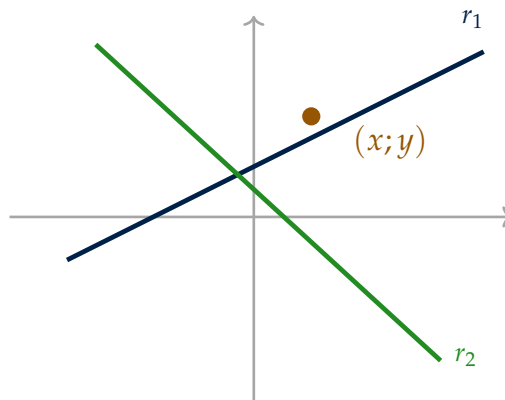


SISTEMI LINEARI

ALGEBRA

Sostituzione, confronto, riduzione, Cramer,
tre incognite, discussione e problemi



Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima di partire	3
2	Che cos'è un sistema lineare	4
3	Il metodo di sostituzione	5
4	Il metodo del confronto	6
5	Il metodo di riduzione	7
6	Matrici, determinanti e la regola di Cramer	8
7	La natura del sistema	11
8	Sistemi di tre equazioni in tre incognite	12
9	Sistemi fratti e sostituzione di variabile	15
10	Sistemi con il valore assoluto	17
11	Sistemi parametrici: la discussione	18
12	Problemi con i sistemi	19
13	Il punto di pareggio	20

1 Cosa serve prima di partire

Un sistema si risolve riducendolo, un pezzo alla volta, a un'equazione in un'incognita sola. Tutto quello che serve per l'ultimo passo è già noto.

Cosa devi già sapere

- **Le equazioni di primo grado.** I due principi, la forma $ax = b$, e i due casi in cui l'incognita sparisce: $0 \cdot x = 0$ (ogni numero va bene) e $0 \cdot x = 5$ (nessuno).
- **Polinomi in due lettere.** $2(x + 3y) = 2x + 6y$, e il meno davanti alla parentesi: $-(x - 2y) = -x + 2y$.
- **Le frazioni.** Il mcm dei denominatori, e la moltiplicazione di *tutti* i termini: $\frac{x}{2} + y = 3 \rightarrow x + 2y = 6$.
- **Il piano cartesiano**, quel tanto che basta: un punto è una coppia ordinata $(x; y)$, e un'equazione come $x + y = 3$ è una **retta**, cioè l'insieme di tutti i punti che la soddisfano.
- **Le disequazioni**, per i problemi: una lunghezza è positiva, un numero di persone è intero.

Esempio Svolto 1.1: Riscaldamento: tre conti che tornano a ogni pagina:

1. Il meno davanti alla parentesi.

$$3x - (x - 2y) = 3x - x + 2y = 2x + 2y$$

2. Togliere il denominatore.

$$\frac{x}{3} + y = 2 \rightarrow x + 3y = 6$$

3. Un'equazione in una sola incognita.

$$-3y = -6 \rightarrow y = 2$$

Se il primo è venuto $2x - 2y$, conviene tornare mezz'ora sui polinomi: in questo capitolo quel segno decide il risultato di un esercizio su tre.

2 Che cos'è un sistema lineare

Formula 2.1: Sistema, soluzione, forma normale: Un **sistema** di equazioni è un insieme di equazioni che devono essere soddisfatte **tutte insieme** dagli stessi valori delle incognite. Si scrive con una graffa.

Una **soluzione** è una **coppia ordinata** $(x; y)$ che verifica *tutte* le equazioni. Un sistema è **lineare** (o di primo grado) se ogni incognita compare al primo grado e non ci sono prodotti fra incognite.

La **forma normale** di un sistema di due equazioni in due incognite è

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

incognite a sinistra nello stesso ordine, termini noti a destra.

Perché la coppia è ordinata

$(2; 1)$ e $(1; 2)$ sono due punti diversi del piano, e in generale solo uno dei due risolve il sistema. Il primo numero è sempre il valore di x , il secondo quello di y : scriverli al contrario è come dare un indirizzo con il numero civico al posto della via.

Esempio Svolto 2.1: Verificare una coppia:

Il sistema è $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

1. Provo $(2; 1)$. Prima equazione: $2 + 1 = 3$, vera. Seconda: $2 \cdot 2 - 1 = 3$, vera.

Tutte e due sono verificate, quindi $(2; 1)$ è soluzione.

