

SISTEMI DI DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

02 - ALGEBRA1

Due o tre condizioni insieme: risolverle una per una,
disegnarle sulla stessa retta e leggere la parte comune

Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima di partire	3
2	Che cos'è un sistema di disequazioni	3
3	Il grafico delle soluzioni	5
4	Righe da sviluppare	6
5	Righe con il m.c.m.	7
6	Sistemi di tre righe	8
7	I casi limite	9
8	Una riga è una disequazione prodotto	11
9	Una riga da scomporre	12
10	Righe fratte	13
11	Righe fratte da normalizzare	14
12	Sistemi misti	15
13	Problemi	16
14	Quale strada, e quando	18

1 Cosa serve prima di partire

Cosa devi già sapere

Tutto quello che serve sta qui sotto. Se una di queste cose non è fresca, si legge questa pagina e si va avanti: non serve altro materiale.

1. Disequazione di primo grado. $ax + b > 0$ si risolve come un'equazione, con una regola in più: se si divide (o si moltiplica) per un numero **negativo**, il verso **si rovescia**.

$$-2x + 6 > 0 \implies -2x > -6 \implies x < 3$$

2. Le tre scritture di un insieme. La stessa risposta si scrive in tre modi, e vanno saputi tutti e tre:

$$2 < x \leq 5 \quad S = (2, 5] \quad \text{e il disegno sulla retta}$$

Parentesi **tonda** dove l'estremo è escluso, **quadra** dove è compreso. Dalla parte dell'infinito sempre tonda.

3. m.c.m. fra numeri. Il minimo comune multiplo di 2, 3 e 6 è 6: si prendono tutti i fattori primi con l'esponente più grande. Serve a togliere i denominatori.

4. Prodotti notevoli.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

5. Quadro dei segni. Il segno di un prodotto si legge da una tabella: una riga per fattore, una colonna per intervallo, e in fondo la riga del prodotto. Il binomio $mx + q$ è concorde con m *dopo* il suo zero. Nelle frazioni, sopra lo zero del denominatore si scrive $\neq$ e non 0.

6. Scomposizione in fattori di primo grado: raccoglimento ($x^2 - 4x = x(x - 4)$), differenza di quadrati ($x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$), trinomio notevole ($x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$).

7. C.E. di una frazione algebrica: il denominatore non può valere zero, e i valori che lo annullano restano fuori dalla risposta con *qualunque* verso.

8. Unione e intersezione. $A \cap B$ è fatto degli elementi che stanno in A e in B ; $A \cup B$ di quelli che stanno in A oppure in B . Tutto questo capitolo sta nella differenza fra quelle due parole.

2 Che cos'è un sistema di disequazioni

Un problema chiede quasi sempre **due** condizioni insieme. Il prezzo di vendita deve stare sopra il costo *e* sotto quello del concorrente. Il numero di ore deve bastare a finire il lavoro *e* stare dentro il monte ore pagato. Un valore che rispetta la prima condizione ma non la seconda non serve a niente.

Due o più disequazioni legate da una graffa sono un **sistema**, e la graffa vuol dire «e».

Formula 2.1: Sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} D_1(x) \geq 0 \\ D_2(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad S = S_1 \cap S_2$$

Si risolve ogni disequazione **per conto suo**: la prima dà l'insieme S_1 , la seconda S_2 . La soluzione del sistema è l'**intersezione**: i valori che vanno bene per tutte le righe *contemporaneamente*.

Con tre righe non cambia niente: $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$.

Esempio Svolto 2.1: Dal testo alla graffa: «Un numero è **maggiore** di 2 e **non supera** 5.»

Sono due condizioni, e vanno tutte e due rispettate: si scrivono una sotto l'altra dentro una graffa.

$$\begin{cases} x > 2 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

«Maggiore di» dà il verso stretto, «non supera» dà quello largo. La risposta sarà $2 < x \leq 5$: il 5 dentro, il 2 fuori.

Controllo. Il numero 5 verifica tutte e due le condizioni ($5 > 2 \checkmark$, $5 \leq 5 \checkmark$); il numero 2 no, perché la prima chiede *maggiore* e non *maggiore o uguale*.

«E» non è «oppure»

$\begin{cases} x > 2 \\ x < 5 \end{cases}$ non vuol dire « x è maggiore di 2 oppure minore di 5» — che sarebbe vero per qualunque numero, e non direbbe niente. Vuol dire che x deve essere **tutte e due** le cose: $2 < x < 5$.

Il segnale è la scrittura: $\vee$ (oppure) fra le due risposte di una riga sola, $\cap$ (e) fra le righe di un sistema.

Perché non si risolvono «insieme»

Un sistema di *equazioni* si risolve per sostituzione: si ricava una lettera e la si porta nell'altra. Con le disequazioni non si può, perché da $x > 2$ non si ricava un valore da sostituire: si ricava un *insieme* di valori.

