

FORMULARIO: SISTEMI LINEARI

In ogni riquadro: la regola con le sue condizioni e un esempio con i numeri.

1 Che cos'è

1.1 Sistema, soluzione, forma normale

Un **sistema** è un insieme di equazioni che devono valere **insieme**. La **soluzione** è la **coppia ordinata** $(x; y)$ che le verifica *tutte*. La **forma normale** è

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

incognite a sinistra in ordine, termini noti a destra.

ESEMPIO

$$\begin{cases} x + 2 = y + 5 \\ 3x = y + 7 \end{cases} \quad \text{in forma normale è} \quad \begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - y = 7 \end{cases}.$$

1.2 Verificare una coppia

Si sostituisce in **tutte** le equazioni: basta che una sola non torni perché la coppia non sia soluzione.

ESEMPIO

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad \text{con } (2; 1): 3 = 3 \text{ e } 3 = 3, \text{ va bene.}$$

Con $(3; 0): 3 = 3$ ma $6 \neq 3$, non va bene.

2 I quattro metodi

2.1 Sostituzione

Si ricava un'incognita da un'equazione (meglio quella con coefficiente 1) e si sostituisce **nell'altra**. Funziona sempre, anche con tre incognite.

ESEMPIO

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad : \text{ da } x = 3 - y \text{ si ha } 2(3 - y) - y = 3, \text{ cioè } y = 1 \text{ e } x = 2.$$

2.2 Confronto

Si ricava la **stessa** incognita da tutte e due le equazioni e si uguagliano le due espressioni. Conviene quando l'incognita è già isolata.

ESEMPIO

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x + 5 \end{cases} : 2x - 1 = -x + 5, \text{ cioè } x = 2 \text{ e } y = 3.$$

2.3 Riduzione

Si moltiplicano le equazioni per i numeri che rendono **opposti** i coefficienti di un'incognita, poi si sommano membro a membro: quella incognita sparisce. È il più corto, ed è quello che si estende al 3×3 .

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - y = 7 \end{cases} : \text{ moltiplico la seconda per 3 e sommo } \rightarrow 14x = 28, x = 2, y = 1.$$

2.4 Quale metodo conviene

un coefficiente vale 1 o -1	sostituzione
un'incognita già isolata in tutte e due	confronto
coefficienti uguali o opposti	riduzione
serve la discussione, o c'è un parametro	Cramer
tre equazioni e tre incognite	riduzione a scala

ESEMPIO

Tutti e quattro danno la stessa risposta: risolverne uno e ricontrollare con un altro è il modo più economico di accorgersi di un errore.

3 Matrici e determinanti

3.1 Forma matriciale

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

La tabella dei coefficienti si chiama **matrice** A ; l'ultima colonna è quella dei **termini noti**.

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - y = 7 \end{cases} \text{ diventa } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

3.2 Determinante 2×2 : le due diagonali

Si moltiplicano le due diagonali e si sottrae: quella che **scende** col $+$, quella che **sale** col $-$.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} - \\ + \end{array}$$

$$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

ESEMPIO

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} - \\ + \end{array}$$

$$\Delta = 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 3 = -2 - 12 = -14$$

3.3 Determinanti delle incognite: quale colonna si sostituisce

La colonna dei **termini noti** prende il posto della colonna dell'incognita: la **prima** per Δ_x , la **seconda** per Δ_y . Tutto il resto non si tocca.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$\Delta \qquad \qquad \Delta_x \qquad \qquad \Delta_y$

ESEMPIO

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$\Delta \qquad \qquad \Delta_x \qquad \qquad \Delta_y$

$$\Delta = -14 \quad \Delta_x = 7 \cdot (-1) - 7 \cdot 3 = -28 \quad \Delta_y = 2 \cdot 7 - 4 \cdot 7 = -14$$

3.4 Regola di Cramer

Se $\Delta \neq 0$ il sistema è determinato e

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Se $\Delta = 0$ Cramer **non si applica**: non si divide, si classifica (scheda 4.1). La condizione $\Delta \neq 0$ è tutta la classificazione e tutta la discussione dei parametrici.

ESEMPIO

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-28}{-14} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-14}{-14} = 1: \text{ la coppia è } (2; 1).$$

3.5 Determinante 3×3 : la regola di Sarrus

Si ricopiano le prime due colonne fuori dalle barre. I tre prodotti delle diagonalì che **scendono** si sommano, i tre di quelle che **salgono** si sottraggono.

$$\Delta = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

ESEMPIO

$$\Delta = \underbrace{1 + 1 + 4}_{\text{scendono}} - \underbrace{(-1) + 2 + (-2)}_{\text{salgono}} = 6 - (-1) = 7$$

4 La natura del sistema**4.1 I tre casi: rapporti, determinanti, geometria**

	Determinato	Impossibile	Indeterminato
Rapporti	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
Matrici	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$, un $\Delta_i \neq 0$	$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$
Soluzioni	una	nessuna	infinite
Rette	incidenti	parallele distinte	coincidenti
Punti comuni	1	0	∞

ESEMPIO

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad \text{determinato}; \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \text{impossibile}; \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases} \quad \text{indeterminato}.$$

4.2 Come si scrivono le infinite soluzioni

Si sceglie un'incognita libera, le si dà un nome (t) e si scrive l'altra in funzione sua.

ESEMPIO

Da $x + y = 3$, posto $y = t$:

$$(3 - t; t) \quad t \in \mathbb{R}$$

Per $t = 0$ dà $(3; 0)$, per $t = 1$ dà $(2; 1)$: sono i punti della retta.

4.3 Sul 3×3 i determinanti non bastano

Con $\Delta = 0$, sul 3×3 NON si conclude «indeterminato»: si riduce a scala e si guarda l'ultima riga. Se resta $0 = 0$ è indeterminato, se resta $0 = k$ con $k \neq 0$ è impossibile.