2. Provo $(3; 0)$. Prima equazione: $3 + 0 = 3$, vera. Seconda: $2 \cdot 3 - 0 = 6 \neq 3$, falsa.

Basta che una sola non torni: $(3; 0)$ non è soluzione.

3. Che cosa vuol dire. $(3; 0)$ sta sulla prima retta ma non sulla seconda: è un punto di una sola delle due, non del loro incrocio.

Esempio Svolto 2.2: Portare in forma normale:

Il sistema è $\begin{cases} x + 2 = y + 5 \\ 3x = y + 7 \end{cases}$

1. Prima equazione: porto y a sinistra e i numeri a destra.

$$x - y = 5 - 2 \longrightarrow x - y = 3$$

2. **Seconda equazione:** stessa cosa.

$$3x - y = 7$$

3. **Forma normale.**

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

4. **A che serve.** Adesso i coefficienti si leggono a colpo d'occhio: $a_1 = 1$, $b_1 = -1$, $c_1 = 3$. Sono quelli che finiranno nella matrice e nei determinanti del paragrafo 6, e senza forma normale si sbagliano i segni.

Verificare in una sola equazione

La coppia $(5; 0)$ verifica $x + y = 5$. Non basta: se il sistema è $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$, la seconda dà $5 - 0 = 5 \neq 1$, e la coppia non è soluzione.
Una coppia è soluzione **solo** se soddisfa tutte le equazioni. Chi ne prova una sola trova sempre infinite «soluzioni» — sono i punti di una retta, non del sistema.

3 Il metodo di sostituzione

È il metodo che funziona sempre, anche con tre incognite, e l'unico che non chiede di ricordare niente: si ricava un'incognita e la si sostituisce.

Metodo 3.1: Sostituzione, in cinque passi:

1. Porta il sistema in forma normale.
2. Scegli l'equazione e l'incognita con il coefficiente 1 o -1 : ricavando quella non compaiono frazioni.
3. Sostituisci l'espressione trovata **nell'altra** equazione: resta un'equazione in una sola incognita.
4. Risolvila, poi torna all'espressione del punto 2 per l'altra.
5. **Verifica** la coppia in tutte le equazioni di partenza.

Esempio Svolto 3.1: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ per sostituzione:

1. Ricavo x dalla prima, che ha coefficiente 1.

$$x = 3 - y$$

2. Sostituisco nella seconda.

$$2(3 - y) - y = 3$$

3. Risolvo.

$$6 - 2y - y = 3 \longrightarrow -3y = -3 \longrightarrow y = 1$$

4. Torno indietro.

$$x = 3 - 1 = 2$$

5. Verifica. Prima: $2 + 1 = 3$. Seconda: $4 - 1 = 3$. Tornano tutte e due, quindi la soluzione è $(2; 1)$.

Sostituire nella stessa equazione da cui si è ricavato

Se da $x + y = 3$ si ricava $x = 3 - y$ e poi si sostituisce *ancora nella prima*, si ottiene $3 - y + y = 3$, cioè $3 = 3$: vero e inutile.

L'informazione della prima equazione è già stata usata: va portata **nell'altra**. Ogni equazione si usa una volta sola.

4 Il metodo del confronto

Metodo 4.1: Confronto:

1. Ricava la **stessa** incognita da **tutte e due** le equazioni.
2. Le due espressioni valgono lo stesso numero, quindi si possono uguagliare fra loro: resta un'equazione in una sola incognita.
3. Risolvila, poi sostituisci in una delle due espressioni.
4. Verifica.

Esempio Svolto 4.1: Lo stesso sistema, per confronto:

Sistema: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

1. Ricavo x da tutte e due.

$$x = 3 - y \quad \text{e} \quad x = \frac{3 + y}{2}$$

2. Uguaglio le due espressioni.

$$3 - y = \frac{3 + y}{2}$$

3. Risolvo.

$$6 - 2y = 3 + y \longrightarrow -3y = -3 \longrightarrow y = 1$$

4. Sostituisco in $x = 3 - y$: $x = 2$.

5. Stessa risposta di prima, (2; 1). È il controllo più economico che esista: due metodi diversi devono dare lo stesso risultato.