Per questo il metodo è un altro, ed è più semplice: si risolve tutto separatamente e si confrontano le risposte alla fine.

3 Il grafico delle soluzioni

Le risposte delle righe si confrontano **disegnandole**. Una linea per riga, i punti tutti sulla stessa verticale, e in fondo — separata — la riga del risultato.

Metodo 3.1: Come si risolve un sistema:

1. C.E. di tutte le righe fratte, scritte subito: valgono per il sistema **intero**.
2. Risolvi **una riga alla volta**, fino in fondo.
3. Scrivi ogni S_i come disuguaglianza.
4. Disegna il **grafico**: una linea per riga, i punti sulla stessa verticale, pallino **pieno** se l'estremo è compreso e **vuoto** se è escluso.
5. Leggi la parte coperta da **tutte** le linee, e toglie i valori esclusi dalle C.E.

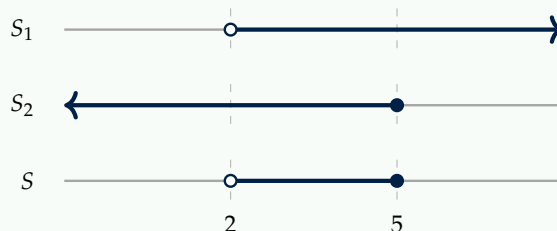
Esempio Svolto 3.1: Il primo sistema, per intero:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3 \\ x + 2 \leq 7 \end{cases}$$

1. **Prima riga.** $2x - 1 > 3 \implies 2x > 4 \implies S_1 : x > 2$.

2. **Seconda riga.** $x + 2 \leq 7 \implies S_2 : x \leq 5$.

3. **Il grafico.** Due punti, 2 e 5:



Il pallino su 2 è **vuoto** (il verso era stretto), quello su 5 è **pieno**.

4. **Lettura.** La parte coperta da tutte e due le linee:

$$2 < x \leq 5 \quad S = (2, 5]$$

Controllo. $x = 3$ (dentro): $6 - 1 = 5 > 3 \checkmark$ e $3 + 2 = 5 \leq 7 \checkmark$. $x = 0$ (fuori): la seconda riga dà $2 \leq 7$, vera, ma la prima dà $-1 > 3$, **falsa** — e una riga falsa basta a buttare via il valore.

I punti si segnano tutti su tutte le righe

Le verticali tratteggiate servono a confrontare, e confrontare vuol dire guardare la **stessa** ascissa su righe diverse. Se ogni riga porta solo i suoi punti, le verticali non sono allineate e il disegno smette di dire quello che deve dire.

I punti non si mettono in scala: si mettono **in ordine** ed equidistanti. Fra 1 e $\frac{6}{5}$ non c'è spazio da disegnare, ma l'ordine è tutto quello che serve.

Il controllo che costa dieci secondi

Un numero preso **dentro** la risposta deve rendere vere *tutte* le righe; un numero preso **fuori** ne deve rendere falsa *almeno una*. Si sostituisce nelle righe **di partenza**, non nelle forme già semplificate: se l'errore fosse nello sviluppo, controllare sulla riga dopo lo confermerebbe invece di scoprirlo.

4 Righe da sviluppare

Finché ci sono le parentesi non si sa nemmeno *di che grado* è una riga. Il primo passaggio quindi non è «risolvo»: è **sviluppo**.

Esempio Svolto 4.1: Due righe con i prodotti notevoli:

$$\begin{cases} (x+2)^2 - (x-2)^2 \geq 16 \\ 3(x-1) - 2(x+1) < 5 \end{cases}$$

1. Prima riga. Si sviluppano i due quadrati:

$$x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 4x + 4) \geq 16$$

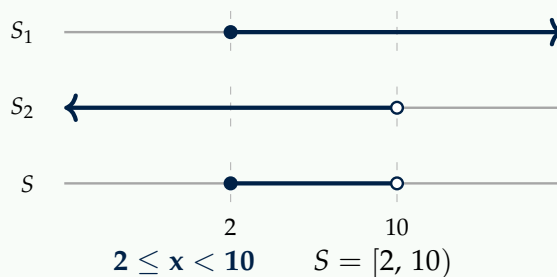
$$x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4x - 4 \geq 16 \implies 8x \geq 16 \implies S_1 : x \geq 2$$

I termini in x^2 si sono cancellati: la riga era di primo grado, ma prima di sviluppare non si poteva saperlo.

