

FORMULARIO: DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

In ogni riquadro: la regola con le sue condizioni e un esempio con i numeri.

1 Che cos'è

1.1 Disequazione e insieme delle soluzioni

Una **disequazione** è una disuguaglianza fra due espressioni con un'incognita. **Risolverla** vuol dire trovare *tutti* i valori che la rendono vera: quell'insieme si chiama **insieme delle soluzioni** e si scrive S .

La risposta non è mai un numero solo: è un pezzo di retta.

ESEMPIO

$2x - 3 < x + 5$ ha soluzioni $x < 8$, cioè $S = (-\infty, 8)$. Il numero 4 è *una* soluzione, non *la* soluzione.

1.2 I quattro simboli, e come si chiamano

$<$	minore	stretta
$>$	maggiore	stretta
$\leq$	minore o uguale	larga
$\geq$	maggiore o uguale	larga

ESEMPIO

La direzione del simbolo si chiama **verso**. Le larghe portano l'estremo *dentro* l'insieme, le strette lo lasciano fuori: $x \leq 2$ contiene 2, $x < 2$ no.

1.3 Grado e forma $ax \lessgtr b$

Il grado si guarda **dopo** aver svolto i calcoli. Ogni disequazione di primo grado si riduce a una delle quattro forme

$$ax < b \quad ax > b \quad ax \leq b \quad ax \geq b$$

con a e b numeri (o espressioni nel parametro, se è letterale).

ESEMPIO

$(x + 1)^2 > x^2 + 3$ sembra di secondo grado: sviluppando, i termini x^2 si elidono e resta $2x > 2$.

2 Le tre proprietà del confronto

2.1 Somma: il verso non cambia

Aggiungendo o togliendo lo stesso numero ai due membri, il verso resta.

$$a < b \implies a + c < b + c \quad \text{per ogni } c$$

Vale anche quando i due membri diventano negativi.

ESEMPIO

$$-3 < 5 \longrightarrow -3 - 8 < 5 - 8 \longrightarrow -11 < -3$$

2.2 Prodotto per un numero positivo: il verso non cambia

$$a < b \implies a \cdot c < b \cdot c \quad (c > 0)$$

Vale identico per la divisione.

ESEMPIO

$$-3 < 5 \longrightarrow -3 \cdot 2 < 5 \cdot 2 \longrightarrow -6 < 10$$

2.3 Prodotto per un numero negativo: il verso si rovescia

$$a < b \implies a \cdot c > b \cdot c \quad (c < 0)$$

È la sola regola nuova di tutto il capitolo, e la sola che le equazioni non hanno.

ESEMPIO

$$-3 < 5 \longrightarrow -3 \cdot (-2) > 5 \cdot (-2) \longrightarrow 6 > -10$$

Tenendo il verso verrebbe $6 < -10$, che è falsa.

3 I due principi

3.1 Primo principio

Aggiungendo o togliendo la **stessa quantità ai due membri** si ottiene una disequazione equivalente, e **il verso resta**.

$$A < B \iff A + c < B + c$$

In pratica: un termine si sposta da un membro all'altro **cambiando segno**, e il verso non si tocca.

ESEMPIO

$$3x - 5 \geq x + 1 \longrightarrow 3x - x \geq 1 + 5$$

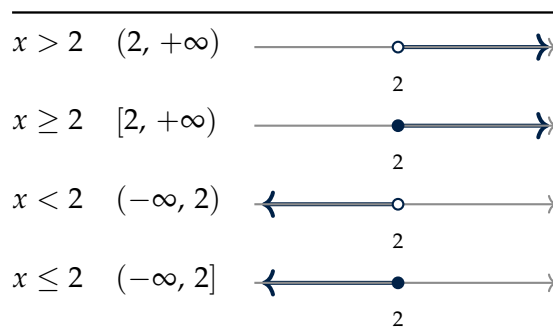
3.2 Secondo principio

Moltiplicando o dividendo i due membri per uno stesso numero c :

- $c > 0$: disequazione equivalente, **verso invariato**;
- $c < 0$: disequazione equivalente, **verso rovesciato**;
- $c = 0$: non si può.

ESEMPIO

$$2x \geq 6 \longrightarrow x \geq 3 \quad -3x > 6 \longrightarrow x < -2$$

4 Insiemi e intervalli**4.1 Le quattro semirette, nei tre modi****ESEMPIO**

La parentesi è **quadra** dove l'estremo è compreso e **tonda** dove è escluso. Dalla parte dell'infinito è sempre tonda: $+\infty$ non è un numero e non può essere compreso.

4.2 Intervalli limitati

Un insieme compreso fra due numeri si scrive con la doppia disuguaglianza, il minore a sinistra.

$$2 < x \leq 5 \iff (2, 5]$$

ESEMPIO

$$-1 \leq x < 4 \iff [-1, 4) \quad 0 < x < 3 \iff (0, 3)$$

Alcuni libri scrivono $[2, 5]$ con la quadra rovesciata al posto della tonda: è la stessa cosa.

