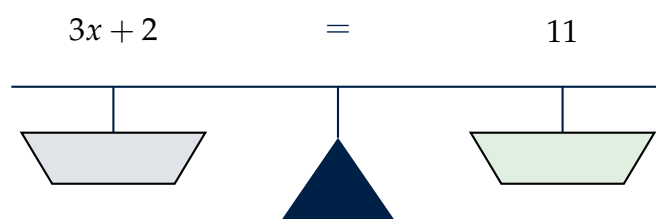


EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

ALGEBRA

Principi di equivalenza, frazioni,
equazioni fratte, letterali e problemi



Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima di partire	3
2	Identità ed equazioni	3
3	Soluzione, grado, classificazione	4
4	I due principi di equivalenza	5
5	Risolvere un'equazione intera	6
6	Parentesi e prodotti notevoli	7
7	Coefficienti frazionari	8
8	Equazioni fratte: le condizioni di esistenza	9
9	Equazioni letterali: la discussione	10
10	Impossibili e indeterminate	11
11	Dai problemi alle equazioni	12
12	La verifica, e cosa fare quando non torna	13

1 Cosa serve prima di partire

Risolvere un'equazione è fare due cose: sistemare le espressioni ai due lati, e spostare i pezzi da una parte all'altra senza rompere l'uguaglianza. La prima parte è tutta roba dei capitoli precedenti.

Cosa devi già sapere

- **Somme di polinomi e il meno davanti alla parentesi.** $-(2x - 5) = -2x + 5$: cambiano *tutti* i segni.
- **I prodotti notevoli.** $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$, e $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$. Servono perché nelle equazioni da compito i termini di secondo grado si elidono fra loro.
- **Le frazioni.** Il mcm dei denominatori, e la somma: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
- **Il valore numerico.** Sostituire un numero in un'espressione, parentesi comprese: è la verifica di ogni equazione risolta.

Esempio Svolto 1.1: Riscaldamento: tre conti che tornano a ogni pagina:

1. Il meno davanti alla parentesi.

$$3x - (x - 4) = 3x - x + 4 = 2x + 4$$

2. Un prodotto notevole.

$$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

3. Somma di frazioni col mcm.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{3x + 2x}{6} = \frac{5x}{6}$$

Se il primo è venuto $2x - 4$, conviene tornare mezz'ora sui polinomi: in questo capitolo quel segno decide il risultato di un esercizio su tre.

2 Identità ed equazioni

Due espressioni separate da un uguale possono essere due cose molto diverse.

Formula 2.1: Identità ed equazione:

- Un'**identità** è un'uguaglianza vera per *qualsunque* valore delle lettere: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
- Un'**equazione** è un'uguaglianza vera solo per *particolari* valori delle lettere: $3x + 2 =$

11.

Le lettere di cui si cercano i valori si chiamano **incognite**. Quello che sta a sinistra dell'uguale è il **primo membro**, quello a destra il **secondo membro**.

Esempio Svolto 2.1: Una è vera sempre, l'altra quasi mai:

1. $2(x + 3) = 2x + 6$. Provo con $x = 0$: $6 = 6$. Con $x = 5$: $16 = 16$. Con $x = -1$: $4 = 4$.

Non è un caso: sviluppando il primo membro si ottiene esattamente il secondo. È un'identità.

2. $3x + 2 = 11$. Con $x = 0$: $2 = 11$, falso. Con $x = 3$: $11 = 11$, vero. Con $x = 5$: $17 = 11$, falso.

È un'equazione, e $x = 3$ è la sua soluzione.

3. **Come si distinguono senza provare a caso.** Si svolgono i calcoli nei due membri: se restano identici è un'identità, se restano diversi è un'equazione.

