

DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

ALGEBRA

Intervalli, cambio di verso, sistemi,
regola dei segni, letterali e problemi



Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima di partire	3
2	Le disuguaglianze e le loro proprietà	3
3	Che cos'è una disequazione	5
4	Gli intervalli: come si scrive un insieme di numeri	6
5	I due principi di equivalenza	8
6	Risolvere una disequazione intera	9
7	Parentesi e prodotti notevoli	11
8	Coefficienti frazionari	12
9	Sempre verificate e mai verificate	13
10	Disequazioni letterali: la discussione	14
11	Sistemi di disequazioni	16
12	Disequazioni prodotto e fratte: la regola dei segni	17
13	Problemi con le disequazioni	19

1 Cosa serve prima di partire

Una disequazione si risolve con le stesse mosse di un'equazione: si sistemano i due membri, si sposta, si divide. Quello che cambia è una regola sola — e la prima parte è tutta roba dei capitoli precedenti.

Cosa devi già sapere

- **La retta orientata.** I numeri crescono da sinistra a destra. Fra due numeri negativi è più grande quello più vicino a zero: $-2 > -7$, anche se «sette» è più di «due».
- **Somme di polinomi e il meno davanti alla parentesi.** $-(2x - 5) = -2x + 5$: cambiano *tutti* i segni.
- **I prodotti notevoli.** $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ e $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$. Servono perché nelle disequazioni da compito i termini di secondo grado si elidono fra loro.
- **Le frazioni.** Il mcm dei denominatori, e la somma: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
- **Le equazioni di primo grado.** I due principi, la forma $ax = b$, la verifica per sostituzione. Qui si riusa tutto, con un'aggiunta.

Esempio Svolto 1.1: Riscaldamento: quattro conti che tornano a ogni pagina:

1. **Ordinare dei negativi.** Da $-\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{3}$, il più grande è $-\frac{1}{3}$: è quello più vicino a zero.
2. **Il meno davanti alla parentesi.**

$$3x - (x - 4) = 3x - x + 4 = 2x + 4$$

3. **Un prodotto notevole.**

$$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

4. **Somma di frazioni col mcm.**

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{3x + 2x}{6} = \frac{5x}{6}$$

Se il secondo è venuto $2x - 4$, conviene tornare mezz'ora sui polinomi: in questo capitolo quel segno decide il risultato di un esercizio su tre.

2 Le disuguaglianze e le loro proprietà

Prima delle disequazioni vengono le **disuguaglianze**: confronti fra numeri già noti, senza incognite. Sono vere o false, e basta.

$$-5 < -3 \quad \text{vera} \qquad 7 \geq 7 \quad \text{vera} \qquad 5 < 5 \quad \text{falsa}$$

Formula 2.1: I quattro simboli:

Simbolo	Si legge	È vera quando
$a < b$	a minore di b	a sta a sinistra di b
$a > b$	a maggiore di b	a sta a destra di b
$a \leq b$	a minore o uguale a b	a sta a sinistra, oppure coincide
$a \geq b$	a maggiore o uguale a b	a sta a destra, oppure coincide

La direzione del simbolo si chiama **verso**. I primi due sono disuguaglianze *strette*, gli altri due *larghe*.

Le tre proprietà che seguono bastano a risolvere qualunque disequazione di primo grado, e la terza è quella che rende questo capitolo diverso da quello delle equazioni.

Formula 2.2: Le tre proprietà del confronto: Sia $a < b$. Allora:

1. **Somma.** Aggiungendo (o togliendo) uno *stesso* numero c ai due membri, il verso non cambia:

$$a < b \implies a + c < b + c \quad \text{per ogni } c$$

2. **Prodotto per un positivo.** Moltiplicando (o dividendo) i due membri per uno stesso numero $c > 0$, il verso non cambia:

$$a < b \implies a \cdot c < b \cdot c \quad (c > 0)$$

3. **Prodotto per un negativo.** Moltiplicando (o dividendo) i due membri per uno stesso numero $c < 0$, il verso **si rovescia**:

$$a < b \implies a \cdot c > b \cdot c \quad (c < 0)$$

Le stesse tre valgono con $>$, $\leq$, $\geq$.

Esempio Svolto 2.1: Perché moltiplicare per un negativo rovescia il verso:

Si parte da una disuguaglianza vera: $-3 < 5$.

1. **Moltiplico per 2**, che è positivo.

$$-3 \cdot 2 = -6 \quad 5 \cdot 2 = 10 \quad \text{e infatti} \quad -6 < 10$$

Vera. Il verso è rimasto $<$.

2. **Moltiplico per -2** , e *provo* a tenere il verso.

$$-3 \cdot (-2) = 6 \quad 5 \cdot (-2) = -10 \quad \text{darebbe} \quad 6 < -10$$

Falsa: 6 è maggiore di -10 , non minore. Tenere il verso ha prodotto una disuguaglianza sbagliata.

3. Rovescio il verso.

$$6 > -10$$

Vera. È la regola: moltiplicando per un negativo si scrive $>$ dove c'era $<$.

4. Perché succede. Moltiplicare per un numero negativo *ribalta* la retta: quello che stava a sinistra finisce a destra. L'ordine si conserva, ma al contrario.