Quando conviene il confronto

Quando la stessa incognita è già isolata, o quasi, in tutte e due le equazioni: per esempio

$$\text{in } \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x + 5 \end{cases} \quad \text{basta scrivere } 2x - 1 = -x + 5 \text{ e si è già a metà.}$$

È anche il metodo naturale dei problemi di *pareggio* del paragrafo 13, dove costo e ricavo sono due espressioni della stessa quantità.

5 Il metodo di riduzione

È il più corto dei tre, e l'unico che si estende bene a tre incognite (paragrafo 8). L'idea: sommare le due equazioni in modo che un'incognita sparisca.

Formula 5.1: Perché si possono sommare due equazioni: Se $A = B$ e $C = D$ sono vere insieme, allora è vera anche

$$A + C = B + D$$

Sommare due uguaglianze dà un'uguaglianza. E moltiplicare i due membri di una di esse per un numero diverso da zero non cambia le sue soluzioni: sono i due principi delle equazioni, usati uno dopo l'altro.

Metodo 5.1: Riduzione:

1. Porta in forma normale.
2. Scegli l'incognita da eliminare e moltiplica le due equazioni per i numeri che rendono i suoi coefficienti **opposti**.

3. Somma membro a membro: quell'incognita sparisce.
4. Risolvi l'equazione che resta e sostituisci in una delle due di partenza.
5. Verifica.

Esempio Svolto 5.1: $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$ **per riduzione:**

1. **Elimino** y . I coefficienti sono 3 e -1 : basta moltiplicare la seconda per 3.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 12x - 3y = 21 \end{cases}$$

2. **Sommo membro a membro.**

$$14x = 28 \longrightarrow x = 2$$

3. **Sostituisco** nella prima: $4 + 3y = 7$, da cui $y = 1$.

4. **Verifica.** Prima: $4 + 3 = 7$. Seconda: $8 - 1 = 7$. Torna.

5. **Nota.** Si poteva eliminare x : moltiplicando la prima per 2 e la seconda per -1 . Il risultato è lo stesso; conviene la strada con i numeri più piccoli.

Sommare senza pareggiare i coefficienti

Da $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$ sommare subito dà $6x + 2y = 14$: nessuna incognita è sparita, e ci si ritrova con un'equazione in due incognite, cioè al punto di partenza.
La somma serve **solo** se i coefficienti di un'incognita sono opposti. Prima si moltiplica, poi si somma — in quest'ordine.

6 Matrici, determinanti e la regola di Cramer

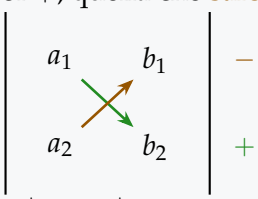
Formula 6.1: Forma matriciale: Un sistema in forma normale si può scrivere come prodotto fra una tabella di numeri e la colonna delle incognite:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

La tabella A si chiama **matrice dei coefficienti**. Non è un modo più difficile di scrivere la stessa cosa: è il modo in cui il sistema si tratta da qui in avanti, e in terza diventerà la

regola.

Formula 6.2: Determinante di una matrice 2×2 : Si moltiplicano le due diagonali e si sottrae: la diagonale che **scende** col **+**, quella che **sale** col **-**.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$


È lo stesso codice di colore della regola di Sarrus del paragrafo 8, un piano più in basso: là le diagonali sono sei, qui sono due.

Metodo 6.1: La regola di Cramer, passo per passo:

1. Porta il sistema in forma normale e scrivi la matrice dei coefficienti.
2. Calcola Δ con le due diagonali. Se viene **0 fermati**: Cramer non si applica, e si passa al paragrafo 7.
3. Costruisci Δ_x e Δ_y mettendo la colonna dei **termini noti** al posto della colonna di x e poi al posto di quella di y .
4. Dividi: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, e verifica la coppia nelle equazioni di partenza.

Formula 6.3: I tre determinanti: quale colonna si sostituisce:

$$\begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \boxed{c_1} & b_1 \\ \boxed{c_2} & b_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & \boxed{c_1} \\ a_2 & \boxed{c_2} \end{vmatrix} \\ \Delta & \Delta_x & \Delta_y \end{array}$$

La colonna **riquadrata** è quella che è stata sostituita: in Δ_x prende il posto della *prima* colonna, quella dei coefficienti di x ; in Δ_y della *seconda*. Tutto il resto non si tocca.

Se $\Delta \neq 0$ il sistema ha una sola soluzione, e vale

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

La condizione $\Delta \neq 0$ non è un dettaglio: è tutto il paragrafo 7, ed è tutta la discussione del paragrafo 11.