ESEMPIO

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \quad \text{ha tutti i determinanti nulli ed è impossibile.}$$

5 Tre incognite, fratti, moduli, parametri**5.1 Riduzione a scala (3×3)**

- 1 forma normale, incognite incolonnate
- 2 con la prima, elimina x dalla seconda e dalla terza
- 3 con la nuova seconda, elimina y dalla terza
- 4 la terza ha una sola incognita: risolvila
- 5 risalisci: la seconda dà y , la prima dà x

ESEMPIO

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \rightarrow (1; 2; 3).$$

5.2 Sistemi fratti

Prima le **C.E.**: ogni denominatore diverso da zero. Poi si moltiplica per i denominatori — in un'equazione si può sempre, il loro segno non conta. Alla fine si confronta la soluzione con le C.E.

ESEMPIO

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad \text{C.E. } y \neq 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x + y = 9 \end{cases} \rightarrow (6; 3), \text{ accettabile.}$$

5.3 Sostituzione di variabile

Se le incognite compaiono solo come $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$, si pone $t = \frac{1}{x}$, $u = \frac{1}{y}$: il sistema diventa lineare. Alla fine si **torna indietro**, $x = \frac{1}{t}$ e $y = \frac{1}{u}$.

ESEMPIO

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases} \rightarrow t = \frac{1}{2}, u = \frac{1}{3} \rightarrow (2; 3).$$

Se viene $t = 0$ il sistema è impossibile: nessun reciproco vale zero.

5.4 Sistemi con il valore assoluto

$|A| = A$ se $A \geq 0$, $|A| = -A$ se $A < 0$: si spezza in due sistemi. Ogni soluzione vale **solo** se rispetta la condizione del suo caso.

ESEMPIO

$$\begin{cases} |x| + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} : \text{ con } x \geq 0 \text{ viene } (3; 2), \text{ e } 3 \geq 0 \text{ va bene; con } x < 0 \text{ resta } 0 = 6, \text{ falsa. } S = \{(3; 2)\}.$$

5.5 Sistemi parametrici: la discussione

Δ diventa un polinomio nel parametro. Si risolve $\Delta = 0$: fuori da quelle radici il sistema è **determinato** (Cramer); su ognuna si sostituisce e si riclassifica.

ESEMPIO

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ x + ky = 1 \end{cases}, \Delta = k^2 - 1: \text{ determinato per } k \neq \pm 1; \text{ indeterminato per } k = 1; \text{ impossibile per } k = -1.$$

6 Problemi e pareggio

6.1 Tradurre un problema

Tante incognite quante le quantità da trovare, tante equazioni quante le informazioni. Si scrive a **parole** che cosa sono x e y , con l'unità di misura. Alla fine si torna al problema: le quantità devono avere senso.

ESEMPIO

«20 veicoli e 70 ruote, fra auto e moto»: $\begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 2y = 70 \end{cases} \rightarrow 15 \text{ auto e } 5 \text{ moto.}$

6.2 Le traduzioni più frequenti

la somma è s	$x + y = s$
la differenza è d	$x - y = d$
il primo è il doppio del secondo	$x = 2y$
x supera y di k	$x = y + k$
perimetro del rettangolo	$2x + 2y = p$
n oggetti da a e da b euro	$ax + by = \text{spesa}$
fra n anni	$x + n$ e $y + n$
cifre di un numero di due cifre	$10x + y$

ESEMPIO

«Un numero di due cifre, scambiandole aumenta di 27»: $10y + x = 10x + y + 27$.

6.3 Punto di pareggio (break even point)

Detta x la quantità, C_f i costi fissi, c il costo unitario, p il prezzo:

$$\begin{cases} y = C_f + c x \\ y = p x \end{cases} \implies x = \frac{C_f}{p - c}$$

Il denominatore $p - c$ è il **margine** su ogni pezzo. Sotto il pareggio si perde, sopra si guadagna.

ESEMPIO

$C_f = 1200, c = 15, p = 35$: $x = \frac{1200}{20} = 60$ zaini, per un fatturato di 2100 euro.

6.4 Il pareggio con la virgola

Le quantità intere non si spezzano: si scrive il valore esatto e poi si arrotonda **nel verso giusto**, verso l'alto per la quantità che fa guadagnare.

ESEMPIO

$x = \frac{125}{2} = 62,5$: fino a 62 pezzi si perde, da 63 si guadagna.
 Se $p \leq c$ il pareggio non esiste: si perde a ogni pezzo.

Che cosa rispondere, in una riga**Se resta****La risposta è**

$\Delta \neq 0$

una coppia: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$

$0 = k$ con $k \neq 0$

impossibile, $S = \emptyset$

$0 = 0$

indeterminato: infinite coppie, con un parametro

$\Delta = 0$ su un 3×3

si riduce a scala, i determinanti non bastano

una soluzione vietata dalle C.E.

si scarta

 $t = 0$ in una sostituzione

impossibile

una soluzione fuori dal suo caso (modulo)

si scarta

una misura negativa in un problema

il problema non ha soluzione

Gli otto errori che costano di più

- Trovare x e fermarsi: la risposta è una *coppia*.
- Verificare in una sola equazione.
- Sommare le due equazioni senza prima pareggiare i coefficienti.
- Confondere $0 = 5$ (impossibile) con $0 = 0$ (indeterminato).
- Scrivere Δ al contrario: è la principale *meno* l'altra.
- Sul 3×3 , concludere «indeterminato» dai soli determinanti.
- Nelle sostituzioni, fermarsi a t e u senza tornare a x e y .
- Nei parametrici, dividere per Δ senza dire quando è nullo.