Il verso cambia solo per il prodotto, non per la somma

Da $-3 < 5$, togliendo 8 ai due membri:

$$-3 - 8 = -11 \quad 5 - 8 = -3 \quad -11 < -3$$

Il verso resta $<$, anche se i due numeri sono diventati negativi. Sommare sposta tutti e due i punti della stessa quantità, e chi era a sinistra resta a sinistra.

L'errore tipico è cambiare il verso quando si sposta un termine negativo da un membro all'altro. Spostare è somma, non prodotto: il verso non si tocca.

3 Che cos'è una disequazione

Formula 3.1: Disequazione e soluzioni: Una **disequazione** è una disuguaglianza fra due espressioni che contengono un'incognita, e che è vera solo per *alcuni* valori dell'incognita.

$$2x - 3 < x + 5$$

Un numero è una **soluzione** se, sostituito all'incognita, rende vera la disuguaglianza.

Risolvere vuol dire trovarle *tutte*: l'insieme di tutte le soluzioni si chiama **insieme delle soluzioni** e si indica con S .

Il **grado** è il grado dell'incognita *dopo* aver svolto tutti i calcoli. Una disequazione di primo grado si riduce sempre a una delle forme

$$ax < b \quad ax > b \quad ax \leq b \quad ax \geq b$$

con a e b numeri (o espressioni nel parametro, se è letterale).

Una differenza che vale la pena mettere a fuoco subito

Un'equazione di primo grado determinata ha *una* soluzione: un punto sulla retta. Una disequazione ne ha quasi sempre *infinite*: un pezzo di retta.

Per questo la risposta non è mai un numero. Scrivere « $x = 4$ » come risposta a una disequazione è sbagliato anche quando 4 è una soluzione: la domanda chiedeva tutte, non una.

Esempio Svolto 3.1: Verificare se un numero è soluzione:

La disequazione è $2x - 3 < x + 5$.

1. Provo $x = 4$. Primo membro: $2 \cdot 4 - 3 = 5$. Secondo membro: $4 + 5 = 9$.

$$5 < 9 \quad \text{vera} \longrightarrow x = 4 \text{ è soluzione}$$

2. Provo $x = 9$. Primo membro: $2 \cdot 9 - 3 = 15$. Secondo membro: $9 + 5 = 14$.

$$15 < 14 \quad \text{falsa} \longrightarrow x = 9 \text{ non è soluzione}$$

3. Provo $x = 8$. Primo membro: 13; secondo membro: 13. La disuguaglianza $13 < 13$ è falsa: 8 *non* è soluzione. Con $\leq$ al posto di $<$ lo sarebbe stato — ed è tutta la differenza fra estremo escluso e incluso.

4. Attenzione. Provare dei numeri non è risolvere: dice se un valore *dato* va bene, non li trova. Ma è il controllo con cui si chiude ogni esercizio, e costa dieci secondi.

Il grado si guarda alla fine, non all'inizio

La disequazione $(x + 1)^2 > x^2 + 3$ sembra di secondo grado. Svolgendo:

$$x^2 + 2x + 1 > x^2 + 3 \longrightarrow 2x + 1 > 3$$

I termini x^2 si elidono: è di **primo** grado, e la soluzione è $x > 1$.

Prima si svolgono i calcoli, poi si dice che grado ha. Le disequazioni da compito sono fatte apposta per sembrare quello che non sono.

4 Gli intervalli: come si scrive un insieme di numeri

L'insieme delle soluzioni si scrive in **tre modi**, e sono tre lingue per dire la stessa cosa. Chi ne sa una sola si blocca appena la traccia usa l'altra.

Formula 4.1: I tre modi di scrivere lo stesso insieme:

Disuguaglianza	Intervallo	Sulla retta
$x > 2$	$(2, +\infty)$	
$x \geq 2$	$[2, +\infty)$	
$x < 2$	$(-\infty, 2)$	
$x \leq 2$	$(-\infty, 2]$	

La parentesi è **quadra** dove l'estremo è compreso e **tonda** dove è escluso. Sulla retta il pallino è **pieno** se l'estremo appartiene all'insieme, **vuoto** se no: quadra e pallino pieno vanno sempre insieme.

Formula 4.2: Intervalli limitati, e i due casi estremi: Quando l'insieme è compreso fra due numeri si scrive con una **doppia disuguaglianza**:

$$2 < x \leq 5 \iff (2, 5]$$

Gli estremi si scrivono sempre nell'ordine, il minore a sinistra.

Due insiemi hanno un nome proprio:

- $S = \mathbb{R}$: tutti i numeri reali, cioè la disequazione è **sempre verificata**;
- $S = \emptyset$: nessun numero, cioè è **mai verificata** (si dice anche *impossibile*).

Alcuni libri, invece della tonda, usano la quadra *rovesciata* per l'estremo escluso: $]2, 5]$ vuol dire esattamente $(2, 5]$. Le due scritture si incontrano tutte e due, e qui si usa la tonda.

