

Tutti i fattori sono di **primo grado**. Il capitolo insegna una cosa sola — il **quadro dei segni** — e in ogni riquadro c'è il metodo, la riga **QUANDO** e un esempio con i numeri.

IllogicoMatematico - Pagina 1

ESEMPIO

Controllo gratuito: se tutti i fattori sono semplici, la riga finale **si alterna** $+$ $-$ $+$ $-$. Due colonne vicine con lo stesso segno vogliono dire o un errore, o un fattore **ripetuto**.

2 Fattori ripetuti e fattori costanti**2.1 La parità dell'esponente decide**

Nel prodotto compare $(mx + q)^k$:

- **k pari:** positivo o nullo **sempre**. La riga ha tutti $+$ e uno 0. *Non cambia segno;*
- **k dispari:** come il fattore semplice.

È la regola dei segni delle potenze: $(-3)^2 = +9$, $(-3)^3 = -27$.

QUANDO c'è un esponente. Si guarda **prima** di compilare la riga: $(x-1)^2$, $(x-1)^4$ e $(x-1)^{100}$ hanno tutte la stessa riga.

ESEMPIO

$(x-1)^2(x+2) > 0$ dà $-2 < x < 1 \vee x > 1$: il punto 1 è tolto perché lì il prodotto *vale zero*, non perché cambia segno.

$(x-1)^3(x+2) > 0$ dà invece $x < -2 \vee x > 1$.

2.2 I fattori che non cambiano mai segno

Un fattore **sempre positivo** si può togliere dividendo, e il verso resta. Uno **sempre negativo** si toglie **cambiando il verso**.

QUANDO c'è una costante davanti, o un quadrato. Attenzione al segno della costante: da $-3(x-1)(x+4) > 0$ viene $(x-1)(x+4) < 0$, che è la risposta *opposta*.

ESEMPIO

Il quadrato si toglie, ma il suo zero resta. Da $(x-1)^2(x+2) > 0$, semplificando senza dirlo si ottiene $x > -2$: sbagliato di un punto. La risposta è $x > -2$ **con** $x \neq 1$.

Un fattore si toglie solo dopo aver messo da parte i suoi zeri.

3 Le fratte**3.1 Disequazioni fratte: quattro passi**

1. C.E.: annulla i denominatori ed escludi quei valori;
2. **forma normale** $\frac{N}{D} \gtrless 0$ — non si moltiplica per il denominatore;
3. **quadro** con $\neq$ sopra gli zeri di D ;
4. leggi, **senza mai includere** i valori esclusi.

QUANDO l'incognita compare a denominatore.

ESEMPIO

	1	3	
$x - 1$	-	0	+
$x - 3$	-	-	0
$\frac{N}{D}$	+	0	-

$\frac{x-1}{x-3} > 0$ dà $x < 1 \vee x > 3$.

3.2 Perché il denominatore non si moltiplica

$$\frac{N}{D} > 0 \quad \text{non} \quad \implies \quad N > 0$$

Moltiplicare per D cambia il verso se D è negativo — e non si sa se lo è, perché dipende da x , che è quello che stiamo cercando.

QUANDO ogni volta che ti viene la tentazione di «togliere» il denominatore.

ESEMPIO

Da $\frac{x-1}{x-3} > 0$ moltiplicando verrebbe $x > 1$. Il numero 2 smaschera l'errore: nel testo dà $\frac{1}{-1} = -1$, che non è maggiore di zero — eppure starebbe nella risposta sbagliata.

Giusto: $x < 1 \vee x > 3$.

3.3 Il verso largo: chi entra e chi no

$$\frac{x-1}{x-3} \geq 0 \implies x \leq 1 \vee x > 3$$

Entra lo zero del **numeratore** (lì la frazione vale zero), non quello del **denominatore** — e quello non entra mai, con nessun verso.

QUANDO il verso è $\leq$ o $\geq$. Guarda le due parentesi: quadra a sinistra, tonda a destra, nella stessa risposta.

ESEMPIO

E se un valore annulla **tutti e due**, vince il denominatore: dove la frazione non esiste non può valere zero.

4 Scomporre, e la forma normale**4.1 Prima si scompone**

1. **raccoglimento totale:** $x^2 - 4x = x(x - 4)$ — ogni x raccolta porta uno zero in 0;
2. **differenza di quadrati:** $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$;
3. **raccoglimento parziale,** a gruppi di due.

QUANDO la disequazione non è già scritta come prodotto. In questo capitolo si scompone **sempre** in fattori di primo grado.

ESEMPIO

$x^3 - 4x > 0$ diventa $x(x-2)(x+2) > 0$, che dà $-2 < x < 0 \vee x > 2$.

Non si divide per x : si perderebbe tutto il pezzo a sinistra dello zero, e comunque non si sa il segno di x .

4.2 Forma normale: tutto a primo membro

1. **C.E.**, sui denominatori così come sono;
2. tutto a **primo membro**: a destra resta 0;
3. **denominatore comune** e somma;
4. si scompone N e D , e si compila il quadro.