2. Seconda riga.

$$3x - 3 - 2x - 2 < 5 \implies x - 5 < 5 \implies S_2 : x < 10$$

3. Il grafico e la lettura.



Controllo. $x = 2$: la prima riga dà $16 - 0 = 16 \geq 16 \checkmark$ (il verso è largo, quindi 2 entra); la seconda $3 - 6 = -3 < 5 \checkmark$.

Il meno davanti alla parentesi

$-(x-2)^2$ non è $-x^2 - 4x - 4$. Prima si sviluppa il quadrato, poi si cambia il segno a **tutti** i suoi termini:

$$-(x^2 - 4x + 4) = -x^2 + 4x - 4$$

È l'errore che fa restare in piedi il termine di secondo grado, e a quel punto la riga sembra di un capitolo che non è questo.

Se il secondo grado non se ne va

In questo capitolo, quando si sviluppa, i termini in x^2 si cancellano **sempre**. Se restano, o c'è un errore di segno, oppure la disequazione è di secondo grado — e allora serve un altro metodo (il segno del trinomio), che si studia più avanti.

Vale come controllo: dopo aver sviluppato, se resta un x^2 , si ricontrolla il conto *prima* di andare avanti.

5 Righe con il m.c.m.

Quando una riga ha i denominatori si moltiplicano i due membri per il loro m.c.m. Qui si può, e vale la pena capire **perché**: il m.c.m. di due numeri è un numero **positivo**, e moltiplicare per un numero positivo non cambia il verso.

Formula 5.1: Moltiplicare per il m.c.m.:

$$\frac{A}{p} \geq \frac{B}{q} \implies \text{si moltiplica tutto per } m = \text{m.c.m.}(p, q) > 0$$

Il verso **resta**. È l'unico caso, in tutto il programma delle disequazioni, in cui si può moltiplicare senza discutere il segno: perché il denominatore è un **numero**, e il suo segno si vede.

Esempio Svolto 5.1: Due righe con i denominatori:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{3} > 0 \\ \frac{x}{2} + 1 \leq \frac{x+4}{3} \end{cases}$$

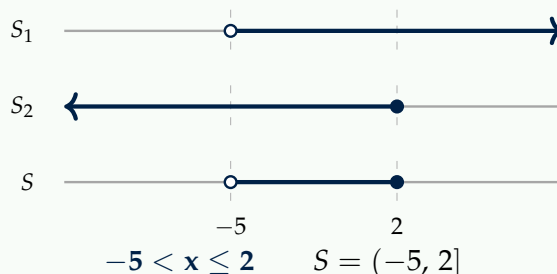
1. **Prima riga.** m.c.m.(2, 3) = 6:

$$\frac{3(x+1) - 2(x-1)}{6} > 0 \implies 3x + 3 - 2x + 2 > 0 \implies S_1 : x > -5$$

2. Seconda riga. m.c.m.(2,3) = 6, e il termine noto 1 diventa $\frac{6}{6}$:

$$\frac{3x+6}{6} \leq \frac{2x+8}{6} \implies 3x+6 \leq 2x+8 \implies S_2 : x \leq 2$$

3. Il grafico e la lettura.



Controllo. $x = 0$: prima riga $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} > 0 \checkmark$; seconda riga $0 + 1 = 1 \leq \frac{4}{3} \checkmark$.

Il termine noto ha anche lui un denominatore

In $\frac{x}{2} + 1 \leq \frac{x+4}{3}$, quel 1 va scritto $\frac{6}{6}$, non lasciato com'è. Chi moltiplica solo le frazioni e si dimentica il termine noto ottiene una disequazione diversa — e non se ne accorge, perché il risultato è comunque un numero.

Modo sicuro: si scrive tutta la riga su un denominatore solo *prima* di toglierlo.

Un denominatore con la x dentro non è un numero

La regola di questo paragrafo vale perché p e q sono **numeri**. Con $\frac{1}{x-2}$ non vale più niente: il segno di $x - 2$ dipende da x , che è quello che stiamo cercando, e moltiplicare per una quantità di segno sconosciuto non conserva il verso. Quel caso si tratta nel paragrafo 11.

6 Sistemi di tre righe

Il metodo non cambia: cambia solo il numero di linee del grafico. Cambia però una cosa nella testa di chi risolve, e vale la pena dirla.