3 Soluzione, grado, classificazione

Formula 3.1: Soluzione e grado: Una **soluzione** (o radice) è un valore che, sostituito all'incognita, rende vera l'uguaglianza. **Risolvere** un'equazione vuol dire trovarle tutte. Il **grado** è il grado dell'incognita *dopo* aver svolto tutti i calcoli e portato tutto a un membro. Un'equazione di primo grado si riduce sempre alla forma

$$ax = b \quad \text{con } a \text{ e } b \text{ numeri}$$

Formula 3.2: Le tre possibilità: Ridotta a $ax = b$, un'equazione è

- **determinata** se $a \neq 0$: una sola soluzione, $x = \frac{b}{a}$;
- **impossibile** se $a = 0$ e $b \neq 0$: nessun numero moltiplicato per zero dà b . Si scrive $S = \emptyset$;
- **indeterminata** se $a = 0$ e $b = 0$: ogni numero è soluzione, ed è un'identità.

Esempio Svolto 3.1: Verificare una soluzione:

L'equazione è $2x - 1 = x + 2$.

1. **Provo** $x = 3$. Primo membro: $2 \cdot 3 - 1 = 5$. Secondo membro: $3 + 2 = 5$. Uguali, quindi $x = 3$ è soluzione.

2. Provo $x = 1$. Primo membro: $2 - 1 = 1$. Secondo membro: $1 + 2 = 3$. Diversi, quindi $x = 1$ non è soluzione.

3. Attenzione. Verificare non è risolvere: dice se un numero *dato* va bene, non trova quello giusto. Ma è il controllo con cui si chiude ogni esercizio, e costa dieci secondi.

Il grado si guarda alla fine, non all'inizio

L'equazione $(x + 1)^2 = x^2 + 3$ sembra di secondo grado. Svolgendo:

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 3 \rightarrow 2x + 1 = 3$$

I termini x^2 si elidono: è di **primo** grado, e la soluzione è $x = 1$.

Vale anche il contrario: un'equazione che sembra semplice può nascondere un grado più alto. Prima si svolgono i calcoli, poi si dice che grado ha.

4 I due principi di equivalenza

Due equazioni sono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni. Risolvere vuol dire trasformare l'equazione in un'altra equivalente, più semplice, finché resta $x = \text{qualcosa}$. Le trasformazioni permesse sono due.

Formula 4.1: Primo principio: Aggiungendo o togliendo **la stessa quantità ai due membri** si ottiene un'equazione equivalente.

$$A = B \iff A + c = B + c$$

La conseguenza pratica: un termine si può **spostare** da un membro all'altro, purché **cambi segno**.

Formula 4.2: Secondo principio: Moltiplicando o dividendo **i due membri per uno stesso numero diverso da zero** si ottiene un'equazione equivalente.

$$A = B \iff A \cdot c = B \cdot c \quad (c \neq 0)$$

La conseguenza pratica: si possono togliere i denominatori moltiplicando tutto per il mcm, e alla fine si divide per il coefficiente dell'incognita.

La condizione $c \neq 0$ non è un dettaglio: è tutta la discussione delle equazioni letterali del paragrafo 9.

Esempio Svolto 4.1: I due principi, uno alla volta:

L'equazione è $3x - 5 = x + 1$.

1. Primo principio, per portare le x a sinistra: si toglie x ai due membri.

$$3x - 5 - x = x + 1 - x \longrightarrow 2x - 5 = 1$$

2. Primo principio, per portare i numeri a destra: si aggiunge 5 ai due membri.

$$2x - 5 + 5 = 1 + 5 \longrightarrow 2x = 6$$

3. Secondo principio: si divide per 2, che è diverso da zero.

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \longrightarrow x = 3$$

4. Verifica, nell'equazione di partenza: $3 \cdot 3 - 5 = 4$ e $3 + 1 = 4$. Torna.

5. In pratica non si scrive « $-x$ ai due membri»: si sposta il termine cambiandogli segno. È la stessa cosa, scritta più corta.

Si sposta un termine, e cambia segno solo lui

Da $3x - 5 = x + 1$ si passa a $3x - x = 1 + 5$: la x che era $+x$ diventa $-x$, il -5 diventa $+5$. Gli altri termini **non** si toccano.

L'errore tipico è cambiare segno a tutto il membro: $3x - 5 = x + 1 \nrightarrow -3x + 5 = x + 1$. Quello sarebbe moltiplicare per -1 un membro solo, e i due principi non lo permettono.