QUANDO l'espressione arriva con le frazioni sparse, o con qualcosa a destra dell'uguale. Il quadro risponde a «dove questa espressione è positiva», e la domanda ha senso solo se l'espressione è *una*.

ESEMPIO

$\frac{1}{x} > 2$ diventa $\frac{1}{x} - 2 > 0$, cioè $\frac{1-2x}{x} > 0$, che dà $0 < x < \frac{1}{2}$.

«**Moltiplico in croce**» **qui non esiste**: darebbe $x < \frac{1}{2}$, che include tutti i negativi — e con $x = -1$ viene $-1 > 2$, falso.

5 Somme di frazioni**5.1 Il segno di una somma non si legge**

Il segno di un **prodotto** si legge da quello dei fattori; quello di una **frazione**, da quello di sopra e di sotto. Quello di una **somma**, no.

$$-1 + 3 = +2 \quad -1 + (-3) = -4$$

Stesso primo addendo, segni opposti.

QUANDO il primo membro è una somma di frazioni. Non si studiano i pezzi separatamente: si fa il **m.c.m.** e si ottiene *una* frazione.

ESEMPIO

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} > 0$ diventa $\frac{2x-1}{x(x-1)} > 0$: tre punti $(0, \frac{1}{2}, 1)$ e la risposta $0 < x < \frac{1}{2} \vee x > 1$.

5.2 Il m.c.m. non è il prodotto dei denominatori

È il prodotto *solo* quando i denominatori non hanno fattori in comune. Perciò: **prima si scompone**, poi si prende il **m.c.m.**

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} \implies x^2-1 = (x-1)(x+1) \implies \text{m.c.m.} = (x-1)(x+1)$$

QUANDO compare un denominatore di grado maggiore del primo, oppure due denominatori che si somigliano.

ESEMPIO

Moltiplicando alla cieca verrebbe $(x-1)^2(x+1)$: un fattore di troppo, e nel quadro **una riga che non c'entra**. Spesso la risposta viene lo stesso — ed è per questo che l'errore non si nota e resta.

Il conto giusto: $\frac{(x+1)+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+2}{(x-1)(x+1)}$.

6 Gli esercizi lunghi**6.1 Che cosa rende lungo un esercizio**

Non i numeri grandi: i **passaggi di tipo diverso** prima del quadro.

- **quattro fattori**: cinque colonne, e quattro occasioni in più per la distrazione;
- **numeratore e denominatore da scomporre**;
- **forma normale da costruire**;
- **un fattore ripetuto** dentro un prodotto lungo.

QUANDO riconoscerlo serve a rallentare apposta: in un esercizio lungo l'errore non è quasi mai nel metodo, è nella trascrizione.

ESEMPIO

Due abitudini che costano poco: scrivere gli zeri **in fila e in ordine** prima di disegnare, e alla fine sostituire **un numero per ogni pezzo** della risposta.

6.2 Un esercizio lungo, per intero

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - x} \leq 0 \implies \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-1)} \leq 0$$

con C.E. $x \neq 0$, $x \neq 1$, e zeri in ordine $-2, 0, 1, 2$.

QUANDO scomposizione, C.E. e quadro nello stesso esercizio: è il livello 4 del capitolo.

ESEMPIO

	-2	0	1	2	
$x-2$	-	-	-	-	0 +
$x+2$	-	0 +	+	+	+
x	-	-	0 +	+	+
$x-1$	-	-	-	0 +	+
$\frac{N}{D}$	+	0 -	+	+	- 0 +

$$-2 \leq x < 0 \vee 1 < x \leq 2$$

La mappa: da dove si comincia

Se il testo è...

allora...

già un prodotto ≥ 0 **quadro dei segni**, una riga per fattore

un prodotto con una potenza

guarda la **parità**: pari non cambia segno, dispari sìuna frazione ≥ 0 **C.E.** per prime, e $\neq$ sopra gli zeri di D

un polinomio da scomporre

raccogli o usa i prodotti notevoli, poi il quadro

un'espressione con frazioni sparse

forma normale: tutto a primo membro e denominatore comune

In tutti e cinque i casi si finisce nello stesso posto: un quadro dei segni. Quello che cambia è quanta strada c'è per arrivarci.

6.3 I controlli che costano dieci secondi

- **un numero per ogni pezzo** della risposta, sostituito nel testo di partenza;
- la riga finale si **alterna**, se i fattori sono tutti semplici;
- con n punti hai disegnato $n + 1$ colonne?
- nelle fratte: gli zeri del denominatore sono **fuori**?
- se hai semplificato un fattore, ne hai tenuto lo **zero**?

QUANDO sempre, prima di consegnare. In un esercizio lungo l'errore è quasi sempre di trascrizione, e la sostituzione lo prende.

ESEMPIO

Il primo è quello che vale di più: prende **qualunque** errore, da quello di metodo a quello di copiatura, e non richiede di ripercorrere i passaggi — che è proprio quello che conferma l'errore invece di scoprirlo.