Esempio Svolto 6.1: Tre righe:

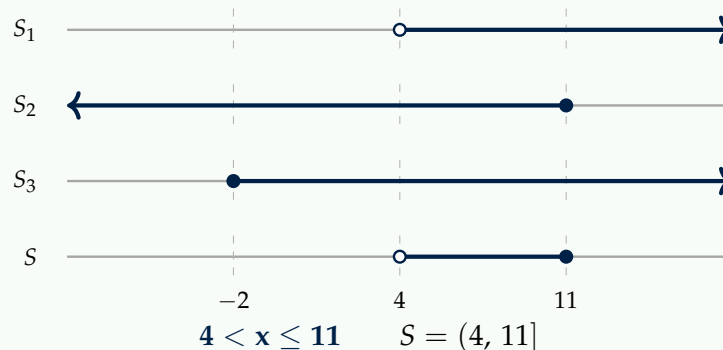
$$\begin{cases} 2(x-1) - (x+1) > 1 \\ \frac{x+3}{2} - \frac{x+1}{4} \leq 4 \\ 3x-1 \geq -7 \end{cases}$$

$$1. 2x - 2 - x - 1 > 1 \implies x - 3 > 1 \implies S_1 : x > 4.$$

$$2. \text{m.c.m.}(2, 4) = 4: \frac{2(x+3) - (x+1)}{4} \leq 4 \implies 2x + 6 - x - 1 \leq 16 \implies S_2: x \leq 11.$$

$$3. 3x \geq -6 \implies S_3: x \geq -2.$$

4. Il grafico, tre linee più quella del risultato:



La terza riga non ha tolto niente: $x \geq -2$ era già garantito da $x > 4$. Non è un errore e non è tempo perso — *quale* sia la riga che non serve si sa solo dopo averle disegnate tutte.

Perché a decidere sono quasi sempre due righe

Ogni disequazione di primo grado dà una **semiretta**: taglia da una parte sola. In un sistema di tre righe intere, quindi, a decidere sono al massimo **due** — una che chiude a sinistra e una che chiude a destra — e la terza, quasi sempre, non toglie niente.

Il discorso cambia con le righe prodotto e con le fratte (paragrafi 8–11): quelle danno insieme fatti di **più pezzi**, e allora anche la terza riga può tagliare.

Non si «risolve a due a due»

Con tre righe viene la tentazione di intersecare le prime due, poi il risultato con la terza, tenendo tutto a mente. Funziona finché le risposte sono intervalli semplici, e crolla appena una riga ha due pezzi.

Il grafico costa dieci secondi e non crolla mai: tutte le righe insieme, e si legge in verticale.

7 I casi limite

Tre esiti che non sono un intervallo, e che non sono errori: sono risposte.

Formula 7.1: I tre esiti particolari:

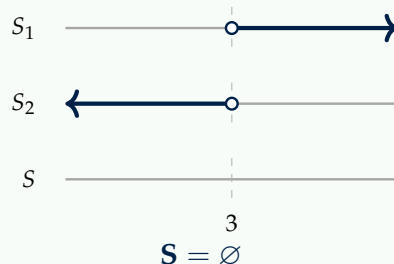
- **Sistema impossibile**: le righe non hanno nessun punto in comune, e $S = \emptyset$.
- **Un punto solo**: le righe si toccano in un valore soltanto, e $S = \{k\}$, che si scrive $x = k$.
- **Riga inutile**: una riga contiene tutte le altre e non toglie niente. Si scrive lo stesso

nel grafico.

Esempio Svolto 7.1: Un sistema impossibile e uno con un punto solo:

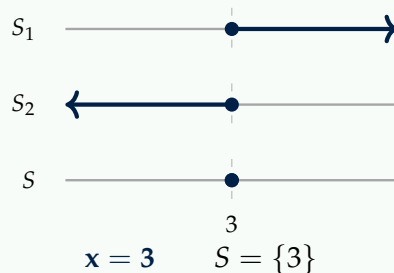
$$\begin{cases} 2x - 1 > 5 \\ x + 3 < 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

A sinistra: $S_1 : x > 3$ e $S_2 : x < 3$. Le due semirette si guardano senza toccarsi.



Non esiste nessun numero che sia insieme maggiore e minore di 3. Il valore 3 non salva niente: la prima riga lo escluderebbe comunque, perché il verso è stretto.

A destra: $S_1 : x \geq 3$ e $S_2 : x \leq 3$. Gli stessi due pezzi, ma con i versi **larghi**: adesso il punto 3 appartiene a tutte e due.



Controllo. $x = 3$: $3 \geq 3 \checkmark$ e $3 \leq 3 \checkmark$. Qualunque altro numero fa cadere una delle due.

Impossibile non vuol dire sbagliato

Davanti a $S = \emptyset$ viene il dubbio di aver sbagliato un conto, e la tentazione di «aggiustare» prendendo l'unione. È il modo peggiore di rispondere: l'unione risponde a una domanda che nessuno ha fatto.

Il controllo giusto è un altro: si rifà una riga, e se torna, si scrive $S = \emptyset$ e si va avanti.

Righe sempre vere e righe mai vere

Può capitare che una riga, dopo i conti, diventi $0 \cdot x > -3$: vera per ogni x , quindi $S_i = \mathbb{R}$. Quella riga non toglie niente e il sistema dipende solo dalle altre.