Esempio Svolto 4.1: Passare da una scrittura all'altra:

1. Da disuguaglianza a intervallo: $x \geq -3$.

L'insieme parte da -3 , che è compreso (c'è l'uguale), e arriva a $+\infty$. Dalla parte dell'infinito la parentesi è *sempre* aperta, perché $+\infty$ non è un numero e non può essere compreso.

$$[-3, +\infty)$$

2. Da intervallo a disuguaglianza: $\left(-\infty, \frac{7}{4}\right]$.

L'estremo destro è $\frac{7}{4}$ ed è compreso: la parentesi è quadra.

$$x \leq \frac{7}{4}$$

3. Un intervallo limitato: $(-1, 4)$.

Tutti e due gli estremi sono esclusi.

$$-1 < x < 4$$

4. Il disegno del terzo caso: due pallini vuoti e il tratto in mezzo.



5. Controllo. $x = 0$ sta dentro l'intervallo e infatti soddisfa $-1 < 0 < 4$; $x = 4$ non ci sta, perché l'estremo è escluso.

5 I due principi di equivalenza

Due disequazioni sono **equivalenti** se hanno lo *stesso insieme di soluzioni*. Risolvere vuol dire trasformare la disequazione in un'altra equivalente, più semplice, finché resta x da solo da una parte.

Formula 5.1: Primo principio: Aggiungendo o togliendo la stessa quantità ai due membri si ottiene una disequazione equivalente, e il verso non cambia.

$$A < B \iff A + c < B + c$$

La conseguenza pratica: un termine si può **spostare** da un membro all'altro, purché **cambi segno**. Il verso resta quello che era.

Formula 5.2: Secondo principio: Moltiplicando o dividendo i due membri per uno stesso numero c :

- se $c > 0$, si ottiene una disequazione equivalente e il verso **resta**;

$$A < B \iff A \cdot c < B \cdot c \quad (c > 0)$$

- se $c < 0$, si ottiene una disequazione equivalente ma il verso **si rovescia**;

$$A < B \iff A \cdot c > B \cdot c \quad (c < 0)$$

- se $c = 0$, non si può: moltiplicare per zero distrugge l'informazione, e dividere per zero non ha senso.

Esempio Svolto 5.1: I due principi, uno alla volta: $3x - 5 \geq x + 1$:

1. Primo principio, per portare le x a sinistra: si toglie x ai due membri.

$$3x - 5 - x \geq x + 1 - x \longrightarrow 2x - 5 \geq 1$$

2. Primo principio, per portare i numeri a destra: si aggiunge 5 ai due membri.

$$2x - 5 + 5 \geq 1 + 5 \longrightarrow 2x \geq 6$$

Il verso è ancora $\geq$: le somme non lo toccano.

3. Secondo principio: si divide per 2, che è *positivo*.

$$\frac{2x}{2} \geq \frac{6}{2} \longrightarrow x \geq 3$$

4. L'insieme delle soluzioni, nelle due scritture:

$$x \geq 3 \quad S = [3, +\infty)$$


5. **Verifica con due numeri.** $x = 3$ sta in S : $3 \cdot 3 - 5 = 4$ e $3 + 1 = 4$, e $4 \geq 4$ è vera. $x = 0$ non ci sta: $-5 \geq 1$ è falsa. Torna.

6. **In pratica** non si scrive « $-x$ ai due membri»: si sposta il termine cambiandogli segno, e si passa da $3x - 5 \geq x + 1$ a $3x - x \geq 1 + 5$. È la stessa cosa, scritta più corta.

La regola che manda a rotoli metà del compito

Da $-3x > 6$, dividendo per -3 :

$$-3x > 6 \rightarrow x < -2 \quad \text{non} \quad x > -2$$

Il divisore è *negativo*, quindi il verso passa da $>$ a $<$.

Il controllo costa dieci secondi. Se la risposta fosse $x > -2$, allora $x = 0$ sarebbe una soluzione: ma $-3 \cdot 0 = 0$ e $0 > 6$ è falsa. Con $x < -2$ si prova $x = -3$: $-3 \cdot (-3) = 9$ e $9 > 6$ è vera.

Regola pratica: ogni volta che si divide, prima si guarda il segno del divisore. Ogni volta.

6 Risolvere una disequazione intera

Metodo 6.1: I sei passi, sempre gli stessi:

1. Svolgi i calcoli nei due membri: parentesi, prodotti notevoli, termini simili.
2. Porta i termini con l'incognita al primo membro e i numeri al secondo, cambiando segno a quelli che si spostano. **Il verso non cambia.**
3. Somma i termini simili: resti con $ax \leq b$.
4. Dividi i due membri per a , **guardando il segno di a** : se è positivo il verso resta, se è negativo si rovescia.
5. Scrivi l'insieme delle soluzioni in **due forme**: disuguaglianza e intervallo. Disegnalo sulla retta.
6. **Verifica** con due numeri: uno dentro S e uno fuori.

Esempio Svolto 6.1: $2(x - 3) + 4 < 5x - 8$:**1. Svolgo i calcoli.**

$$2x - 6 + 4 < 5x - 8 \longrightarrow 2x - 2 < 5x - 8$$

2. Porto le x a sinistra e i numeri a destra.

$$2x - 5x < -8 + 2$$

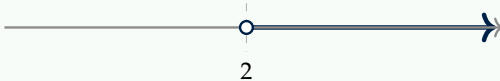
3. Sommo i simili.

$$-3x < -6$$

4. Divido per -3 , che è negativo: il verso si rovescia.

$$x > 2$$

5. L'insieme delle soluzioni.

$$x > 2 \quad S = (2, +\infty)$$


6. Verifica. Un numero dentro, $x = 3$: primo membro $2(3 - 3) + 4 = 4$, secondo membro $15 - 8 = 7$, e $4 < 7$ è vera. Un numero fuori, $x = 0$: primo membro -2 , secondo membro -8 , e $-2 < -8$ è falsa. Le due prove danno risposte opposte, come devono.