4.3 I due casi estremi

- $S = \mathbb{R}$: **sempre verificata**, ogni numero va bene;
- $S = \emptyset$: **mai verificata** (o impossibile), nessun numero va bene.

Non si dice mai «indeterminata»: è parola da equazioni.

ESEMPIO

$$2(x+1) < 2x+5 \rightarrow 0 < 3 \text{ vera} \rightarrow S = \mathbb{R}$$

$$3(x-2) > 3x-6 \rightarrow 0 > 0 \text{ falsa} \rightarrow S = \emptyset$$

4.4 Unione e intersezione

L'**intersezione** $A \cap B$ tiene i numeri che stanno in tutti e due (è la risposta dei sistemi); l'**unione** $A \cup B$ tiene quelli che stanno in almeno uno.

ESEMPIO

Con $A = (1, +\infty)$ e $B = (-\infty, 6]$:

$$A \cap B = (1, 6] \quad A \cup B = \mathbb{R}$$

Con $A = (-\infty, 0)$ e $B = (5, +\infty)$: $A \cap B = \emptyset$.

5 Come si risolvono

5.1 Disequazione intera: i sei passi

- 1 svolgi i calcoli nei due membri
- 2 porta le x a sinistra e i numeri a destra, cambiando segno: il verso resta
- 3 somma i simili: resta $ax \lessgtr b$
- 4 dividi per a **guardando il segno di a**
- 5 scrivi S come disuguaglianza e come intervallo
- 6 verifica con un numero dentro e uno fuori

ESEMPIO

$$2(x-3) + 4 < 5x - 8 \rightarrow 2x - 2 < 5x - 8 \rightarrow -3x < -6 \rightarrow x > 2.$$

5.2 Coefficienti frazionari

Si calcola il mcm dei denominatori — che è un numero **positivo**, quindi il verso non cambia — e si moltiplica per quello **ogni** termine dei due membri, compresi quelli senza denominatore.

ESEMPIO

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x}{3} > \frac{1}{6} \rightarrow 3(x-1) - 2x > 1 \rightarrow x > 4$$

$$\frac{x}{2} + 3 \leq \frac{x}{4} \rightarrow 2x + 12 \leq x \quad (\text{non } 2x + 3 \leq x)$$

5.3 Il meno davanti a una frazione

Il segno meno davanti a una frazione vale per **tutto** il numeratore: togliendo il denominatore cambiano i segni di ogni suo termine.

ESEMPIO

$$-\frac{x-1}{2} = \frac{-x+1}{2} \quad \text{non} \quad \frac{-x-1}{2}$$

$$x - \frac{x-3}{4} > 1 \rightarrow 4x - (x-3) > 4 \rightarrow 3x + 3 > 4$$

5.4 Quando l'incognita sparisce

Resta $0 \cdot x \leq b$: si guarda se la disuguaglianza fra numeri è vera o falsa.

- vera $\Rightarrow S = \mathbb{R}$;
- falsa $\Rightarrow S = \emptyset$.

ESEMPIO

$$0 \cdot x > 3 \rightarrow 0 > 3 \text{ falsa} \rightarrow S = \emptyset$$

$$0 \cdot x > -3 \rightarrow 0 > -3 \text{ vera} \rightarrow S = \mathbb{R}$$

Si scrivono quasi uguali e dicono il contrario.

5.5 Se non ti fidi del cambio di verso

Invece di dividere per un numero negativo si può portare l'incognita **dalla parte in cui il coefficiente è positivo**. Costa un passaggio in più e non richiede di ricordare niente.

ESEMPIO

$$-4x \geq 8 \rightarrow -8 \geq 4x \rightarrow -2 \geq x \rightarrow x \leq -2$$

6 Letterali, sistemi, segni

6.1 Disequazione letterale: la discussione ha tre casi

Ridotta a $ax \leq b$, con a e b espressioni nel parametro:

- $a > 0$: si divide, **verso invariato**;
- $a < 0$: si divide, **verso rovesciato**;
- $a = 0$: non si divide, resta $0 \leq b$ e la risposta è $\mathbb{R}$ oppure $\emptyset$.

I tre casi si scrivono sempre in quest'ordine, e la risposta li comprende tutti e tre.

ESEMPIO

$$(a-2)x < 3 : \quad a > 2 \Rightarrow x < \frac{3}{a-2}; \quad a < 2 \Rightarrow x > \frac{3}{a-2}; \quad a = 2 \Rightarrow S = \mathbb{R}$$

6.2 Sistema di disequazioni

Le disequazioni devono valere **tutte insieme**: la soluzione è l'**intersezione** degli insiemi parziali.

$$S = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n$$

Si risolve ogni disequazione a parte, si disegnano le righe una sopra l'altra con i punti allineati, e si legge dove sono piene tutte.

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3 \\ x + 2 \leq 7 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 5 \end{cases} \longrightarrow 2 < x \leq 5$$

$$\begin{cases} x > 5 \\ x < 2 \end{cases} \text{ è impossibile: } S = \emptyset.$$

6.3 Segno di un fattore di primo grado

Il fattore $mx + q$ si annulla in $x = -\frac{q}{m}$ e cambia segno una volta sola, lì. Ha il segno di m **dopo** il suo zero, e il segno opposto prima.

