

FORMULARIO: EQUAZIONI FRATTE

L'incognita sta al **denominatore**. Dopo il m.c.m. resta un'equazione di primo grado — e la risposta non è finita finché non l'hai confrontata con le C.E. In ogni riquadro c'è il metodo, la riga **QUANDO** e un esempio con i numeri.

1 Il metodo

1.1 I cinque passi, in quest'ordine

1. **Scomponi** tutti i denominatori;
2. **C.E.**: ogni denominatore $\neq 0$;
3. **m.c.m.** e tutto a primo membro, una frazione sola;
4. **numeratore** = 0, e si risolve;
5. **confronto** della soluzione con le C.E.

QUANDO l'incognita compare a denominatore. Se i denominatori sono solo numeri l'equazione è *intera*, e i passi 2 e 5 non servono.

ESEMPIO

L'ordine non è decorativo: il passo 4 è lecito **perché** c'è stato il passo 2. Una frazione vale zero se e solo se il numeratore è zero *e il denominatore no*, e il «denominatore no» è già garantito.

Che cosa rispondere, in una riga

Se l'intera diventa	La risposta è
$ax = b, a \neq 0$, valore ammesso	$x = \frac{b}{a}$
$ax = b, a \neq 0$, valore escluso	impossibile, $S = \emptyset$
$0x = k$ con $k \neq 0$	impossibile
$0x = 0$	indeterminata, con le C.E.
$x^2 = 0$ (o una potenza sola)	una soluzione, senza formula
due valori, uno escluso	l'altro, e si dice perché
due valori, tutti e due ammessi	non è questo capitolo

1.2 Le C.E. si leggono sulla scrittura di partenza

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{3x - 3} = 0 \implies \text{C.E.: } x \neq 1 \implies \frac{x - 1}{3} = 0 \implies x = 1 \implies \text{impossibile}$$

QUANDO sempre, ma soprattutto quando numeratore e denominatore hanno un fattore in comune.

ESEMPIO

Se semplifichi *prima* di scrivere le C.E., il vincolo che escludeva la soluzione sparisce — e non lo ritrovi rifacendo i conti, perché i conti sono giusti. È l'errore numero uno del capitolo.

1.3 I tre esiti, riconosciuti dall'equazione intera

$ax = b, a \neq 0$, soluzione <i>ammessa</i>	determinata
$ax = b, a \neq 0$, soluzione <i>esclusa</i>	impossibile
$0x = k$ con $k \neq 0$	impossibile
$0x = 0$	indeterminata , con le C.E.

QUANDO arrivi in fondo e devi scrivere la risposta.

ESEMPIO

I due «impossibile» hanno motivi **diversi**, e in una verifica si chiede quale dei due: nel primo la soluzione c'era e non è accettabile, nel secondo non c'era proprio.

2 Il m.c.m.

2.1 Prima si scompone, poi si prende il m.c.m.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} : \quad x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \implies \text{m.c.m.} = (x-1)(x+1)$$

QUANDO c'è un denominatore di grado maggiore del primo, o due denominatori che si somigliano.

ESEMPIO

Il m.c.m. è il prodotto dei denominatori **solo** se non hanno fattori in comune. Moltiplicando alla cieca verrebbe $(x-1)^2(x+1)$: un fattore di troppo. La risposta spesso viene lo stesso, ed è per questo che l'errore resta.

2.2 Denominatori opposti

$$\frac{a}{1-x} = -\frac{a}{x-1}$$

QUANDO vedi $1-x$ e $x-1$, oppure $8-x$ e $x-8$, nello stesso esercizio.

ESEMPIO

Sono **lo stesso** denominatore a meno del segno: il m.c.m. è uno, non il loro prodotto. Il meno si sposta davanti alla frazione e **non si perde**.

$$\frac{12}{x-8} - \frac{6x}{8-x} = \frac{12}{x-8} + \frac{6x}{x-8} = \frac{12+6x}{x-8}, \text{ che dà } x = -2.$$

2.3 Le scomposizioni che servono

- raccoglimento: $3x^2 - x = x(3x - 1)$;
- differenza di quadrati: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$;
- quadrato di binomio: $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$;

- trinomio: $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$;
- cubi: $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.

QUANDO prima di cercare il m.c.m., sempre.

ESEMPIO

$x^2 - x + 1$ **non si annulla mai** ($\Delta < 0$): sta al denominatore e non aggiunge nessuna C.E. Non tutti i fattori portano una condizione.

3 Le C.E. che non si vedono

3.1 Ogni divisione porta la sua condizione

$$A : B \implies B \neq 0$$

e B è **tutta** la parentesi, non i suoi denominatori.

QUANDO il testo ha i due punti, una frazione di frazioni, o un esponente negativo.

ESEMPIO

In $(\frac{3x+5}{6x+4} - 2) : (\frac{3x+8}{3x+2} + \frac{2x-10}{9x+6})$ i denominatori scritti danno $x \neq -\frac{2}{3}$. Ma il divisore vale $\frac{11x+14}{3(3x+2)}$, e serve anche $x \neq -\frac{14}{11}$ — che in nessun denominatore del testo compare.

Il divisore si guarda dopo averlo ridotto, non prima.

3.2 Frazione di frazioni: quattro C.E., non due

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}, \quad B \neq 0, D \neq 0, C \neq 0$$

QUANDO c'è una frazione dentro una frazione.

ESEMPIO

La condizione $C \neq 0$ è quella che si dimentica: non è un denominatore *scritto*, è il divisore.

3.3 Esponente negativo

$$(-3x)^{-1} = \frac{1}{-3x} = -\frac{1}{3x}, \quad x \neq 0$$

QUANDO compare un $^{-1}$ o un esponente negativo qualunque.

ESEMPIO

Si riscrive come frazione **prima** di fare qualunque conto, e la sua C.E. si scrive con le altre. Una potenza a esponente negativo è una divisione travestita.

3.4 Le C.E. non spariscono con la semplificazione

$$\frac{\frac{4}{x} - \frac{4}{x+2}}{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}} = -4 \quad \text{ma resta } x \neq 0, x \neq -2$$

QUANDO un pezzo del testo si semplifica fino a diventare un numero.

ESEMPIO

Il valore è costante, il **dominio** no. Un'espressione che vale -4 dovunque esista non vale -4 dove non esiste.

4 Casi che spaventano e non sono difficili

4.1 Il testo ha x^2 e l'equazione è di primo grado

QUANDO vedi quadrati o cubi nel testo e ti viene in mente il discriminante.

ESEMPIO

Sviluppa il numeratore **tutto** e somma i simili: in questo capitolo i gradi alti si cancellano quasi sempre.

$$\frac{9}{(x+2)^2} = 1 - \frac{x}{x+2} \quad \text{dà } 9 - (x+2)^2 + x(x+2) = 5 - 2x: \text{ le } x^2 \text{ se ne vanno, e resta } x = \frac{5}{2}.$$

Se *non* se ne vanno: prima sospetta un conto sbagliato, e risviluppa.

4.2 Quando resta $x^2 = 0$

$$5x + 100 = \frac{10000}{100 - 5x} \implies -25x^2 = 0 \implies x = 0$$

QUANDO dopo la riduzione resta un solo termine con la x elevata.

ESEMPIO

Non è di primo grado, ma ha **una sola** soluzione e non serve nessuna formula. Quello che conta in questo capitolo non è il grado: è che la soluzione sia una. (C.E.: $x \neq 20$, rispettata.)

4.3 Indeterminata non vuol dire $S = \mathbb{R}$

$$\frac{4x}{1+x} - 3 = \frac{3x-9}{3x+3} \implies 0 = 0 \implies \text{indeterminata, } x \neq -1$$

QUANDO la x sparisce e resta $0 = 0$.

ESEMPIO

In $x = -1$ i due membri **non esistono**: lì non c'è nessuna uguaglianza da verificare. Le condizioni si scrivono nella risposta, sempre.

5 Prima di consegnare

5.1 La verifica costa dieci secondi

- sostituisci nel **testo di partenza**, non nella forma ridotta;
- controlla che **nessun denominatore** venga zero;
- controlla che i due membri vengano **uguali**.

QUANDO sempre, e soprattutto negli esercizi lunghi.

ESEMPIO

Se sostituendo viene una divisione per zero non hai sbagliato i conti: hai trovato una soluzione **non accettabile**, e la risposta è *impossibile*.

5.2 Gli errori che il compito becca

- C.E. scritte **dopo** aver semplificato;
- un denominatore dentro una parentesi da dividere, dimenticato;
- $S = \mathbb{R}$ per un'indeterminata fratta;
- $1 - x$ e $x - 1$ trattati come due denominatori diversi;
- il segno perso spostando un meno davanti a una frazione;
- la soluzione trovata e **non** confrontata con le C.E.

QUANDO rileggi.

ESEMPIO

L'ultimo è quello che fa perdere più punti: il conto è giusto, la risposta è sbagliata, e non c'è modo di accorgersene rifacendo il conto.