5 Risolvere un'equazione intera**Metodo 5.1: I cinque passi, sempre gli stessi:**

1. Svolgi i calcoli nei due membri: parentesi, prodotti notevoli, termini simili.
2. Porta i termini con l'incognita al primo membro e i numeri al secondo, cambiando segno a quelli che si spostano.
3. Somma i termini simili: resti con $ax = b$.
4. Dividi i due membri per a (se $a \neq 0$).
5. **Verifica** sostituendo nell'equazione di partenza.

Esempio Svolto 5.1: $2(x - 3) + 4 = 5x - 8$:

1. Svolgo i calcoli.

$$2x - 6 + 4 = 5x - 8 \longrightarrow 2x - 2 = 5x - 8$$

2. Porto le x a sinistra e i numeri a destra.

$$2x - 5x = -8 + 2$$

3. Sommo i simili.

$$-3x = -6$$

4. Divido per -3 .

$$x = 2$$

5. Verifica nell'equazione di partenza: primo membro $2(2 - 3) + 4 = -2 + 4 = 2$; secondo membro $5 \cdot 2 - 8 = 2$. Torna.

Perché la verifica si fa sull'equazione di partenza

Perché è l'unica che non è stata toccata. Se un passaggio in mezzo è sbagliato, verificare sull'ultima riga scritta non se ne accorge: torna comunque. Sostituire nell'originale è un controllo *indipendente* dal procedimento, ed è per questo che vale la pena farlo sempre.

6 Parentesi e prodotti notevoli

Nelle equazioni da compito i due membri sono quasi sempre da sviluppare, e spesso compaiono quadrati di binomio o somme per differenza. I termini di secondo grado si elidono: se non si elidono, l'equazione non è di primo grado e non è di questo capitolo.

Esempio Svolto 6.1: $(x + 2)^2 - (x - 1)^2 = 15$:**1. Sviluppo i due quadrati.**

$$(x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 2x + 1) = 15$$

2. Tolgo la parentesi col meno davanti, cambiando tutti i segni.

$$x^2 + 4x + 4 - x^2 + 2x - 1 = 15$$

3. Sommo i simili. I due x^2 si elidono: resta primo grado.

$$6x + 3 = 15$$

4. Risolvo.

$$6x = 12 \longrightarrow x = 2$$

5. Verifica. $(2 + 2)^2 - (2 - 1)^2 = 16 - 1 = 15$. Torna.

La x non si semplifica

Da $x^2 + 4x = x^2 + 6$ **non** si «semplifica x^2 » come si fa in una frazione: si *sottrae* x^2 ai due membri, che è il primo principio, e si ottiene $4x = 6$.

Il risultato è lo stesso, ma la parola giusta conta: «semplificare» in un'equazione porta prima o poi a dividere per x , e dividere per una quantità che può essere zero non è permesso. È l'errore che nelle equazioni di secondo grado fa perdere una soluzione su due.

7 Coefficienti frazionari

Metodo 7.1: Togliere i denominatori:

1. Svolgi i calcoli dentro le frazioni, se ce ne sono.
2. Calcola il mcm di **tutti** i denominatori.
3. Moltiplica per quel mcm **ogni** termine dei due membri: i denominatori spariscono.
4. Da qui in poi è un'equazione intera: cinque passi del paragrafo 5.

Esempio Svolto 7.1: $\frac{x-1}{2} - \frac{x}{3} = \frac{1}{6}$:

1. Il mcm dei denominatori 2, 3, 6 è 6.

2. Moltiplico ogni termine per 6.

$$6 \cdot \frac{x-1}{2} - 6 \cdot \frac{x}{3} = 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$3(x-1) - 2x = 1$$

3. Svolgo e risolvo.

$$3x - 3 - 2x = 1 \rightarrow x = 4$$

4. Verifica nell'equazione di partenza: $\frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{9-8}{6} = \frac{1}{6}$. Torna.

Il mcm moltiplica *tutti* i termini

Il secondo principio dice: si moltiplicano i **due membri**, cioè ogni termine di ognuno. Dimenticare il termine senza denominatore è l'errore più frequente del paragrafo:

$$\frac{x}{2} + 3 = \frac{x}{4} \rightarrow 2x + 12 = x \quad \text{non} \quad 2x + 3 = x$$

Il 3 diventa 12, perché anche lui va moltiplicato per 4.