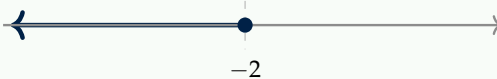
Esempio Svolto 6.2: $-4x + 2 \geq 10$: **il verso cambia, e si vede perché:****1. Porto il 2 a destra.**

$$-4x \geq 10 - 2 \longrightarrow -4x \geq 8$$

2. Divido per -4 , negativo: $\geq$ diventa $\leq$.

$$x \leq -2$$

3. L'insieme.

$$x \leq -2 \quad S = (-\infty, -2]$$


4. Verifica. $x = -2$ è l'estremo, ed è compreso: $-4 \cdot (-2) + 2 = 10$, e $10 \geq 10$ è vera. $x = 0$ sta fuori: $2 \geq 10$ è falsa.

5. La strada alternativa, per chi non si fida del cambio di verso: invece di dividere per un negativo si può portare l'incognita *dalla parte in cui è positiva*.

$$-4x \geq 8 \longrightarrow -8 \geq 4x \longrightarrow -2 \geq x$$

Che si legge « -2 è maggiore o uguale a x », cioè $x \leq -2$: la stessa risposta. Costa un passaggio in più e non richiede di ricordare niente.

Perché la verifica si fa con due numeri e non con uno

Con un numero solo non si distingue una risposta giusta da una troppo larga. Se la risposta fosse $x > 0$ invece di $x > 2$, provare $x = 3$ funzionerebbe lo stesso: 3 è dentro tutte e due.

Il numero *fuori* è quello che smaschera l'errore. Conviene sceglierlo appena oltre l'estremo — qui $x = 1$, o l'estremo stesso — perché è lì che le due risposte si separano.

7 Parentesi e prodotti notevoli

Nelle disequazioni da compito i due membri sono quasi sempre da sviluppare, e spesso compaiono quadrati di binomio, cubi o somme per differenza. I termini di secondo grado si elidono: se non si elidono, la disequazione non è di primo grado e non è di questo capitolo.

Esempio Svolto 7.1: $(x + 2)^2 - (x - 1)^2 \leq 15$:

1. Sviluppo i due quadrati.

$$(x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 2x + 1) \leq 15$$

2. Tolgo la parentesi col meno davanti, cambiando tutti i segni.

$$x^2 + 4x + 4 - x^2 + 2x - 1 \leq 15$$

3. Sommo i simili. I due x^2 si elidono: resta primo grado.

$$6x + 3 \leq 15$$

4. Risolvo. Il coefficiente è 6, positivo: il verso resta.

$$6x \leq 12 \rightarrow x \leq 2$$

5. L'insieme.

$$x \leq 2 \quad S = (-\infty, 2]$$


6. Verifica. $x = 0$: $4 - 1 = 3$ e $3 \leq 15$, vera. $x = 3$: $25 - 4 = 21$ e $21 \leq 15$, falsa.

La x non si semplifica

Da $x^2 + 4x > x^2 + 6$ **non** si «semplifica x^2 » come si fa in una frazione: si *sottrae* x^2 ai due membri, che è il primo principio, e si ottiene $4x > 6$.

Il risultato è lo stesso, ma la parola giusta conta: «semplificare» in una disequazione porta prima o poi a dividere per x , e dividere per una quantità di cui non si conosce il segno è

la mossa che questo capitolo proibisce dall'inizio alla fine.

Vale anche al contrario: $x^2 > x$ **non** dà $x > 1$. Provare $x = -2$: $4 > -2$ è vera, ma $-2 > 1$ è falsa.

8 Coefficienti frazionari

Metodo 8.1: Togliere i denominatori:

1. Svolgi i calcoli dentro le frazioni, se ce ne sono.
2. Calcola il mcm di **tutti** i denominatori. È un numero **positivo**: il verso non cambia.
3. Moltiplica per quel mcm **ogni** termine dei due membri, anche quelli che non hanno denominatore.
4. Da qui in poi è una disequazione intera: i sei passi del paragrafo 6.

Esempio Svolto 8.1: $\frac{x-1}{2} - \frac{x}{3} > \frac{1}{6}$:

1. Il mcm dei denominatori 2, 3, 6 è 6, che è positivo.

2. Moltiplico ogni termine per 6, e il verso resta >.

$$6 \cdot \frac{x-1}{2} - 6 \cdot \frac{x}{3} > 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$3(x-1) - 2x > 1$$

3. Svolgo e risolvo.

$$3x - 3 - 2x > 1 \rightarrow x - 3 > 1 \rightarrow x > 4$$

4. L'insieme.

$$x > 4 \quad S = (4, +\infty)$$


5. Verifica. $x = 5$: $\frac{4}{2} - \frac{5}{3} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$, e $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$ è vera. $x = 0$: $-\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2}$, e $-\frac{1}{2} > \frac{1}{6}$ è falsa.