Esempio Svolto 6.1: Lo stesso sistema con Cramer:

Sistema:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$$

1. Il **determinante dei coefficienti**, con le due diagonali.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} - \\ + \end{array}$$

$$\Delta = 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 3 = -2 - 12 = -14$$

2. È **diverso da zero**, quindi il sistema è determinato e si può dividere.

3. **Sostituisco la colonna dei termini noti**, una volta al posto della colonna di x e una volta al posto di quella di y .

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$\Delta \qquad \qquad \Delta_x \qquad \qquad \Delta_y$

$$\Delta_x = 7 \cdot (-1) - 7 \cdot 3 = -7 - 21 = -28 \quad \Delta_y = 2 \cdot 7 - 4 \cdot 7 = 14 - 28 = -14$$

4. **La soluzione.**

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-28}{-14} = 2 \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-14}{-14} = 1$$

5. **Verifica.** $4 + 3 = 7$ e $8 - 1 = 7$. Torna, ed è la stessa coppia dei metodi precedenti.

Il determinante è la principale *meno* l'altra

Scrivere $a_2b_1 - a_1b_2$ invece di $a_1b_2 - a_2b_1$ cambia il segno di Δ , di Δ_x e di Δ_y . Nei quozienti i segni si semplificano e la risposta viene lo stesso giusta — finché si sbaglia *tutti e tre* allo stesso modo. Basta sbagliarne uno solo e la risposta cambia segno.

La regola si ricorda dal disegno: si scende da sinistra a destra col **più**, si risale col **meno**.

Sostituire la colonna sbagliata

In Δ_x la colonna dei termini noti va al posto della colonna di x , cioè la **prima**; in Δ_y al posto della **seconda**. Scambiarle dà due numeri buoni per l'incognita sbagliata, e la

coppia esce al contrario: (1; 2) invece di (2; 1).

Il controllo è gratis: la verifica nelle equazioni di partenza se ne accorge subito, perché una coppia scambiata quasi mai le soddisfa.

7 La natura del sistema

Ogni sistema 2×2 in forma normale si classifica in **tre** modi possibili, e ci si arriva per due strade indipendenti: confrontando i **rapporti** fra i coefficienti, oppure calcolando i **determinanti**. Le due strade devono portare allo stesso posto — ed è quello il controllo.

Formula 7.1: I tre casi, con i due criteri:

	Determinato	Impossibile	Indeterminato
Rapporti	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
Determinanti	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$, un $\Delta_i \neq 0$	$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$
Soluzioni	una sola $(x; y)$	nessuna, $S = \emptyset$	infinite
Geometria	rette incidenti	rette parallele distinte	rette coincidenti
Punti comuni	uno	nessuno	infiniti

I rapporti si possono scrivere solo se i coefficienti della seconda equazione non sono nulli; i determinanti si calcolano sempre. Per questo il criterio dei determinanti è quello che non tradisce mai.

Esempio Svolto 7.1: I tre casi su tre sistemi quasi uguali:

$$1. \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Rapporti: $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{-1}$. Determinante: $\Delta = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -3 \neq 0$.

Determinato: le rette si incontrano in (2; 1).

$$2. \begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Rapporti: $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{3}{5}$. Determinante: $\Delta = 1 - 1 = 0$, ma $\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Impossibile: due rette parallele e distinte, $S = \emptyset$. Del resto la stessa quantità $x + y$ non può valere 3 e 5 insieme.

$$3. \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

Rapporti: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Determinante: $\Delta = 2 - 2 = 0$, e anche $\Delta_x = 6 - 6 = 0$ e $\Delta_y = 6 - 6 = 0$.

Indeterminato: la seconda equazione è la prima moltiplicata per 2, cioè la stessa retta scritta due volte.

4. Come si scrivono le infinite soluzioni. Si sceglie un'incognita libera e si scrive l'altra in funzione sua: da $x + y = 3$, posto $y = t$, si ottiene

$$(3 - t; t) \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Per $t = 0$ si ha $(3; 0)$, per $t = 1$ si ha $(2; 1)$, e così via: sono tutti i punti di quella retta.

Impossibile e indeterminato si scrivono quasi uguali

Risolvendo, tutti e due i casi si presentano con le incognite che spariscono:

- resta $0 = 5$, falsa: **impossibile**, $S = \emptyset$;
- resta $0 = 0$, vera: **indeterminato**, infinite soluzioni.