8 Equazioni fratte: le condizioni di esistenza

Un'equazione è **fratta** quando l'incognita compare a denominatore. Cambia una cosa sola, ma cambia tutto: certi valori di x sono vietati, perché renderebbero nullo un denominatore, e nessuna frazione ha senso con lo zero sotto.

Formula 8.1: Condizioni di esistenza: Prima di risolvere si impongono le **condizioni di esistenza** (C.E.): ogni denominatore deve essere diverso da zero.

$$\frac{2}{x-1} = 3 \rightarrow \text{C.E.: } x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

Alla fine la soluzione trovata si confronta con le C.E.: se le viola, si **scarta**, e l'equazione è impossibile.

Metodo 8.1: Risolvere una fratta:

1. Scomponi i denominatori, se serve, e scrivi le **C.E.**
2. Calcola il mcm dei denominatori e moltiplica ogni termine per quello: sotto le C.E. il mcm non è zero, quindi il secondo principio si applica.
3. Risolvi l'equazione intera che resta.
4. **Confronta con le C.E.:** se la soluzione è vietata, si scarta e si scrive $S = \emptyset$.
5. Verifica sostituendo nell'equazione di partenza.

Esempio Svolto 8.1: $\frac{2}{x-1} = \frac{3}{x+2}$:

1. **C.E.** I denominatori non devono annullarsi:

$$x-1 \neq 0 \text{ e } x+2 \neq 0 \rightarrow x \neq 1 \text{ e } x \neq -2$$

2. **Moltiplico in croce** — che è il mcm $(x-1)(x+2)$ applicato ai due membri.

$$2(x+2) = 3(x-1)$$

3. **Risolvo.**

$$2x+4 = 3x-3 \rightarrow -x = -7 \rightarrow x = 7$$

4. **Controllo le C.E.** 7 è diverso da 1 e da -2: la soluzione è accettabile.

5. **Verifica.** $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ e $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Torna.

Esempio Svolto 8.2: Quando la soluzione va buttata: $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2}$:

1. C.E. $x - 2 \neq 0$, cioè $x \neq 2$.

2. I denominatori sono uguali: moltiplicando per $x - 2$ restano i numeratori.

$$x = 2$$

3. Il confronto con le C.E. L'unico valore trovato è proprio quello vietato: $x = 2$ **non** è accettabile.

4. Conclusione. L'equazione è impossibile: $S = \emptyset$.

5. Perché è giusto così. Con $x = 2$ i due membri diventano $\frac{2}{0}$, che non è un numero. Un valore che non si può nemmeno sostituire non può essere una soluzione.

Senza C.E. si risponde una cosa per un'altra

Chi risolve $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2}$ senza scrivere le C.E. trova $x = 2$ e la dà per buona: risposta sbagliata, e l'errore non si vede da nessuna parte nel procedimento.

Le C.E. si scrivono **prima** di risolvere, non dopo aver trovato il risultato: dopo, si è già convinti che il numero sia giusto.

9 Equazioni letterali: la discussione

Un'equazione **letterale** contiene, oltre all'incognita, altre lettere chiamate **parametri**. Non è un'equazione sola: è una famiglia di equazioni, una per ogni valore del parametro. Risolverla vuol dire dire cosa succede in *tutti* i casi, e questo si chiama **discussione**.

Metodo 9.1: Discutere un'equazione letterale:

1. Porta l'equazione nella forma $ax = b$, dove ora a e b sono espressioni nel parametro.
2. **Caso generale:** se $a \neq 0$, l'equazione è determinata e $x = \frac{b}{a}$.
3. Trova i valori del parametro che **annullano** a .
4. Per ciascuno, sostituisci: se resta $0 = 0$ l'equazione è indeterminata; se resta $0 = b$ con $b \neq 0$ è impossibile.

Esempio Svolto 9.1: $ax = 2a - 4$, nell'incognita x :

1. È già nella forma $ax = b$, con coefficiente a e termine noto $2a - 4$.

