E., e tenere una soluzione vietata.
- Confondere  $0 \cdot x = 0$  (indeterminata) con  $0 \cdot x = 5$  (impossibile).
- Dare per buona la soluzione di un problema senza controllare che abbia senso.