

FORMULARIO: SISTEMI DI DISEQUAZIONI

Tutte le righe sono di **primo grado** o si scompongono in fattori di primo grado. In ogni riquadro c'è il metodo, la riga **QUANDO** e un esempio con i numeri.

1 Il metodo

1.1 La graffa vuol dire «e»

$$\begin{cases} D_1(x) \geq 0 \\ D_2(x) \geq 0 \end{cases} \quad S = S_1 \cap S_2$$

Ogni riga si risolve **per conto suo**; la risposta è l'**intersezione**: i valori che vanno bene per tutte le righe insieme. Con tre righe, $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$.

QUANDO c'è una graffa. Non si risolve «per sostituzione»: da $x > 2$ non si ricava un valore, si ricava un insieme.

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3 \\ x + 2 \leq 7 \end{cases} \implies \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 5 \end{cases} \implies 2 < x \leq 5$$

1.2 I cinque passi

1. C.E. di tutte le righe fratte, subito;
2. risolvi **una riga alla volta**, fino in fondo;
3. scrivi ogni S_i come disuguaglianza (col $\vee$ se ha due pezzi);
4. **grafico**: una linea per riga, punti sulla stessa verticale;
5. leggi la parte comune a **tutte** le linee, e toglie le C.E.

QUANDO sempre, e nell'ordine. Saltare il punto 3 è il modo di perdere un pezzo di risposta senza accorgersene.

ESEMPIO

Pallino **pieno** dove l'estremo è compreso, **vuoto** dove è escluso. I punti si segnano su **tutte** le righe, anche dove quella riga non ne ha: se le verticali non sono allineate, il confronto non si legge.

1.3 I due disegni non sono lo stesso disegno

	quadro dei segni	grafico delle soluzioni
dove	dentro una riga	fra le righe
righe	i fattori	le disequazioni
in fondo	un segno	un insieme
si fa	la regola dei segni	l' intersezione

QUANDO una riga del sistema è un prodotto o una frazione: allora servono tutti e due, prima l'uno e poi l'altro.

ESEMPIO

I segni di due **righe** non si moltiplicano mai fra loro: chi lo fa scrive + dove le due disequazioni sono **tutte e due false**, e ottiene l'unione al posto dell'intersezione.

2 Che cosa fare a una riga, prima**2.1 Righe con le parentesi: si sviluppa**

Finché ci sono le parentesi non si sa nemmeno di che grado è la riga. Si sviluppa, e i termini di secondo grado **si cancellano**.

QUANDO compaiono quadrati, cubi o prodotti di binomi. Se dopo lo sviluppo resta un x^2 , o c'è un errore di segno, o la disequazione non è di questo capitolo.

ESEMPIO

$$(x+2)^2 - (x-2)^2 \geq 16 \implies 8x \geq 16 \implies x \geq 2$$

Il meno davanti alla parentesi va a **tutti** i termini: $-(x^2 - 4x + 4) = -x^2 + 4x - 4$.

2.2 Righe con denominatori numerici: il m.c.m.

$$\frac{A}{p} \geq \frac{B}{q} \implies \text{si moltiplica per } m = \text{m.c.m.}(p, q) > 0$$

Il verso **resta**: il m.c.m. è un numero positivo. È l'unico caso in cui moltiplicare è lecito senza discutere il segno.

QUANDO i denominatori sono **numeri**. Se dentro un denominatore c'è la x , questa regola non vale.

ESEMPIO

$$\frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{3} > 0 \implies 3(x+1) - 2(x-1) > 0 \implies x > -5$$

Il termine noto ha un denominatore anche lui: in $\frac{x}{2} + 1 \leq \frac{x+4}{3}$ quell'1 diventa $\frac{6}{6}$.

2.3 Righe che sono prodotti: quadro dei segni

Il segno di un prodotto si legge dal quadro: una riga per fattore, una colonna per intervallo. L'insieme che ne esce ha spesso **due pezzi**.

QUANDO la riga è già scritta come prodotto, o lo diventa dopo la scomposizione.

ESEMPIO

	1	4	
$x-1$	-	0	+
$x-4$	-	-	0
prodotto	+	0	-

$(x-1)(x-4) > 0$ dà $x < 1 \vee x > 4$: al grafico ci vanno **tutti e due** i pezzi.

2.4 Righe da scomporre

- raccoglimento: $x^2 - 4x = x(x-4)$;
- differenza di quadrati: $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$;
- trinomio notevole: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

QUANDO la riga è un polinomio e non un prodotto. Il segno di una somma non si legge; quello di un prodotto sì.

ESEMPIO

Non si divide per x . Da $x^2 \geq 4x$ dividendo verrebbe $x \geq 4$: si perde tutto il pezzo $x \leq 0$. Si raccoglie: $x(x-4) \geq 0$ dà $x \leq 0 \vee x \geq 4$.

2.5 Righe fratte: le C.E. sono del sistema

Se una riga ha il denominatore $D(x)$, i valori che annullano D sono fuori dalla risposta **anche se tutte le altre righe li accettano**.

QUANDO c'è almeno una riga fratta. Le C.E. si scrivono per prime, prima di qualunque conto.

ESEMPIO

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x-3} > 0 \\ x < 5 \end{cases} \quad \text{C.E.: } x \neq 3 \implies x < 1 \vee 3 < x < 5$$

Col verso largo entra lo zero del **numeratore** (lì la frazione vale zero), mai quello del denominatore.