2. **Caso generale**, $a \neq 0$: si divide per a .

$$x = \frac{2a - 4}{a}$$

3. **Il valore critico** è $a = 0$, l'unico che annulla il coefficiente.

4. **Sostituisco** $a = 0$: l'equazione diventa

$$0 \cdot x = -4$$

Nessun numero moltiplicato per zero dà -4 : **impossibile**.

5. **Risposta completa**. Per $a \neq 0$ determinata con $x = \frac{2a - 4}{a}$; per $a = 0$ impossibile.

Esempio Svolto 9.2: $(k - 1)x = k^2 - 1$: qui capitano tutti e tre i casi:

1. **Coefficiente** $k - 1$, termine noto $k^2 - 1$.

2. **Caso generale**, $k \neq 1$:

$$x = \frac{k^2 - 1}{k - 1} = \frac{(k + 1)(k - 1)}{k - 1} = k + 1$$

Il numeratore era una differenza di quadrati: si semplifica, e la soluzione è pulita.

3. **Il valore critico** è $k = 1$.

4. **Sostituisco** $k = 1$: il coefficiente diventa 0 e anche il termine noto, perché $1^2 - 1 = 0$.

$$0 \cdot x = 0$$

Vera per ogni x : **indeterminata**.

5. **Risposta completa**. Per $k \neq 1$ determinata con $x = k + 1$; per $k = 1$ indeterminata.

6. **Controllo**, con $k = 3$: l'equazione è $2x = 8$, e $x = 4 = k + 1$. Torna.

Dividere per il parametro senza chiedersi se è zero

Il passaggio da $ax = 2a - 4$ a $x = \frac{2a - 4}{a}$ è lecito **solo** per $a \neq 0$: il secondo principio lo dice a chiare lettere.

Chi divide e basta consegna un esercizio a cui manca metà risposta — ed è metà anche del punteggio, perché la discussione è l'esercizio.

10 Impossibili e indeterminate

Capitano anche senza parametri, e all'inizio spaventano perché l'incognita sparisce. Non c'è niente di rotto: sparita l'incognita, resta un'uguaglianza fra numeri, e quella dice la risposta.

Esempio Svolto 10.1: Due equazioni in cui la x se ne va:

1. $2(x + 1) = 2x + 5.$

$$2x + 2 = 2x + 5 \longrightarrow 2x - 2x = 5 - 2 \longrightarrow 0 \cdot x = 3$$

Nessun numero per zero dà 3: **impossibile**, $S = \emptyset$.

2. $3(x - 2) = 3x - 6.$

$$3x - 6 = 3x - 6 \longrightarrow 0 \cdot x = 0$$

Vera per ogni x : **indeterminata**. Era un'identità travestita da equazione.

3. Come si riconoscono a colpo d'occhio. Se i due membri, svolti, hanno lo *stesso* coefficiente della x , l'incognita sparirà: guarda i termini noti e hai già la risposta.

 $0 \cdot x = 0$ e $0 \cdot x = 5$ sono opposte

Si scrivono quasi uguali e vogliono dire il contrario:

- $0 \cdot x = 0$: **ogni** numero va bene, indeterminata;
- $0 \cdot x = 5$: **nessun** numero va bene, impossibile.

E nessuna delle due si scrive « $x = 0$ »: quello è un terzo caso ancora, ed è la soluzione di $ax = 0$ con $a \neq 0$.

11 Dai problemi alle equazioni

È il motivo per cui le equazioni esistono. Il lavoro vero non è risolvere: è **scegliere l'incognita** e scrivere la frase in simboli.

Metodo 11.1: Tradurre un problema:

1. Leggi due volte e scrivi **che cosa chiama** x : « x = età di Marco oggi». Una frase, non un simbolo solo.
2. Scrivi le altre quantità in funzione di x .
3. Trova nel testo la frase che dice l'uguaglianza, e traducila.
4. Risolvi.
5. **Torna al problema:** la soluzione ha senso? Un'età negativa, un lato nullo o un numero di persone con la virgola si scartano.

Esempio Svolto 11.1: Un problema di età:

Marco ha 12 anni più di Luca. Fra 4 anni Marco avrà il doppio di Luca. Quanti anni hanno oggi?