Se invece diventa $0 \cdot x > 3$, è **falsa** per ogni x : $S_i = \emptyset$, e allora il sistema è impossibile *senza guardare le altre righe*. L'intersezione con l'insieme vuoto è vuota.

8 Una riga è una disequazione prodotto

Da qui in avanti una riga può non essere una semiretta. Se la riga è un **prodotto**, il suo insieme si trova con il **quadro dei segni** e può avere **due pezzi**.

I due disegni non sono lo stesso disegno

È la confusione che questo paragrafo esiste per evitare.

	Quadro dei segni	Grafico delle soluzioni
dove serve	dentro una riga	fra le righe
le righe sono	i fattori	le disequazioni
in fondo si legge	un segno	un insieme
l'operazione è	la regola dei segni	l'intersezione

Chi li mescola moltiplica i segni di due *righe* come farebbe con due *fattori*, e scrive + dove tutte e due le disequazioni sono **false**: ottiene l'unione al posto dell'intersezione.

Esempio Svolto 8.1: Una riga prodotto e una riga elementare:

$$\begin{cases} (x-1)(x-4) > 0 \\ x < 6 \end{cases}$$

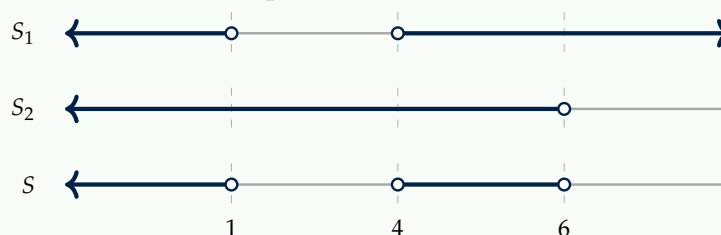
1. **Prima riga**, con il suo quadro. Zeri: 1 e 4.

	1	4
$(x-1)$	- 0 +	+
$(x-4)$	-	- 0 +
prodotto	+ 0 -	0 +

Serve positivo: $S_1 : x < 1 \vee x > 4$. **Due pezzi**.

2. **Seconda riga**. $S_2 : x < 6$.

3. **Il grafico delle soluzioni**, con tre punti: 1, 4, 6.



4. Lettura. Anche la risposta ha due pezzi:

$$x < 1 \vee 4 < x < 6 \quad S = (-\infty, 1) \cup (4, 6)$$

Controllo. $x = 5$ (dentro il secondo pezzo): $(5 - 1)(5 - 4) = 4 > 0 \checkmark$ e $5 < 6 \checkmark$. $x = 2$ (fuori): $(2 - 1)(2 - 4) = -2$, che non è positivo — la prima riga cade.

Il pezzo che si perde

Quando una riga ha due pezzi, il grafico ha due tratti *su quella linea*. Disegnarne uno solo è l'errore più comune del paragrafo, e la risposta che ne esce è «quasi giusta»: metà.

Contromisura: prima di disegnare, si scrive S_1 per esteso con il $\vee$. Quello che è scritto non si dimentica.

9 Una riga da scomporre

Se la riga arriva come polinomio, prima si **scompone** in fattori di primo grado: il segno di una somma non si legge, quello di un prodotto sì.

Esempio Svolto 9.1: Raccogliere, e non dividere:

$$\begin{cases} x^2 - 4x \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

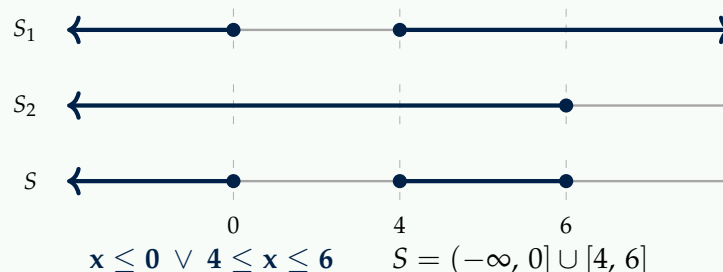
1. Prima riga. Si raccoglie la x : $x^2 - 4x = x(x - 4)$. Zeri: 0 e 4.

	0	4
(x)	-	+
$(x - 4)$	-	+
prodotto	+	-

Serve positivo o nullo, e il verso largo fa entrare gli zeri: $S_1 : x \leq 0 \vee x \geq 4$.

2. Seconda riga. $S_2 : x \leq 6$.

3. Il grafico.



Controllo. $x = 5$: $25 - 20 = 5 \geq 0 \checkmark$ e $5 \leq 6 \checkmark$. $x = 2$: $4 - 8 = -4$, negativo: fuori $\checkmark$.