La differenza è tutta nel numero a destra, e chi va di fretta legge «le incognite sono sparite» e scrive la stessa risposta nei due casi.

8 Sistemi di tre equazioni in tre incognite

Con tre incognite i metodi elementari si ingolfano: sostituire due volte porta a espressioni lunghissime. Serve un ordine, e l'ordine si chiama **riduzione a scala**.

Metodo 8.1: Riduzione a scala:

1. Porta il sistema in forma normale, incognite incolonnate.
2. Usa la prima equazione per far sparire x dalla seconda e dalla terza.
3. Usa la nuova seconda per far sparire y dalla terza.
4. La terza equazione ha una sola incognita: risolvi.
5. **Risali:** con z noto la seconda dà y , e con y e z la prima dà x .

Esempio Svolto 8.1:
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} :$$

1. **Elimino** x dalla seconda (le sottraggo il doppio della prima) e dalla terza (le sottraggo la prima).

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$

2. **Elimino** y dalla terza, sommandole un terzo della seconda.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ -\frac{7}{3}z = -7 \end{cases}$$

3. L'ultima equazione ha una sola incognita: $z = 3$.

4. **Risalgo.** Dalla seconda: $-3y - 3 = -9$, cioè $y = 2$. Dalla prima: $x + 2 + 3 = 6$, cioè $x = 1$.

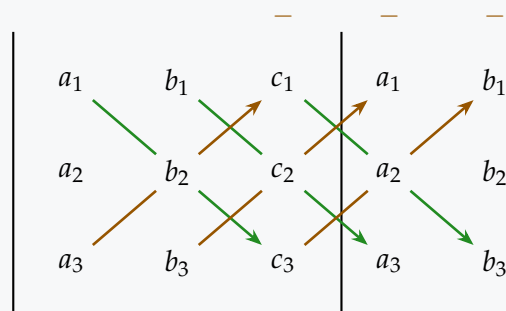
5. **Verifica** in tutte e tre: $1 + 2 + 3 = 6$; $2 - 2 + 3 = 3$; $1 + 4 - 3 = 2$. La soluzione è la terna $(1; 2; 3)$.

Metodo 8.2: La regola di Sarrus, passo per passo:

1. Scrivi il determinante e **ricopia le prime due colonne** alla sua destra, *fuori* dalle barre.
2. Segui le tre diagonalì che **scendono** da sinistra verso destra e moltiplica i tre numeri di ciascuna: questi tre prodotti si **sommano**.
3. Segui le tre diagonalì che **salgono** e moltiplica allo stesso modo: questi tre prodotti si **sottraggono**.
4. Somma i sei termini con il loro segno.

Le due colonne ricopiate servono solo a far vedere le diagonalì: non fanno parte del determinante, e alla fine si cancellano.

Formula 8.1: Lo schema di Sarrus:



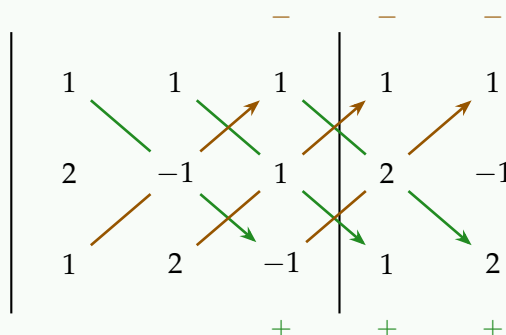
$$\Delta = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

In **verde** i prodotti delle diagonalì che scendono, col segno +; in **ambra** quelli delle diagonalì che salgono, col segno -. Ogni prodotto si legge seguendo la freccia.

Anche qui, se $\Delta \neq 0$ il sistema è determinato e Cramer funziona: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, e così per y e z .

Esempio Svolto 8.2: Sarrus con i numeri:

1. Ricopio le prime due colonne e disegno le sei diagonalì.



2. I tre prodotti che scendono, in verde.

$$1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \quad 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \quad 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$$

3. I tre che salgono, in ambra.

$$1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1 \quad 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \quad (-1) \cdot 2 \cdot 1 = -2$$

4. Sommo i primi tre e sottraggo gli altri tre.

$$\Delta = (1 + 1 + 4) - (-1 + 2 - 2) = 6 - (-1) = 7$$

5. **Attenzione ai segni doppi.** Il secondo prodotto che sale vale +2, e va *sottratto*: il - dello schema e il segno del prodotto sono due cose diverse, e vanno tenute separate. Conviene calcolare prima i sei prodotti col loro segno, e solo dopo metterli insieme.