Il mcm moltiplica *tutti* i termini

Il secondo principio parla dei **due membri**, cioè di ogni termine di ognuno. Dimenticare il termine senza denominatore è l'errore più frequente del paragrafo:

$$\frac{x}{2} + 3 \leq \frac{x}{4} \longrightarrow 2x + 12 \leq x \quad \text{non} \quad 2x + 3 \leq x$$

Il 3 diventa 12, perché anche lui va moltiplicato per 4.

E c'è un secondo inciampo, tutto suo: il **meno davanti a una frazione** vale per tutto il numeratore.

$$x - \frac{x-3}{4} > 1 \longrightarrow 4x - (x-3) > 4 \longrightarrow 3x + 3 > 4$$

Non $4x - x - 3 > 4$.

9 Sempre verificate e mai verificate

Capita che, svolgendo i calcoli, l'incognita sparisca del tutto. Non c'è niente di rotto: sparita l'incognita resta una disuguaglianza fra numeri, e quella dice la risposta — la stessa per ogni x , appunto perché x non c'è più.

Formula 9.1: Che cosa rispondere quando l'incognita sparisce: Se dopo i calcoli resta $0 \cdot x \leq b$:

- se la disuguaglianza numerica $0 \leq b$ è **vera**, ogni numero va bene: la disequazione è **sempre verificata** e $S = \mathbb{R}$;
- se è **falsa**, non va bene nessun numero: è **mai verificata** e $S = \emptyset$.

Non si scrive mai «indeterminata»: quella è una parola da equazioni.

Esempio Svolto 9.1: Due disequazioni in cui la x se ne va:

1. $2(x+1) < 2x+5$.

$$2x+2 < 2x+5 \longrightarrow 2x-2x < 5-2 \longrightarrow 0 \cdot x < 3$$

Resta $0 < 3$, che è *vera*: $S = \mathbb{R}$, sempre verificata.

2. $3(x-2) > 3x-6$.

$$3x-6 > 3x-6 \longrightarrow 0 \cdot x > 0$$

Resta $0 > 0$, che è *falsa*: $S = \emptyset$, mai verificata.

3. Attenzione al caso larghissimo. La stessa disequazione con $\geq$ al posto di $>$ diventa $0 \geq 0$, che è *vera*: sarebbe $S = \mathbb{R}$. Cambia un solo simbolo e la risposta si ribalta.

4. Come si riconoscono a colpo d'occhio. Se i due membri, svolti, hanno lo *stesso* coefficiente della x , l'incognita sparirà di sicuro: basta guardare i termini noti e si ha già la risposta.

$0 \cdot x > 3$ e $0 \cdot x > -3$ sono opposte

Si scrivono quasi uguali e vogliono dire il contrario:

- $0 \cdot x > 3$: resta $0 > 3$, falsa. **Mai** verificata, $S = \emptyset$;
- $0 \cdot x > -3$: resta $0 > -3$, vera. **Sempre** verificata, $S = \mathbb{R}$.

E nessuna delle due si scrive « $x = 0$ »: quello non è nemmeno un insieme di soluzioni di una disequazione di primo grado.

10 Disequazioni letterali: la discussione

Una disequazione **letterale** contiene, oltre all'incognita, altre lettere chiamate **parametri**. Non è una disequazione sola: è una famiglia di disequazioni, una per ogni valore del parametro. Risolverla vuol dire dire cosa succede in *tutti* i casi, e questo si chiama **discussione**.

Dove sta la differenza rispetto alle equazioni

Nelle equazioni letterali i casi erano **due**: il coefficiente è diverso da zero (si divide) oppure è zero (non si divide e si guarda cosa resta).

Qui i casi sono **tre**, perché per dividere non basta sapere che il coefficiente non è zero: bisogna sapere se è *positivo* o *negativo*, e nei due casi la risposta ha versi opposti. È la stessa regola di sempre, applicata a una lettera invece che a un numero.

Metodo 10.1: Discutere una disequazione letterale:

1. Porta la disequazione nella forma $ax \leq b$, dove a e b sono espressioni nel parametro.
2. Studia il **segno di a** : risolvi $a > 0$, che è una disequazione di primo grado nel parametro.
3. **Primo caso**, $a > 0$: si divide e il verso **resta**, $x \leq \frac{b}{a}$.
4. **Secondo caso**, $a < 0$: si divide e il verso **si rovescia**.
5. **Terzo caso**, $a = 0$: non si divide. Si sostituisce il valore critico e si guarda cosa resta: $S = \mathbb{R}$ oppure $S = \emptyset$.

I tre casi si scrivono sempre in quest'ordine, e la risposta li comprende tutti e tre: mancarne uno vuol dire mancare un terzo dell'esercizio.

Esempio Svolto 10.1: $(a - 2)x < 3$, nell'incognita x :

1. È già nella forma $ax < b$, con coefficiente $a - 2$ e termine noto 3.

2. Studio il segno del coefficiente.

$$a - 2 > 0 \longrightarrow a > 2 \quad a - 2 < 0 \longrightarrow a < 2 \quad a - 2 = 0 \longrightarrow a = 2$$

3. Primo caso, $a > 2$: il coefficiente è positivo, si divide e il verso resta.

$$x < \frac{3}{a-2}$$

4. Secondo caso, $a < 2$: il coefficiente è negativo, si divide e il verso si rovescia.

$$x > \frac{3}{a-2}$$

5. Terzo caso, $a = 2$: la disequazione diventa

$$0 \cdot x < 3$$

cioè $0 < 3$, vera: $S = \mathbb{R}$.