Non si divide per x

Da $x^2 \geq 4x$ viene la tentazione di dividere tutto per x e scrivere $x \geq 4$. È sbagliato due volte: si perde la soluzione $x = 0$ (e tutte quelle negative), e si divide per una quantità di segno sconosciuto, che il verso non lo conserva.

Si porta tutto a primo membro e si **raccoglie**: $x(x - 4) \geq 0$. La differenza si vede subito, perché la risposta giusta ha due pezzi e quella sbagliata uno.

10 Righe fratte

Se una riga è una frazione, si risolve con il quadro dei segni — e porta con sé le **C.E.**, che valgono per il sistema **intero**.

Formula 10.1: Le C.E. sono del sistema: Se una riga ha il denominatore $D(x)$, i valori che annullano D sono esclusi dalla risposta **anche se tutte le altre righe li accettano**. La graffa lega tutto: non esiste una soluzione che vale solo per metà sistema.

Esempio Svolto 10.1: Una riga fratta:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x-3} > 0 \\ x < 5 \end{cases}$$

1. C.E. Il denominatore si annulla in 3: $x \neq 3$.

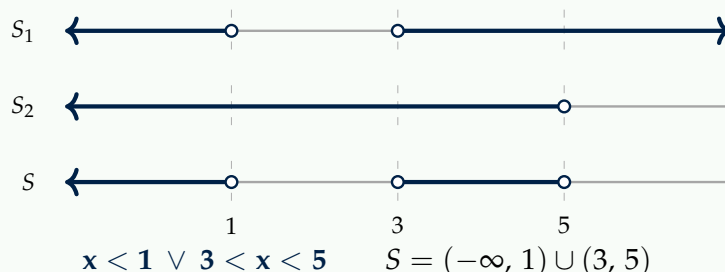
2. **Prima riga**, con il suo quadro. Sopra lo zero del denominatore va $\#$, non 0:

	1	3	
$(x-1)$	-	0	+
$(x-3)$ iny(den.)	-	-	$\#$
prodotto	+	0	-

$$S_1 : x < 1 \vee x > 3.$$

3. **Seconda riga.** $S_2 : x < 5$.

4. **Il grafico e la lettura.**



Il punto 3 è fuori due volte: perché lì la frazione non esiste, e perché il pallino è vuoto.

Controllo. $x = 4$: $\frac{3}{1} = 3 > 0 \checkmark$ e $4 < 5 \checkmark$. $x = 2$: $\frac{1}{-1} = -1$, non positivo: fuori $\checkmark$.

Con il verso largo entra solo lo zero di sopra

In $\frac{x-1}{x-3} \geq 0$ entra $x = 1$, dove la frazione *vale* zero; non entra $x = 3$, dove non esiste. Vale con qualunque verso e in qualunque sistema: uno zero del denominatore non è mai una soluzione.

11 Righe fratte da normalizzare

Quando la frazione non è già confrontata con lo zero, prima si porta **tutto a primo membro** e si fa il denominatore comune. E qui **non** si moltiplica.

Non si moltiplica in croce

$$\frac{x+1}{x-2} < 2 \quad \text{non} \quad \implies \quad x+1 < 2(x-2)$$

Moltiplicare per $x-2$ cambia il verso se $x-2$ è negativo — e se lo sia non si sa, perché dipende da x . Il numero 0 smaschera l'errore: nel testo dà $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} < 2$, vero; nella riga «semplificata» darebbe $1 < -4$, falso.

Esempio Svolto 11.1: Prima la forma normale, poi il quadro:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-2} < 2 \\ x > 0 \end{cases}$$

1. C.E.: $x \neq 2$.

2. Prima riga, tutto a primo membro:

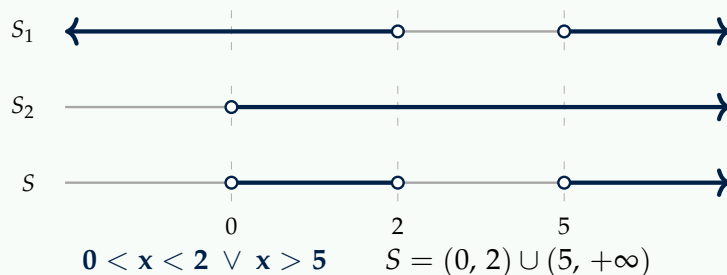
$$\frac{x+1}{x-2} - 2 < 0 \implies \frac{x+1-2(x-2)}{x-2} < 0 \implies \frac{-x+5}{x-2} < 0$$

Quadro con gli zeri 2 e 5 (la riga di $-x+5$ è **rovesciata**, perché il coefficiente della x è negativo):

$$S_1 : x < 2 \vee x > 5$$

3. Seconda riga. $S_2 : x > 0$.

4. Il grafico e la lettura.



Controllo. $x = 1$: $\frac{2}{-1} = -2 < 2 \checkmark$ e $1 > 0 \checkmark$. $x = 3$: $\frac{4}{1} = 4$, che non è minore di 2: fuori $\checkmark$.