Sul 3×3 i determinanti non bastano a classificare

Sul 2×2 la regola « $\Delta = 0$ e tutti i Δ_i nulli $\Rightarrow$ indeterminato» è vera. Sul 3×3 è **falsa**. Controesempio:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Tutte e quattro le matrici hanno due colonne (o due righe) uguali, quindi $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Eppure il sistema è palesemente **impossibile**: la stessa somma non può valere 1, 2 e 3.

Con $\Delta = 0$, sul 3×3 si abbandonano i determinanti e si riduce a scala: se resta $0 = 0$ è indeterminato, se resta $0 = k$ con $k \neq 0$ è impossibile.

9 Sistemi fratti e sostituzione di variabile

Formula 9.1: Sistemi fratti: Un sistema è **fratto** quando un'incognita compare a denominatore. Prima di tutto si scrivono le **C.E.**: ogni denominatore diverso da zero. Poi si moltiplica ogni equazione per i suoi denominatori.

In un'equazione moltiplicare per il denominatore si può sempre (basta che non sia zero): il suo *segno* non conta. È la differenza con le disequazioni, dove quella mossa è vietata. Alla fine la soluzione si confronta con le C.E.: se le viola, si scarta.

Esempio Svolto 9.1: $\begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ x + y = 9 \end{cases} :$

1. C.E. $y \neq 0$.

2. Moltiplico la prima per y .

$$x = 2y$$

3. Il sistema è diventato lineare.

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

4. Risolvo per riduzione: sottraendo, $-3y = -9$, cioè $y = 3$, e $x = 6$.

5. Controllo le C.E. $y = 3 \neq 0$: la coppia **(6; 3)** è accettabile.

6. Verifica. $\frac{6}{3} = 2$ e $6 + 3 = 9$. Torna.

Formula 9.2: Sostituzione di variabile: Quando le incognite compaiono *solo* come $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$, moltiplicare non conviene: si otterrebbe un sistema non lineare. Si pone invece

$$t = \frac{1}{x} \quad u = \frac{1}{y}$$

Il sistema in t e u è lineare e si risolve come sempre; alla fine si **torna indietro**: $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{1}{u}$.

Se viene $t = 0$ la cosa non ha soluzione: t era il reciproco di un numero, e nessun reciproco vale zero.

Esempio Svolto 9.2: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases} :$

1. C.E. $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

2. Pongo $t = \frac{1}{x}$ e $u = \frac{1}{y}$.

$$\begin{cases} t + u = \frac{5}{6} \\ t - u = \frac{1}{6} \end{cases}$$

3. **Sommo:** $2t = 1$, cioè $t = \frac{1}{2}$; e allora $u = \frac{1}{3}$.

4. **Torno alle incognite di partenza.**

$$x = \frac{1}{t} = 2 \quad y = \frac{1}{u} = 3$$

5. **Verifica.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. La soluzione è **(2; 3)**.

Fermarsi a t e u

La risposta $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ è sbagliata: quelli sono t e u , non x e y . Il problema chiedeva x e y , e il ritorno indietro è un passaggio dell'esercizio, non un di più.

Un modo per non dimenticarlo: scrivere la sostituzione a matita in un angolo del foglio, e cancellarla solo dopo aver riscritto la risposta.

10 Sistemi con il valore assoluto

Formula 10.1: Come si toglie un valore assoluto:

$$|A| = \begin{cases} A & \text{se } A \geq 0 \\ -A & \text{se } A < 0 \end{cases}$$

Quindi un sistema con un modulo si spezza in **due sistemi**, uno per ciascun caso. Ogni sistema si risolve per conto suo, e la soluzione trovata vale **solo se rispetta la condizione del suo caso**.

Metodo 10.1: Sistemi con il modulo:

1. Guarda che cosa c'è dentro il modulo e scrivi le due condizioni.
2. **Primo caso:** sostituisci $|A|$ con A e risolvi.
3. Controlla la condizione: se la soluzione non la rispetta, si scarta.
4. **Secondo caso:** sostituisci $|A|$ con $-A$, risolvi, controlla.
5. La risposta è l'insieme delle soluzioni sopravvissute: possono essere due, una o nessuna.