6. Controllo su un valore per caso. Con $a = 5$ (primo caso) la disequazione è $3x < 3$, cioè $x < 1$; e la formula dà $\frac{3}{5-2} = 1$. Torna. Con $a = 1$ (secondo caso) è $-x < 3$, cioè $x > -3$; e la formula dà $\frac{3}{1-2} = -3$. Torna anche il verso.

Esempio Svolto 10.2: $a(x-1) > 2x+a$: **qui il coefficiente va ricavato:****1. Svolgo e porto tutto a sinistra.**

$$ax - a > 2x + a \longrightarrow ax - 2x > a + a \longrightarrow (a-2)x > 2a$$

2. Segno del coefficiente: $a-2 > 0$ per $a > 2$.**3. Primo caso, $a > 2$:** verso invariato.

$$x > \frac{2a}{a-2}$$

4. Secondo caso, $a < 2$: verso rovesciato.

$$x < \frac{2a}{a-2}$$

5. Terzo caso, $a = 2$: resta $0 \cdot x > 4$, cioè $0 > 4$, falsa. $S = \emptyset$.

6. Controllo con $a = 4$: la disequazione di partenza è $4(x-1) > 2x+4$, cioè $4x-4 > 2x+4$, cioè $2x > 8$, cioè $x > 4$. La formula dà $\frac{2 \cdot 4}{4-2} = 4$. Torna.

Dividere per il parametro senza guardarne il segno

Il passaggio da $(a-2)x < 3$ a $x < \frac{3}{a-2}$ è lecito **solo** per $a > 2$. Chi lo scrive e basta ha risposto a un terzo della domanda, e per giunta ha scritto una cosa falsa negli altri due terzi.

Il segnale d'allarme è semplice: se nel procedimento compare una divisione per un'espressione con dentro una lettera, e sopra non c'è scritto che segno ha, l'esercizio non è finito.

11 Sistemi di disequazioni

Un **sistema di disequazioni** è un insieme di disequazioni che devono essere soddisfatte **tutte insieme** dallo stesso valore di x . Si scrive con la graffa.

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3 \\ x + 2 \leq 7 \end{cases}$$

Formula 11.1: La soluzione di un sistema è un'intersezione: Se $S_1, S_2, \dots, S_n$ sono gli insiemi di soluzioni delle singole disequazioni, l'insieme di soluzioni del sistema è

$$S = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n$$

cioè i valori che stanno in **tutti** gli insiemi contemporaneamente. Se l'intersezione è vuota, il sistema è **impossibile**.

Metodo 11.1: Risolvere un sistema:

1. Risolvi ogni disequazione **per conto suo**, fino a $x \leq c$.
2. Disegna gli insiemi trovati su rette **sovrapposte**, con i punti allineati sulla stessa verticale.
3. Leggi in verticale: l'intersezione è dove i tratti sono pieni *tutti*.
4. Scrivi S come disuguaglianza e come intervallo.

Esempio Svolto 11.1: $\begin{cases} 2x - 1 > 3 \\ x + 2 \leq 7 \end{cases} :$

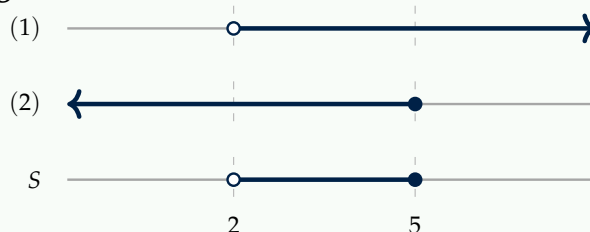
1. Risolvo la prima.

$$2x > 4 \rightarrow x > 2$$

2. Risolvo la seconda.

$$x \leq 5$$

3. Disegno le due righe e l'intersezione.



4. Leggo l'intersezione: il tratto pieno in tutte e due le righe va da 2 (escluso) a 5 (incluso).

$$2 < x \leq 5 \quad S = (2, 5]$$

5. Verifica. $x = 3$ sta dentro: $6 - 1 = 5 > 3$ vera, e $3 + 2 = 5 \leq 7$ vera. $x = 6$ sta fuori: la prima è vera ($11 > 3$) ma la seconda è falsa ($8 \leq 7$), e per un sistema basta che ne fallisca una.

Il sistema chiede «e», non «oppure»

Il sistema $\begin{cases} x > 5 \\ x < 2 \end{cases}$ è **impossibile**: nessun numero è contemporaneamente maggiore di 5 e minore di 2, quindi $S = \emptyset$.

L'errore è rispondere « $x < 2$ oppure $x > 5$ », che è l'*unione* e non l'intersezione. L'unione è la risposta di un problema diverso — quello in cui basta che *una* delle due condizioni sia vera — e nei sistemi non compare mai.

Il disegno lo rende impossibile da sbagliare: due tratti che non si sovrappongono non hanno niente in comune.

12 Disequazioni prodotto e fratte: la regola dei segni

Fin qui l'incognita stava sempre al numeratore e i fattori si potevano sviluppare. Restano due casi in cui la strada di prima non funziona: un **prodotto** di fattori di primo grado, e una **frazione** con l'incognita al denominatore.