Le somme di frazioni

Se la riga arriva come **somma** — per esempio $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} > 0$ — non c'è niente da studiare finché resta una somma: il segno di una somma non si legge da quello degli addendi ($-1 + 3$ è positivo, $-1 - 3$ no, e gli addendi hanno gli stessi segni).

Si fa il m.c.m., si somma, e solo quando è *una* frazione si apre il quadro:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)} > 0$$

Le C.E. sono due: $x \neq 1$ e $x \neq -1$.

12 Sistemi misti

L'arrivo del capitolo: nello stesso sistema una riga da scomporre, una riga fratta, e magari una riga intera. Il metodo è ancora quello del paragrafo 3 — quello che cambia è quanto lavoro c'è dentro ogni riga.

Esempio Svolto 12.1: Una riga da scomporre e una riga fratta:

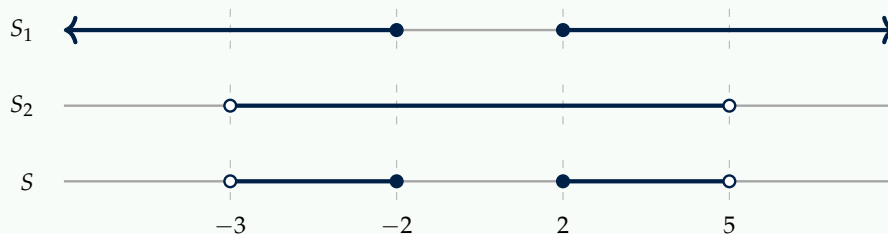
$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ \frac{x-5}{x+3} < 0 \end{cases}$$

1. C.E.: $x \neq -3$.

2. **Prima riga.** $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, zeri -2 e 2 , e serve positivo o nullo: $S_1 : x \leq -2 \vee x \geq 2$.

3. **Seconda riga.** Zeri -3 (denominatore) e 5 ; serve negativa: $S_2 : -3 < x < 5$.

4. **Il grafico**, quattro punti: $-3, -2, 2, 5$.



	1	4
$(x-1)$	-	+
$(x-4)$	-	0
prodotto	+	0

		0	4	
(x)	-	0	+	+
$(x-4)$	-		-	0
prodotto	+	0	-	0
		1	3	
$(x-1)$	-	0	+	+
$(x-3)$ iny(den.)	-		-	$\neq$
prodotto	+	0	-	$\neq$

5. Lettura. Due pezzi:

$$-3 < x \leq -2 \vee 2 \leq x < 5 \quad S = (-3, -2] \cup [2, 5)$$

Controllo. $x = 3$: $9 - 4 = 5 \geq 0 \checkmark$ e $\frac{-2}{6} < 0 \checkmark$. $x = 0$: $-4 \geq 0$ è falsa: fuori $\checkmark$.

Metodo 12.1: L'ordine dei lavori in un sistema misto:

1. **C.E.** di tutte le righe fratte, tutte insieme, subito.
2. Riga per riga: **sviluppa** o fai il **m.c.m.** se serve, **scomponi** se è un polinomio, porta in **forma normale** se è una frazione.
3. Per le righe che sono prodotti o frazioni, **quadro dei segni** e S_i scritto per esteso, con il $\vee$.
4. **Grafico** di tutte le righe insieme.
5. Leggi la parte comune, **togli le C.E.**, e sostituisci un numero per ogni pezzo della risposta.

13 Problemi

Un problema diventa un sistema quando il testo pone **più condizioni insieme**. La parte difficile non è risolverlo: è scriverlo.

Esempio Svolto 13.1: Il prezzo di vendita: Un negozio compra un articolo a 40euro e vuole rivenderlo guadagnandoci **almeno** 15euro, ma restando **sotto** il prezzo del concorrente, che è 72euro. Fra quali prezzi può stare?

1. **L'incognita:** x è il prezzo di vendita, in euro.
2. **Le condizioni,** una riga per ciascuna:

$$\begin{cases} x - 40 \geq 15 \\ x < 72 \end{cases}$$

3. **Risoluzione:** $S_1 : x \geq 55$ e $S_2 : x < 72$, quindi

$$55 \leq x < 72$$

4. Risposta al testo: il prezzo può andare da 55euro (compreso) a poco meno di 72euro.

Controllo. A 60euro il guadagno è 20euro ✓ e il prezzo è sotto quello del concorrente ✓.

Esempio Svolto 13.2: Un problema con la riga che il testo non dice: Un rettangolo ha la base di 8 cm. Il perimetro deve stare fra 30 cm e 44 cm, estremi compresi. Fra quali valori può stare l'altezza?