1. Scelgo l'incognita. x = età di Luca oggi. Allora Marco ha $x + 12$.

2. Fra 4 anni: Luca avrà $x + 4$, Marco $x + 16$.

3. La frase che dà l'uguaglianza: «Marco avrà il doppio di Luca».

$$x + 16 = 2(x + 4)$$

4. Risolvo.

$$x + 16 = 2x + 8 \rightarrow -x = -8 \rightarrow x = 8$$

5. Torno al problema. Luca ha 8 anni, Marco 20. Fra 4 anni: 12 e 24, e 24 è il doppio di 12. Torna, e le età sono positive: la soluzione ha senso.

Esempio Svolto 11.2: Un problema di geometria:

Un rettangolo ha la base che supera di 3 cm l'altezza, e il perimetro è 26 cm. Quanto misurano i lati?

1. Incognita. x = altezza in centimetri; la base è $x + 3$.

2. L'uguaglianza è data dal perimetro.

$$2[x + (x + 3)] = 26$$

3. Risolvo.

$$2(2x + 3) = 26 \rightarrow 4x + 6 = 26 \rightarrow 4x = 20 \rightarrow x = 5$$

4. Torno al problema. Altezza 5 cm, base 8 cm. Perimetro: $2(5 + 8) = 26$. Torna, e le misure sono positive.

5. Se fosse venuto $x = -2$, la risposta sarebbe «il problema non ha soluzione»: un lato non può essere negativo. L'equazione non lo sa, il problema sì.

12 La verifica, e cosa fare quando non torna

Formula 12.1: Verificare: Si sostituisce la soluzione nell'equazione di partenza, si calcolano i due membri separatamente e si controlla che diano lo stesso numero.

$$\text{primo membro} \stackrel{?}{=} \text{secondo membro}$$

Nelle fratte si controlla anche che la soluzione rispetti le C.E.

Esempio Svolto 12.1: Una verifica che non torna, e come si trova l'errore:

Un compito consegna: $3(x - 2) = x + 4$, soluzione $x = 1$.

1. Verifico. Primo membro: $3(1 - 2) = -3$. Secondo membro: $1 + 4 = 5$. Non torna: $-3 \neq 5$.

2. Rifaccio.

$$3x - 6 = x + 4 \longrightarrow 3x - x = 4 + 6 \longrightarrow 2x = 10 \longrightarrow \mathbf{x = 5}$$

3. Verifico la nuova. $3(5 - 2) = 9$ e $5 + 4 = 9$. Torna.

4. Dov'era l'errore. Il -6 era stato spostato senza cambiare segno: $3x - x = 4 - 6$ dà $2x = -2$, cioè $x = -1$; e chi poi sbaglia anche il segno finale scrive 1. Due errori piccoli, una risposta sbagliata.

5. La morale. La verifica non dice *dove* si è sbagliato, ma dice *che* si è sbagliato — e costa dieci secondi su un esercizio che ne costa cinque minuti.

Dove si va da qui

Con un'equazione di primo grado si risolve un problema per volta. Con due incognite servono i *sistemi*; quando l'incognita compare al quadrato e i termini non si elidono servono le equazioni di *secondo grado*; se al posto dell'uguale c'è un minore o un maggiore, sono le *disequazioni*.

Tutte e tre poggiano su questi due principi. Cambia cosa si fa dopo, non le regole per muovere i pezzi.

Indice analitico

Condizioni di esistenza, 9

Discussione, 10

Equazione, 3

Equazione determinata, 4

Equazione impossibile, 4, 11

Equazione indeterminata, 4, 11

Equazione intera, 6

Equazioni con prodotti notevoli, 7

Equazioni equivalenti, 5

Equazioni fratte, 9

Equazioni frazionarie, 8

Equazioni letterali, 10

Grado di un'equazione, 4

Identità, 3

Incognita, 3

Membro, 3

Minimo comune multiplo, 8

Parametro, 10

Principi di equivalenza, 5

Problemi con le equazioni, 12

Soluzione di un'equazione, 4

Traduzione algebrica, 12

Verifica, 13