ESEMPIO

$x - 1$ è negativo per $x < 1$ e positivo per $x > 1$.

$3 - x$ è positivo per $x < 3$ e negativo per $x > 3$ (il coefficiente è -1).

6.4 Disequazione prodotto o fratta: la regola dei segni

Si porta tutto a un membro con lo zero dall'altra parte, si scrivono le C.E. se c'è un denominatore, si trova lo zero di ogni fattore e si costruisce la **tabella dei segni**. La riga in basso è il segno del prodotto (o del quoziente): si prendono gli intervalli col segno richiesto.

ESEMPIO

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0 \quad \text{C.E. } x \neq -2$$

$$S = (-\infty, -2) \cup [1, +\infty) \quad \text{cioè} \quad x < -2 \vee x \geq 1$$

6.5 Il denominatore non si moltiplica via

In un'equazione fratta si moltiplica per il denominatore; in una **disequazione** no, perché non se ne conosce il segno e moltiplicare per un negativo rovescerebbe il verso.

ESEMPIO

Da $\frac{1}{x} > 2$, moltiplicando per x verrebbe $x < \frac{1}{2}$, e allora $x = -1$ sarebbe soluzione: ma $\frac{1}{-1} = -1$ non è maggiore di 2. La risposta giusta è $0 < x < \frac{1}{2}$.

6.6 Gli estremi nella tabella dei segni

Con $\geq$ o $\leq$ entrano in S gli zeri del **numeratore**; quelli del **denominatore** restano fuori sempre, perché lì la frazione non esiste.

ESEMPIO

In $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$ il valore $x = 1$ entra in S , il valore $x = -2$ no. Nella riga finale della tabella, sotto -2 , si scrive $\nexists$ e non 0.

7 Problemi e verifica

7.1 Le parole che chiedono una disequazione

x è almeno 5	$x \geq 5$
x non è inferiore a 5	$x \geq 5$
x supera 5	$x > 5$
x è al massimo 5	$x \leq 5$
x non supera 5	$x \leq 5$
x è minore di 5	$x < 5$
A conviene rispetto a B	$\text{costo}_A < \text{costo}_B$

ESEMPIO

«Almeno» e «al massimo» portano l'uguale; «supera» e «è minore» no.

7.2 Condizioni di accettabilità

La disequazione non conosce il problema. Una lunghezza è positiva, un numero di persone è intero, un voto sta fra 1 e 10: la risposta finale è l'insieme delle soluzioni **intersecato** con quello che il problema ammette, e si scrive a parole.

ESEMPIO

«Il perimetro non supera 26 cm»: viene $x \leq 5$, ma x è un'altezza, quindi la risposta è $0 < x \leq 5$.
 «Servono $x > 12$ persone»: le persone sono intere, quindi ne servono 13.

7.3 Come si scrive la risposta

Sempre l'**insieme delle soluzioni**, nelle due forme: disuguaglianza e intervallo. In forma di frazione ridotta, non in decimale. Se è tutto $\mathbb{R}$ o niente, si scrive così.

ESEMPIO

$x > \frac{7}{2}$, cioè $S = \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$ (non $x > 3,5$)
 $S = \emptyset$ $S = \mathbb{R}$

7.4 Verifica: un numero dentro e uno fuori

Si sceglie un numero dell'insieme trovato e uno fuori, si sostituiscono nella **disequazione di partenza** e si calcolano i due membri: la prima prova deve dare vera, la seconda falsa. Con un numero solo non si distingue una risposta giusta da una troppo larga.

ESEMPIO

$2(x - 3) + 4 < 5x - 8$ dà $x > 2$. Dentro, $x = 3$: $4 < 7$ vera. Fuori, $x = 0$: $-2 < -8$ falsa. Torna.

Che cosa rispondere, in una riga

Se resta	La risposta è
$ax \leq b$ con $a > 0$	si divide, verso invariato
$ax \leq b$ con $a < 0$	si divide, verso rovesciato
$0 \cdot x \leq b$ vera	$S = \mathbb{R}$
$0 \cdot x \leq b$ falsa	$S = \emptyset$
un parametro nel coefficiente	tre casi: $a > 0$, $a < 0$, $a = 0$
un sistema	l'intersezione, letta sul grafico
un prodotto o una frazione	la tabella dei segni
una misura negativa in un problema	si scarta, e si dice perché

I sette errori che costano di più

- Dividere per un numero negativo *senza* rovesciare il verso.
- Rovesciare il verso quando si sposta un termine: spostare è somma, e il verso non si tocca.
- Scrivere $x > \frac{b}{a}$ in una letterale senza discutere il segno di a .
- Confondere $0 \cdot x > 3$ (mai verificata) con $0 \cdot x > -3$ (sempre verificata).
- Moltiplicare per il denominatore in una disequazione fratta.
- Unire invece di intersecare in un sistema.
- Dare per buona la risposta di un problema senza chiedersi se ha senso.