1. L'incognita: h è l'altezza, in centimetri.

2. Le condizioni. Il perimetro vale $2(8 + h)$, e deve stare fra 30 e 44. Sono *due* condizioni. E ce n'è una terza che il testo non scrive: un'altezza è positiva.

$$\begin{cases} 2(8 + h) \geq 30 \\ 2(8 + h) \leq 44 \\ h > 0 \end{cases}$$

3. Risoluzione. $16 + 2h \geq 30$ dà $h \geq 7$; $16 + 2h \leq 44$ dà $h \leq 14$; la terza dà $h > 0$.

$$7 \leq h \leq 14$$

La terza riga non ha tolto niente — ma questo si sa solo dopo averla scritta e risolta.

4. Risposta al testo: l'altezza può andare da 7 cm a 14 cm, estremi compresi.

Controllo. Con $h = 7$ il perimetro è $2(8 + 7) = 30$ ✓; con $h = 14$ è $2(8 + 14) = 44$ ✓. Con $h = 15$ verrebbe 46, fuori.

I vincoli che il testo non scrive

Un prezzo è positivo, una lunghezza è positiva, un numero di persone è un intero positivo. Il testo non lo dice perché è ovvio a chi legge — ma il sistema non lo sa, e senza quella riga può restituire soluzioni che nella realtà non esistono.

Regola: si aggiunge sempre la riga $x > 0$ (o $x \geq 0$) quando l'incognita è una grandezza. E alla fine si rilegge il testo: se la risposta contiene numeri che il problema non ammette, si scartano *dicendolo*.

Le parole che diventano versi

«Almeno», «non meno di», «minimo» danno $\geq$. «Al più», «non più di», «massimo» danno $\leq$. «Più di», «oltre», «supera» danno $>$; «meno di», «sotto» danno $<$.

La differenza fra $>$ e $\geq$ vale un punto nel compito e un errore nella vita: «almeno quindici euro» comprende quindici, «più di quindici» no.

14 Quale strada, e quando

Formula 14.1: La mappa del capitolo:

Se la riga è...	allora...
già $x \geq k$	niente da fare: si porta al grafico
con parentesi o quadrati	sviluppa : i termini di secondo grado si cancellano
con denominatori numerici	moltiplica per il m.c.m. : è positivo, il verso resta
un prodotto ≥ 0	quadro dei segni : S_i può avere due pezzi
un polinomio	scomponi in fattori di primo grado, poi il quadro
una frazione ≥ 0	C.E. e quadro, con $\neq$ sopra lo zero di D
una frazione $\geq k$	forma normale : tutto a primo membro, <i>mai</i> in croce
una somma di frazioni	m.c.m., somma, e solo allora il quadro

E poi, sempre uguale per tutte: **grafico delle soluzioni** e **intersezione**.

Esempio Svolto 14.1: Quale strada, senza risolvere: Per ciascuna riga, la prima mossa — e basta quella.

$\frac{x-1}{4} + 2 > x$: denominatore **numerico**. m.c.m. 4, si moltiplica, il verso resta.

$(x-3)^2 - x^2 \leq 9$: **sviluppo**. I quadrati si cancellano e resta $-6x + 9 \leq 9$.

$x^2 - 9 > 0$: **scomposizione**, poi quadro. Due pezzi in arrivo.

$\frac{3}{x-1} \geq 1$: **forma normale**. Tutto a primo membro — *non* si moltiplica per $x-1$.

$x \geq 3$ e $x \leq 3$ insieme: niente conti, si guarda il grafico. La risposta è un punto solo.

Chi sceglie bene la prima mossa ha già fatto metà dell'esercizio; chi la sceglie male fa dieci righe di conti giusti per arrivare a una risposta sbagliata.

Dove si va da qui

Il metodo imparato qui non cambia più.

Nelle **disequazioni di secondo grado** le righe diventano trinomi: si impara a leggere il segno di un trinomio, e poi si torna a questo grafico, identico. Nei **domini** delle funzioni le condizioni da mettere insieme sono spesso tre o quattro, ed è di nuovo un sistema di disequazioni. Nelle **disequazioni con il valore assoluto** il metodo generale spezza il problema in due sistemi, e ognuno dei due si risolve così.

Cioè: questa pagina si riusa per tre anni.

Indice analitico

C.E., 13

casi limite, 9

denominatore numerico, 7

disequazione fratta, 13

disequazione prodotto, 11

forma normale, 14

grafico delle soluzioni, 5

m.c.m., 7

problemi, 16

prodotti notevoli, 6

quadro dei segni, 11

scomposizione, 12

sistema di disequazioni, 3

sistema impossibile, 9

sistemi misti, 15

sviluppo, 6

tre righe, 8