Perché non si moltiplica per il denominatore

In un'*equazione* fratta si moltiplica per il denominatore e si va avanti. In una **disequazione** non si può, e il motivo è il secondo principio: moltiplicare per un negativo rovescia il verso, e del denominatore non si conosce il segno, perché dipende da x .

Un esempio che lo mostra in tre righe. Da $\frac{1}{x} > 2$, moltiplicando per x si otterrebbe $1 > 2x$, cioè $x < \frac{1}{2}$. Ma allora $x = -1$ dovrebbe essere una soluzione, e invece $\frac{1}{-1} = -1$ non è maggiore di 2.

La risposta giusta è $0 < x < \frac{1}{2}$, e per trovarla serve il metodo di questo paragrafo.

Formula 12.1: Il segno di un fattore di primo grado: Un fattore $mx + q$ con $m \neq 0$ si annulla in $x = -\frac{q}{m}$ e cambia segno una volta sola, proprio lì:

- se $m > 0$ è **negativo prima** e positivo dopo;
- se $m < 0$ è **positivo prima** e negativo dopo.

Regola pratica: un fattore di primo grado ha il segno del suo coefficiente m *dopo* il suo zero, e il segno opposto prima.

Metodo 12.1: La regola dei segni:

1. Porta tutto a un membro, lasciando 0 dall'altra parte, e scrivi l'espressione come **prodotto o quoziente** di fattori di primo grado.
2. Se c'è un denominatore, scrivi le **C.E.**: ogni denominatore diverso da zero.
3. Trova lo **zero di ogni fattore** e mettili in ordine sulla retta.
4. Costruisci la **tabella dei segni**: una riga per fattore, con $+$ e $-$ su ogni intervallo.
5. Moltiplica i segni in colonna: la riga in basso è il segno del prodotto (o del quoziente).
6. Prendi gli intervalli con il segno richiesto. Con $\geq$ o $\leq$ si aggiungono gli zeri del **numeratore**; quelli del denominatore restano **sempre** esclusi.

Esempio Svolto 12.1: $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$:

1. **C.E.** Il denominatore non può annullarsi: $x + 2 \neq 0$, cioè $x \neq -2$.
2. **Gli zeri.** $x - 1 = 0$ per $x = 1$; $x + 2 = 0$ per $x = -2$. In ordine: -2 e poi 1 .
3. **Il segno dei due fattori.** Tutti e due hanno coefficiente $+1$, quindi tutti e due sono negativi prima del loro zero e positivi dopo.
4. **La tabella.**

	-2	1	
$x-1$	-	-	0
$x+2$	-	0	+
$\frac{x-1}{x+2}$	+	$\neq$	-

5. Leggo. Serve il segno +, e siccome c'è l'uguale si prende anche lo zero del *numeratore*, cioè $x = 1$. Lo zero del denominatore, $x = -2$, resta escluso: lì la frazione non esiste.

$$x < -2 \vee x \geq 1 \quad S = (-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$$

6. Verifica. $x = -3$: $\frac{-4}{-1} = 4 \geq 0$, vera. $x = 0$: $\frac{-1}{2} \geq 0$, falsa. $x = 1$: $\frac{0}{3} = 0 \geq 0$, vera.

Esempio Svolto 12.2: $(x-1)(x+3) > 0$: lo stesso metodo, senza C.E.:

1. Non c'è denominatore, quindi niente C.E.

2. Gli zeri. $x = 1$ e $x = -3$; in ordine -3 e poi 1 .

3. La tabella.

	-3	1	
$x-1$	-	-	0
$x+3$	-	0	+
prodotto	+	0	-

4. Leggo. Serve il segno +, e la disuguaglianza è stretta: gli zeri restano fuori.

$$x < -3 \vee x > 1 \quad S = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$$

5. Il modo veloce, per due soli fattori. Il prodotto di due numeri è positivo quando sono *concordi*: o tutti e due positivi ($x > 1$), o tutti e due negativi ($x < -3$). La tabella dice la stessa cosa, ma continua a funzionare con tre fattori o più, dove i casi da elencare a mano diventano troppi.

6. Verifica. $x = -4$: $(-5)(-1) = 5 > 0$, vera. $x = 0$: $(-1)(3) = -3 > 0$, falsa.

Lo zero del denominatore non entra mai in S

In $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$ la riga finale della tabella ha un $\neq$ sotto $x = -2$, non uno 0: lì la frazione non è né positiva né negativa, semplicemente non esiste.

Quindi anche quando la disuguaglianza è larga ($\geq$, $\leq$), gli zeri del denominatore restano fuori dall'insieme delle soluzioni. Entrano solo quelli del numeratore.

13 Problemi con le disequazioni

È il motivo per cui le disequazioni esistono. Le parole che le fanno comparire sono sempre le stesse: *almeno*, *al massimo*, *non superiore a*, *conviene*, *basta che*, *entro*.

Formula 13.1: Le traduzioni che tornano sempre:

Nel testo	In simboli
x è almeno 5	$x \geq 5$
x è al massimo 5	$x \leq 5$
x non supera 5	$x \leq 5$
x supera 5	$x > 5$
x è minore di 5	$x < 5$
x non è inferiore a 5	$x \geq 5$
A conviene rispetto a B	$\text{costo}_A < \text{costo}_B$

«Almeno» e «al massimo» portano l'uguale; «supera» e «è minore» no.