Esempio Svolto 10.1: $\begin{cases} |x| + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$:

1. Le due condizioni sono $x \geq 0$ e $x < 0$.

2. **Primo caso**, $x \geq 0$: il modulo si toglie così com'è.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \longrightarrow 2x = 6 \longrightarrow x = 3, y = 2$$

Controllo: $x = 3 \geq 0$, la condizione è rispettata. La coppia **(3; 2)** va bene.

3. **Secondo caso**, $x < 0$: il modulo diventa $-x$.

$$\begin{cases} -x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Sommando: $0 = 6$, falsa. Questo caso non dà nessuna soluzione.

4. **Risposta.** $S = \{(3; 2)\}$.

5. **Perché il controllo serve.** Se nel secondo caso fosse venuto $x = 4$, avremmo dovuto scartarlo: quel caso vale solo per $x < 0$, e una soluzione con $x = 4$ non appartiene al mondo in cui è stata trovata.

Tenere una soluzione incompatibile con il suo caso

È l'errore che costa l'esercizio intero. Dentro il caso $x < 0$ si è *assunto* che x fosse negativo: una soluzione con x positivo contraddice l'ipotesi con cui è stata calcolata, e quindi non vale.

Il controllo si fa sempre, anche quando «si vede» che va bene: costa cinque secondi e non ne salta uno.

11 Sistemi parametrici: la discussione

Un sistema **parametrico** contiene, oltre alle incognite, una lettera in più: il **parametro**. Non è un sistema solo, è una famiglia di sistemi, uno per ogni valore del parametro. **Discuterlo** vuol dire dire che cosa succede in tutti i casi.

Metodo 11.1: Discutere un sistema parametrico:

1. Porta in forma normale e calcola Δ : adesso è un **polinomio nel parametro**, non un numero.
2. Risolvi $\Delta = 0$: le sue radici sono i **valori critici**.
3. **Caso generale**, parametro diverso dai valori critici: $\Delta \neq 0$, il sistema è determinato e Cramer dà la soluzione.
4. Per **ogni valore critico**: sostituiscilo nel sistema e classifica quel sistema numerico (impossibile o indeterminato).

Esempio Svolto 11.1: $\begin{cases} kx + y = 1 \\ x + ky = 1 \end{cases} :$

1. Il determinante.

$$\Delta = \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 1$$

2. I valori critici: $k^2 - 1 = 0$ dà $k = 1$ e $k = -1$.

3. Caso generale, $k \neq 1$ e $k \neq -1$: il sistema è **determinato**. Con $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k - 1$ e $\Delta_y = k - 1$:

$$x = \frac{k-1}{k^2-1} = \frac{1}{k+1} \quad y = \frac{1}{k+1}$$

4. Caso $k = 1$: il sistema diventa $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$, cioè la stessa equazione due volte: indeterminato, con soluzioni $(1-t; t)$.

5. Caso $k = -1$: diventa $\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$. Sommando: $0 = 2$, falsa: **impossibile**.

6. **Risposta completa.** Determinato per $k \neq \pm 1$; indeterminato per $k = 1$; impossibile per $k = -1$. Mancarne un pezzo vuol dire mancare un terzo dell'esercizio.

Dividere per Δ senza chiedersi se è zero

Scrivere $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ e fermarsi è lecito **solo** per i valori del parametro che non annullano Δ . Chi non lo dice ha risposto a un caso su tre — e per giunta ha scritto una cosa falsa negli altri due.

Il segnale d'allarme è sempre lo stesso: se nel procedimento c'è una divisione per un'espressione con dentro una lettera, e sopra non c'è scritto che segno ha o se è nulla, l'esercizio non è finito.

12 Problemi con i sistemi

Un sistema serve quando le quantità da trovare sono **due**, e il testo dà **due** informazioni che le legano. La regola pratica è quella: tante incognite quante le quantità, tante equazioni quante le informazioni.

Metodo 12.1: Tradurre un problema:

1. Leggi due volte e scrivi **che cosa è x e che cosa è y** , con l'unità di misura. Due frasi, non due simboli.
2. Trova le due informazioni che legano le quantità e traducile in due equazioni.
3. Risolvi il sistema, con il metodo che conviene.
4. **Torna al problema:** le due quantità hanno senso? Un numero di persone è intero e positivo, una misura è positiva. Le condizioni che il problema impone si chiamano **condizioni di accettabilità**.

Esempio Svolto 12.1: Un problema di conteggio:

In un parcheggio ci sono auto e moto: 20 veicoli e 70 ruote. Quante sono le auto?

1. **Le incognite.** x = numero delle auto, y = numero delle moto.

2. Le due informazioni. I veicoli sono 20; le ruote, contando 4 per auto e 2 per moto, sono 70.

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 2y = 70 \end{cases}$$

3. Risolvo per riduzione: multiplico la prima per -2 e sommo.

$$2x = 30 \longrightarrow x = 15 \quad \text{e} \quad y = 5$$

4. Torno al problema. 15 auto e 5 moto: sono numeri interi e positivi, quindi la risposta ha senso. Controllo: $15 + 5 = 20$ veicoli, $60 + 10 = 70$ ruote.

Esempio Svolto 12.2: Un problema di geometria:

Un rettangolo ha il perimetro di 34 cm e la base che supera l'altezza di 5 cm. Quanto misurano i lati?

1. Le incognite. x = base in cm, y = altezza in cm.

2. Le due informazioni.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 34 \\ x = y + 5 \end{cases}$$

3. Risolvo per sostituzione: $2(y + 5) + 2y = 34$, cioè $4y = 24$, $y = 6$ e $x = 11$.

4. Torno al problema. Base 11 cm, altezza 6 cm: misure positive, e la base supera davvero l'altezza di 5. Perimetro: $2(11 + 6) = 34$. Torna.

5. Se fosse venuto $y = -2$, la risposta sarebbe «il problema non ha soluzione»: un'altezza negativa non esiste. Il sistema non lo sa, il problema sì.

Una sola equazione per due incognite

«Due numeri hanno per somma 40»: da qui esce $x + y = 40$, e basta. Con un'equazione sola e due incognite le soluzioni sono infinite — è un sistema indeterminato travestito da problema.

Serve la **seconda** informazione: la differenza, il rapporto, una condizione qualsiasi che legghi di nuovo le due quantità. Se nel testo non c'è, o il problema è mal posto, o una delle due quantità non è davvero un'incognita.

13 Il punto di pareggio

È il problema per cui i sistemi si insegnano anche a chi non farà il matematico: sapere **da quando** un'attività smette di perdere soldi.

Formula 13.1: Costo, ricavo, pareggio: Detta x la quantità prodotta e venduta:

- il **costo totale** è $y = C_f + c x$, dove C_f sono i **costi fissi** (affitto, macchinari: si pagano anche producendo zero) e c è il **costo variabile** unitario;
- il **ricavo** è $y = p x$, dove p è il prezzo di vendita.

Il **punto di pareggio** (in inglese *break even point*) è la quantità per cui costo e ricavo coincidono: si trova risolvendo

$$\begin{cases} y = C_f + c x \\ y = p x \end{cases}$$

Sotto quella quantità si è in perdita, sopra si guadagna.

Esempio Svolto 13.1: Un'azienda di zaini:

I costi fissi mensili sono 1200 euro; ogni zaino costa 15 euro di materiali e si vende a 35 euro. Quanti zaini servono per non perderci?

1. Le due espressioni.

$$\begin{cases} y = 1200 + 15x \\ y = 35x \end{cases}$$

2. Per confronto, che qui è il metodo naturale: le due espressioni valgono la stessa y .

$$1200 + 15x = 35x$$

3. Risolvo.

$$20x = 1200 \rightarrow x = 60$$

4. Il fatturato al pareggio. $y = 35 \cdot 60 = 2100$ euro, e infatti $1200 + 15 \cdot 60 = 2100$: le due espressioni coincidono, come devono.

5. Che cosa vuol dire. Con 60 zaini l'azienda non guadagna e non perde. Con 59 perde 20 euro, con 61 guadagna 20 euro: ogni zaino oltre il pareggio porta $35 - 15 = 20$ euro, che è il **margin**e unitario.

Il margine, e perché il pareggio è $\frac{C_f}{p - c}$

Dal sistema si ricava sempre

$$C_f + c x = p x \rightarrow C_f = (p - c) x \rightarrow x = \frac{C_f}{p - c}$$

Il denominatore $p - c$ è il margine su ogni pezzo: quanto resta del prezzo dopo aver pagato il materiale. