

EQUAZIONI FRATTE DI PRIMO GRADO

02 - ALGEBRA1

Le C.E. non sono un formalismo: sono metà della risposta

Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima di partire	3
2	Il fatto che regge tutto il capitolo	3
3	Che cos'è un'equazione fratta	4
4	Un solo denominatore con la x	5
5	Più denominatori: il m.c.m.	6
6	Denominatori da scomporre	6
7	Denominatori opposti	7
8	Quando la soluzione è esclusa	8
9	$0x = k$ e $0x = 0$	8
10	Quando il testo sembra di secondo grado	9
11	Prodotti e divisioni fra parentesi	9
12	Frazioni a castello ed esponenti negativi	10
13	La verifica	11
14	Quale strada, e quando	12

1 Cosa serve prima di partire

Cosa devi già sapere

- **Equazioni di primo grado intere:** i due principi, e la forma finale $ax = b$ con la discussione su a .
- **Frazioni algebriche:** C.E., semplificazione, somma con il denominatore comune, prodotto e quoziente. Qui si usa tutto.
- **Scomposizione:** raccoglimento totale e parziale, differenza di quadrati, trinomio caratteristico, somma e differenza di cubi. Serve a trovare il m.c.m.
- **Prodotti notevoli**, per sviluppare i quadrati — che poi, in questo capitolo, si cancellano quasi sempre.
- Le tre risposte possibili: **determinata, impossibile, indeterminata.**

Esempio Svolto 1.1: Dove servono, tutti insieme: In $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} = 0$ i prerequisiti entrano uno dopo l'altro.

Scomposizione: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

C.E.: $x \neq 1$ e $x \neq -1$. Si scrivono *prima*.

Denominatore comune: il m.c.m. è $(x-1)(x+1)$, non il prodotto dei due denominatori scritti.

Somma: $\frac{(x+1)+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+2}{(x-1)(x+1)}$.

Equazione intera: $x+2=0$, cioè $x=-2$.

Confronto con le C.E.: -2 non è né 1 né -1 , quindi va bene. **$x = -2$.**

Niente di nuovo: il capitolo aggiunge solo l'ultimo passo, e insegna a non saltarlo.

2 Il fatto che regge tutto il capitolo

Le C.E. si leggono sulla scrittura di partenza

Guarda questa:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{3x - 3} = 0$$

Il numeratore è $(x-1)^2$, il denominatore è $3(x-1)$: si semplifica, e resta $\frac{x-1}{3} = 0$, che dà $x = 1$.

La risposta è: impossibile.

Perché nella scrittura *di partenza* c'è $3x - 3$ al denominatore, e per $x = 1$ quella frazione **non esiste**. La semplificazione ha fatto sparire proprio il vincolo che escludeva la soluzione.

Chi ha semplificato prima di scrivere le C.E. non lo vede — e non lo vedrà nemmeno rifacendo i conti, perché i conti sono giusti. È il motivo per cui in questo capitolo **il primo passaggio non è un conto**.

Esempio Svolto 2.1: Lo stesso conto, due risposte diverse:

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6 \quad \text{e} \quad \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 8$$

Tutte e due si semplificano in $x + 3$, e danno $x = 3$ la prima, $x = 5$ la seconda.

La prima è impossibile: 3 annulla $x - 3$, e le C.E. dicono $x \neq 3$. **La seconda vale $x = 5$.**

Il conto è identico, la differenza sta tutta nell'ultimo passo. Chi non lo fa risponde $x = 3$ alla prima, e non ha modo di accorgersene ricontrollando i conti — perché i conti sono giusti.

Perché un capitolo per una cosa sola

Nelle equazioni di primo grado le fratte sono una sezione su dodici, e gli esercizi si fermano a due denominatori semplici. Va benissimo per capire *che cosa* sono le C.E.

Non basta per saperle usare quando i denominatori sono quattro, uno sta dentro una parentesi che va divisa per un'altra, e la risposta giusta è «impossibile». Qui gli esercizi arrivano a quel livello, ma il grado resta il primo: quello che cresce è il **numero di passaggi**, non la difficoltà del conto finale.

3 Che cos'è un'equazione fratta

Un'equazione è **fratta** quando l'incognita compare a **denominatore**. Non basta che ci siano delle frazioni:

$$\frac{x}{2} + \frac{x-1}{3} = 5 \quad \text{è intera,} \quad \frac{2}{x} + 1 = \frac{5}{x-1} \quad \text{è fratta}$$

Nella prima i denominatori sono numeri: non si annullano mai, non c'è niente da escludere, e si risolve moltiplicando per il m.c.m. come sempre. Nella seconda i denominatori *dipendono da x* , e per certi valori di x l'espressione non esiste.

Formula 3.1: Il metodo, in cinque passi:

1. **Scomponi** tutti i denominatori.

2. **C.E.:** ogni denominatore diverso da zero. Si scrivono *qui*, non alla fine.
3. **m.c.m.** dei denominatori, e tutto a primo membro ridotto a *una* frazione.
4. **Equazione intera:** numeratore = 0, e si risolve.
5. **Confronto con le C.E.**

Esempio Svolto 3.1: Fratta o no? Si guarda dove sta la x :

$$\frac{x-1}{4} + \frac{x}{6} = 2 \quad \text{intera}$$

i denominatori sono 4 e 6: numeri. Non si annullano mai, non c'è niente da escludere. Si moltiplica per 12 e via.

$$\frac{4}{x-1} + \frac{6}{x} = 2 \quad \text{fratta}$$

adesso la x sta sotto: C.E. $x \neq 1$ e $x \neq 0$, e alla fine il confronto.

$$\frac{x}{3} + \frac{2}{x} = 1 \quad \text{fratta}$$

basta che l'incognita stia a denominatore **una volta sola**: qui C.E. $x \neq 0$, e il 3 non c'entra niente.

Perché il passo 4 è lecito

Una frazione vale zero **se e solo se** il numeratore vale zero e il denominatore no. Il «denominatore no» ce l'abbiamo già garantito al passo 2: sotto le C.E. possiamo guardare solo il numeratore.

È per questo che le C.E. vanno *prima*: non sono un controllo finale, sono il permesso che rende lecito il passaggio.

4 Un solo denominatore con la x

Esempio Svolto 4.1: $\frac{3x-2}{x+4} = 5$: C.E.: $x+4 \neq 0$, cioè $x \neq -4$.

Tutto a primo membro:

$$\frac{3x-2}{x+4} - 5 = 0 \implies \frac{3x-2-5(x+4)}{x+4} = 0 \implies \frac{-2x-22}{x+4} = 0$$

Equazione intera: $-2x-22=0$, cioè $x=-11$.

Confronto: $-11 \neq -4$, la soluzione va bene. $x = -11$.

Metodo 4.1: Si può anche moltiplicare, ma solo dopo le C.E.: Con le C.E. scritte, moltiplicare i due membri per $x + 4$ è lecito: sai che non è zero. Da $\frac{3x-2}{x+4} = 5$ viene $3x - 2 = 5(x + 4)$.

È la stessa cosa, ed è più veloce. Ma è lecita **solo** perché le C.E. sono già state scritte: senza, stai moltiplicando per una quantità che potrebbe essere nulla, e il secondo principio non te lo permette.

5 Più denominatori: il m.c.m.

Esempio Svolto 5.1: $\frac{2}{3} - \frac{1}{2x} = \frac{5}{9x}$: C.E.: $x \neq 0$ — una sola, ma c'è.

m.c.m. di 3, $2x$, $9x$: è $18x$.

$$\frac{12x - 9}{18x} = \frac{10}{18x}$$

Equazione intera: $12x - 9 = 10$, cioè $12x = 19$.

$x = \frac{19}{12}$, e non è zero: va bene.

Il m.c.m. non è il prodotto dei denominatori

Lo è *solo* quando i denominatori non hanno fattori in comune.

In $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-1}$ i due denominatori sembrano diversi, ma $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$: il m.c.m. è $(x-1)(x+1)$, non $(x-1)(x^2-1)$.

Chi moltiplica alla cieca si porta dietro un fattore $(x-1)$ di troppo. Il risultato spesso viene lo stesso — ed è esattamente per questo che l'errore non si nota e resta.

Prima si scompone, poi si prende il m.c.m. Sempre in quest'ordine.

6 Denominatori da scomporre

Esempio Svolto 6.1: $\frac{9}{x^2+4x+4} = 1 - \frac{x}{x+2}$: Scomposizione: $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$.

C.E.: $x \neq -2$.

m.c.m.: $(x+2)^2$. Tutto a primo membro:

$$\frac{9 - (x+2)^2 + x(x+2)}{(x+2)^2} = 0$$

e sviluppando il numeratore: $9 - x^2 - 4x - 4 + x^2 + 2x = 5 - 2x$.

Nota che i termini in x^2 **si cancellano**: succede quasi sempre in questo capitolo, ed è il motivo per cui resta di primo grado.

$5 - 2x = 0$ dà $x = \frac{5}{2}$, che rispetta le C.E.

Metodo 6.1: Le scomposizioni che servono qui:

- **Raccoglimento:** $3x^2 - x = x(3x - 1)$, $x^3 - 9x = x(x - 3)(x + 3)$.
- **Differenza di quadrati:** $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.
- **Quadrato di binomio:** $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.
- **Trinomio caratteristico:** $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$.
- **Somma e differenza di cubi:** $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, e il secondo fattore **non si annulla mai** — quindi non aggiunge C.E.

7 Denominatori opposti

$1 - x$ e $x - 1$ non sono due denominatori diversi

Sono **opposti**, e uno si porta nell'altro cambiando segno alla frazione:

$$\frac{a}{1 - x} = -\frac{a}{x - 1}$$

Chi non lo riconosce prende come m.c.m. il prodotto $(1 - x)(x - 1)$, che è $-(x - 1)^2$: un fattore di troppo e un segno in giro per il conto. Il m.c.m. giusto è $x - 1$.

Il meno **non si perde**: si scrive davanti alla frazione.

Esempio Svolto 7.1: $\frac{12}{x - 8} - \frac{6x}{8 - x} = 0$: I due denominatori sono opposti: $8 - x = -(x - 8)$. Quindi

$$-\frac{6x}{8 - x} = +\frac{6x}{x - 8}$$

e l'equazione diventa

$$\frac{12 + 6x}{x - 8} = 0$$

C.E.: $x \neq 8$. Intera: $12 + 6x = 0$, cioè $x = -2$, accettabile.

Chi non riconosce gli opposti scrive $\frac{12(8-x) - 6x(x-8)}{(x-8)(8-x)}$ e si ritrova con un secondo grado che non c'era.

8 Quando la soluzione è esclusa

Formula 8.1: Il confronto finale: L'equazione intera dà un valore. Quel valore è la risposta **soltanto se rispetta le C.E.**

Se le viola, l'equazione fratta è **impossibile**: $S = \emptyset$. Non « x uguale a quel valore però escluso» — proprio nessuna soluzione.

Esempio Svolto 8.1: $\frac{3x+1}{x} = \frac{9x+3}{3x+1}$; C.E.: $x \neq 0$ e $x \neq -\frac{1}{3}$.

m.c.m. $x(3x+1)$, e a primo membro:

$$\frac{(3x+1)^2 - x(9x+3)}{x(3x+1)} = 0 \implies \frac{9x^2 + 6x + 1 - 9x^2 - 3x}{x(3x+1)} = \frac{3x+1}{x(3x+1)} = 0$$

Intera: $3x+1=0$, cioè $x = -\frac{1}{3}$.

Ma $-\frac{1}{3}$ è **escluso** dalle C.E.: annulla il denominatore $3x+1$. Quindi **impossibile**.

È lo stesso fenomeno della semplificazione: il fattore $3x+1$ compare sopra e sotto. Se lo semplifichi *prima* di scrivere le C.E., l'equazione diventa $\frac{1}{x} = 0$ — che è impossibile per un altro motivo — e arrivi alla risposta giusta per caso.

9 $0x = k$ e $0x = 0$

Ci sono due casi in cui l'equazione intera non è di primo grado perché **la x sparisce**.

Formula 9.1: I due casi, e le due risposte:

- $0x = k$ con $k \neq 0$: **impossibile**. Nessun numero moltiplicato per zero dà k .
- $0x = 0$: verificata da *ogni* $x \dots$ ma solo fra quelli che rispettano le C.E. La risposta è **indeterminata**, e le condizioni si scrivono.

Un'indeterminata fratta non ha per soluzione $\mathbb{R}$

È l'errore più frequente di questa sezione. Da

$$\frac{4x}{1+x} - 3 = \frac{3x-9}{3x+3}$$

viene $0 = 0$: l'identità è vera per ogni $x \dots$ tranne $x = -1$, dove **i due membri non esistono**.

La risposta si scrive **indeterminata**, $x \neq -1$, mai $S = \mathbb{R}$. I punti esclusi restano esclusi: lì non c'è nessuna uguaglianza da verificare, perché non c'è nessun numero.

Esempio Svolto 9.1: $\frac{x(x-3)+2}{x-1} = x-2$: C.E.: $x \neq 1$.

Il numeratore è $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, quindi il primo membro vale $x-2$ **dovunque esista**, ed è proprio il secondo membro.

indeterminata, $x \neq 1$. In $x = 1$ il primo membro non esiste e il secondo vale -1 : non sono uguali, sono uno assente.

10 Quando il testo sembra di secondo grado

Molti esercizi di questo capitolo hanno x^2 (o x^3) nel testo e restano di primo grado: i termini di grado alto **si cancellano** nella somma.

Metodo 10.1: Non spaventarsi, e non cercare il discriminante: Sviluppa il numeratore **tutto**, e poi somma i termini simili. Se il capitolo è questo, i gradi alti spariscono.

Se *non* spariscono, due possibilità: hai sbagliato un conto (il sospetto numero uno, e si controlla risviluppando), oppure l'esercizio non è di questo capitolo.

Esempio Svolto 10.1: $5x + 100 = \frac{10000}{100 - 5x}$: C.E.: $100 - 5x \neq 0$, cioè $x \neq 20$.

Moltiplicando (lecito: le C.E. ci sono):

$$(5x + 100)(100 - 5x) = 10000$$

e a sinistra c'è una somma per differenza: $25(x + 20)(20 - x) = 25(400 - x^2) = 10000 - 25x^2$.

Quindi $10000 - 25x^2 = 10000$, cioè $-25x^2 = 0$, cioè $x^2 = 0$.

Non è di primo grado, ma ha **una sola** soluzione e non serve nessuna formula: $x = 0$, che rispetta le C.E.

È il caso limite del capitolo: quello che conta non è il grado, è che la soluzione sia **una**.

11 Prodotti e divisioni fra parentesi

Negli esercizi da tre pallini il primo membro non è una somma di frazioni: è un **prodotto** o una **divisione** fra parentesi che a loro volta contengono frazioni.

La divisione porta C.E. che non si vedono

In $A : B$ la condizione è $B \neq 0$, e B è *tutta* la parentesi — non i suoi denominatori.

Nell'esercizio

$$\left(\frac{3x+5}{6x+4} - 2\right) : \left(\frac{3x+8}{3x+2} + \frac{2x-10}{9x+6}\right) = 1$$

i denominatori scritti danno $x \neq -\frac{2}{3}$. Ma il divisore, fatti i conti, vale $\frac{11x+14}{3(3x+2)}$: e allora

serve anche $x \neq -\frac{14}{11}$, che in nessun denominatore del testo si vede.

Ogni divisione va guardata dopo aver ridotto il divisore, non prima.

Metodo 11.1: Come si affronta un testo composto:

1. **Riduci ogni parentesi** a una frazione sola, per conto suo.
2. **Scrivi le C.E.:** i denominatori di partenza, più il numeratore di ogni divisore.
3. **Esegui** prodotti e divisioni (dividere è moltiplicare per il reciproco).
4. Da qui in poi è un'equazione fratta come le altre.

Esempio Svolto 11.1: $\left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 - \frac{2}{x}\right) : \frac{x-2}{x} + 1 = \frac{2}{x+3} : \frac{x-2}{x^2-x-12}$: **Prima**

parentesi: $\frac{x+2}{x} \cdot \frac{x-2}{x} = \frac{x^2-4}{x^2}$.

Divisione: $\frac{x^2-4}{x^2} \cdot \frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x}$.

C.E.: $x \neq 0$ (denominatori), $x \neq 2$ (si divide per $\frac{x-2}{x}$), $x \neq -3$ e $x \neq 4$ (a destra: $x^2-x-12 = (x-4)(x+3)$).

A destra: $\frac{2}{x+3} \cdot \frac{(x-4)(x+3)}{x-2} = \frac{2(x-4)}{x-2}$.

Resta $\frac{x+2}{x} + 1 = \frac{2x-8}{x-2}$, e da lì $x = \frac{2}{3}$.

12 Frazioni a castello ed esponenti negativi

Formula 12.1: Una frazione di frazioni è una divisione:

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

e le C.E. sono **quattro**: $B \neq 0$, $D \neq 0$, $C \neq 0$ (si divide per $\frac{C}{D}$) e quello che serve dentro A .

Metodo 12.1: L'esponente -1 è una frazione travestita: $(-3x)^{-1} = \frac{1}{-3x} = -\frac{1}{3x}$, e porta con sé la condizione $x \neq 0$.

Vale la stessa cosa per ogni esponente negativo: si riscrive come frazione *prima* di fare qualunque conto, e la sua C.E. si scrive con le altre.

Esempio Svolto 12.1: $\frac{\frac{4}{x} - \frac{4}{x+2}}{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}}$; **Sopra:** $\frac{4(x+2) - 4x}{x(x+2)} = \frac{8}{x(x+2)}$.

Sotto: $\frac{x - (x+2)}{x(x+2)} = \frac{-2}{x(x+2)}$.

Divisione: $\frac{8}{x(x+2)} \cdot \frac{x(x+2)}{-2} = -4$.

Il castello vale -4 , una costante — ma le C.E. restano: $x \neq 0$, $x \neq -2$, e il denominatore del castello non è nullo (lo è solo se $-2 = 0$, cioè mai). **Le C.E. non spariscono con la semplificazione:** è la trappola del capitolo, in un'altra veste.

13 La verifica

Metodo 13.1: Sostituire nel testo di partenza: Trovata la soluzione, si sostituisce nel **testo di partenza**, non nella forma ridotta. Se l'errore fosse nella riduzione, controllare sulla riga dopo lo confermerebbe invece di scoprirlo.

La verifica costa poco e dice due cose in una: che il valore **esiste** (nessun denominatore si annulla) e che i due membri **vengono uguali**.

Esempio Svolto 13.1: Una verifica che va a buon fine, e una che no: Da $\frac{4}{x+2} = 1$ viene $x = 2$. **Verifica:** a sinistra $\frac{4}{2+2} = 1$, a destra 1. Uguali, e nessun denominatore si è annullato: **$x = 2$** .

Da $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ viene $x = 2$. **Verifica:** a sinistra $\frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$, che **non è un numero**.

Non è un conto sbagliato: è la risposta. Il valore trovato non è accettabile, e l'equazione è **impossibile**.

Nota la differenza fra le due verifiche: la prima controlla *un'uguaglianza*, la seconda si ferma prima — l'espressione lì non esiste, e non c'è nessuna uguaglianza da controllare.

Se sostituendo viene una divisione per zero

Non hai sbagliato i conti: hai trovato una soluzione **non accettabile**, e la risposta è *impossibile*. È il caso della sezione 8, e la verifica è il posto in cui si becca anche quando le C.E. non erano state scritte.

Ma scriverle prima resta meglio: la verifica dice *che c'è un problema*, le C.E. dicono *quale*.

14 Quale strada, e quando

Formula 14.1: La mappa del capitolo:

Se il testo è...	allora...
una somma di frazioni	scomponi i denominatori, C.E., m.c.m., numeratore = 0
con due denominatori opposti	riconosci: $\frac{a}{1-x} = -\frac{a}{x-1}$, e il m.c.m. è uno solo
un prodotto o una divisione fra parentesi	riduci ogni parentesi, poi le C.E. — compreso il divisore intero
una frazione di frazioni	è una divisione: quattro C.E., non due
con un esponente negativo	riscrivilo come frazione prima di toccarlo
pieno di x^2	sviluppa tutto: quasi sempre si cancellano

Esempio Svolto 14.1: Le tre risposte, riconosciute dalla forma: Arrivato all'equazione intera, guarda che cosa hai in mano.

$ax = b$ con $a \neq 0$: una soluzione. **Confrontala con le C.E.** — se è esclusa, *impossibile*.

$0x = k$ con $k \neq 0$: *impossibile*, e stavolta senza nemmeno guardare le C.E.

$0x = 0$: *indeterminata*, e le C.E. vanno scritte nella risposta.

Sono tre esiti, non due, e la differenza fra i due «impossibile» è proprio quella che una verifica in classe chiede di spiegare.

Dove si va da qui

Il metodo non cambia più: cambia il grado dell'equazione intera.

Nelle **equazioni di secondo grado** le fratte hanno la stessa strada, e al passo 4 si usa la formula risolutiva invece di $ax = b$. Il confronto con le C.E. resta identico — e lì le soluzioni sono due, quindi si controllano tutte e due, una per una.

Nelle **disequazioni fratte** le C.E. tornano ancora, e il passo 4 diventa il quadro dei segni.
Nello **studio di funzione**, al triennio, le C.E. si chiamano *dominio* e sono la prima riga di ogni esercizio.