Metodo 13.1: Tradurre un problema:

1. Leggi due volte e scrivi **che cosa chiami** x , con l'unità di misura: « x = peso del pacco in kg». Una frase, non un simbolo solo.
2. Scrivi le altre quantità in funzione di x .
3. Trova nel testo la frase che dà la disuguaglianza, e traducila.
4. Risolvi e scrivi S .
5. **Torna al problema:** quali soluzioni hanno senso? Una lunghezza è positiva, un numero di persone è intero. Le condizioni che il problema impone si chiamano **condizioni di accettabilità**, e la risposta finale è l'intersezione fra S e quelle.

Esempio Svolto 13.1: Un problema di spesa:

Un corriere chiede 8 euro fissi di ritiro più 3 euro per ogni chilogrammo. Il tetto di spesa per un pacco è 50 euro. Quanto può pesare il pacco?

1. **Scelgo l'incognita.** x = peso del pacco in chilogrammi.
2. **Scrivo la spesa.** Fissa più variabile: $8 + 3x$ euro.
3. **Traduco «non supera 50 euro».**

$$8 + 3x \leq 50$$

4. **Risolvo.**

$$3x \leq 42 \longrightarrow x \leq 14$$

5. **Torno al problema.** Un peso è positivo, quindi la condizione di accettabilità è $x > 0$. La risposta è

$$0 < x \leq 14$$

cioè il pacco può pesare fino a 14 kg.

6. Controllo. Con 14 kg la spesa è $8 + 42 = 50$: esattamente il tetto, e «non supera» lo ammette. Con 15 kg sarebbe 53, troppo.

Esempio Svolto 13.2: Un problema di geometria:

Un rettangolo ha la base che supera l'altezza di 3 cm. Il perimetro non deve superare 26 cm. Fra quali valori può stare l'altezza?

1. Incognita. x = altezza in centimetri; la base è $x + 3$.

2. Il perimetro è $2[x + (x + 3)] = 4x + 6$.

3. Traduco.

$$4x + 6 \leq 26$$

4. Risolvo.

$$4x \leq 20 \longrightarrow x \leq 5$$

5. Torno al problema. Un'altezza è positiva: $x > 0$. La base, $x + 3$, è positiva di conseguenza. La risposta è

$$0 < x \leq 5$$

6. Perché la condizione va scritta. Da sola, $x \leq 5$ ammetterebbe $x = -10$, che risolve la disequazione ma non è un'altezza. La disequazione non sa che x è una misura: lo sa il problema, e chi risolve deve dirlo.

Esempio Svolto 13.3: Un problema di media:

Uno studente ha preso 6, 7 e 5 nelle prime tre verifiche. Quanto deve prendere nella quarta perché la media sia almeno 6?

1. Incognita. x = voto della quarta verifica.

2. La media dei quattro voti è $\frac{6 + 7 + 5 + x}{4}$.

3. Traduco «almeno 6», che porta l'uguale.

$$\frac{18 + x}{4} \geq 6$$

4. Risolvo. Moltiplico per 4, positivo: il verso resta.

$$18 + x \geq 24 \longrightarrow x \geq 6$$

5. Torno al problema. I voti stanno fra 1 e 10, quindi la risposta è $6 \leq x \leq 10$: deve prendere almeno 6. Controllo: con 6 la media è $\frac{24}{4} = 6$, che «almeno 6» ammette; con 5 sarebbe $\frac{23}{4} = 5,75$, sotto.

La disequazione non conosce il problema

Tre risposte formalmente giuste e sostanzialmente sbagliate:

- «il lato misura $x \leq 5$ cm», senza dire $x > 0$;
- «servono $x > 12$ persone», lasciando $x = 12,5$ dentro l'insieme: le persone sono un numero intero, quindi la risposta è 13;
- «basta vendere più di $\frac{15}{2}$ oggetti», che nella realtà vuol dire 8.

L'insieme delle soluzioni è il risultato della *disequazione*; la risposta al *problema* è quell'insieme intersecato con quello che il problema ammette, e va scritta a parole.

Dove si va da qui

Quando l'incognita resta al quadrato servono le *disequazioni di secondo grado*: lì il grafico della parabola prende il posto della retta, ma la tabella dei segni del paragrafo 12 resta identica, e la soluzione di un sistema è ancora l'intersezione, letta sullo stesso disegno.

Indice analitico

Cambio di verso, 8
Condizioni di accettabilità, 19
Condizioni di esistenza, 17

Discussione, 14
Disequazione, 5
Disequazione fratta, 17
Disequazione impossibile, 13
Disequazione intera, 9
Disequazione mai verificata, 13
Disequazione prodotto, 17
Disequazione sempre verificata, 13
Disequazioni con prodotti notevoli, 11
Disequazioni equivalenti, 8
Disequazioni frazionarie, 12
Disequazioni letterali, 14
Disuguaglianza, 3

Estremo di un intervallo, 6

Grado di una disequazione, 5

Incognita, 5
Insieme delle soluzioni, 5
Intersezione, 16
Intervallo, 6

Minimo comune multiplo, 12

Ordinamento, 3

Parametro, 14
Principi di equivalenza, 8
Problemi con le disequazioni, 19

Rappresentazione grafica, 6
Regola dei segni, 17

Semiretta, 6
Sistema di disequazioni, 16

Tabella dei segni, 17
Traduzione algebrica, 19

Verso, 3