2.6 Righe fratte non in forma normale

$$\frac{N}{D} \geq k \implies \frac{N}{D} - k \geq 0 \implies \frac{N - kD}{D} \geq 0$$

Tutto a primo membro e denominatore comune. **Mai** in croce: il segno di D dipende da x , e moltiplicare per una quantità di segno sconosciuto non conserva il verso.

QUANDO a secondo membro non c'è lo zero.

ESEMPIO

$$\frac{x+1}{x-2} < 2 \implies \frac{-x+5}{x-2} < 0 \implies x < 2 \vee x > 5$$

Moltiplicando in croce verrebbe $x > 5$: il numero 0 smaschera l'errore, perché nel testo dà $-\frac{1}{2} < 2$, vero.

2.7 Somme di frazioni

Finché è una **somma** non c'è niente da studiare: il segno di una somma non si legge da quello degli addendi. Prima il m.c.m., poi il quadro.

QUANDO la riga è fatta di due frazioni sommate.

ESEMPIO

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} > 0 \implies \frac{2x}{(x-1)(x+1)} > 0 \implies -1 < x < 0 \vee x > 1$$

Due C.E.: $x \neq 1$ e $x \neq -1$.

3 I casi limite

3.1 Sistema impossibile

Se le righe non hanno nessun punto in comune, $S = \emptyset$. Non è un errore di conto: è la risposta.

QUANDO sul grafico non c'è nessuna striscia coperta da tutte le linee.

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x - 1 > 5 \\ x + 3 < 6 \end{cases} \implies \begin{cases} x > 3 \\ x < 3 \end{cases} \implies S = \emptyset$$

Non si «aggiusta» prendendo l'unione: l'unione risponde a una domanda che nessuno ha fatto.

3.2 Un punto solo

Due versi **larghi** che si toccano danno un insieme di un elemento.

QUANDO le due semirette hanno lo stesso estremo e i versi sono $\leq$ e $\geq$. Con un verso stretto, invece, il sistema è impossibile.

ESEMPIO

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases} \implies x = 3 \quad S = \{3\}$$

Stessi estremi ma un verso stretto: $\begin{cases} x > 3 \\ x \leq 3 \end{cases}$ dà $S = \emptyset$.

3.3 Righe sempre vere e righe mai vere

Dopo i conti una riga può ridursi a $0 \cdot x \geq k$:

- vera per ogni x : $S_i = \mathbb{R}$, e la riga non toglie niente;

- falsa per ogni x : $S_i = \emptyset$, e il sistema è impossibile **senza guardare le altre righe**.

QUANDO la x si cancella. Non è un errore: si guarda che cosa resta.

ESEMPIO

$0 \cdot x > -3$ è sempre vera; $0 \cdot x > 3$ non lo è mai. L'intersezione con l'insieme vuoto è vuota.

4 I problemi

4.1 Dal testo al sistema

1. scegli l'incognita e **scrivi che cos'è**, unità compresa;
2. una riga per ogni condizione del testo;
3. una riga per i vincoli **impliciti** ($x > 0$ per una lunghezza, un prezzo, un tempo);
4. risolvi, e **torna al testo** per la risposta.

QUANDO il testo pone più condizioni insieme. Il punto 3 è quello che si dimentica, ed è quello che fa comparire soluzioni che nella realtà non esistono.

ESEMPIO

Compro a 40 euro e voglio guadagnare *almeno* 15 euro restando *sotto* i 72 del concorrente:

$$\begin{cases} x - 40 \geq 15 \\ x < 72 \end{cases} \implies 55 \leq x < 72$$

4.2 Le parole che diventano versi

almeno, non meno di, minimo	$\geq$	al più, non più di, massimo	$\leq$
più di, oltre, supera	$>$	meno di, sotto, inferiore a	$<$

QUANDO si traduce un testo. «Almeno quindici» comprende quindici; «più di quindici» no.

ESEMPIO

«Compreso fra a e b » sono **due** condizioni, e diventano un sistema: $\begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \end{cases}$.

La mappa: che cosa fare a ogni riga

Se la riga è...

allora...

già $x \geq k$

niente da fare: al grafico

con parentesi o quadrati

sviluppa: il secondo grado si cancellacon denominatori **numerici**moltiplica per il **m.c.m.**, il verso restaun **prodotto** ≥ 0 **quadro dei segni**: S_i può avere due pezzi

un polinomio

scomponi in fattori di primo gradouna **frazione** ≥ 0 C.E. e quadro, con $\neq$ sopra lo zero di D una frazione $\geq k$ **forma normale**: mai in croceuna **somma** di frazioni

m.c.m., somma, e solo allora il quadro

Qualunque sia la riga, si finisce sempre nello stesso posto: il **grafico delle soluzioni** e l'intersezione. Quello che cambia è quanta strada c'è per arrivarci.

4.3 I controlli che costano dieci secondi

- un numero **dentro** la risposta rende vere **tutte** le righe di partenza;
- un numero **fuori** ne rende falsa **almeno una**;
- ogni riga con un quadro ha portato al grafico **tutti** i suoi pezzi?
- le C.E. sono state tolte alla fine, non solo scritte all'inizio?
- se la risposta ha due pezzi, hai sostituito un numero **per ogni pezzo**?

QUANDO sempre, prima di consegnare.

ESEMPIO

Si sostituisce nelle righe **di partenza**, non nelle forme già semplificate: se l'errore fosse nello sviluppo, controllare sulla riga dopo lo confermerebbe invece di scoprirlo.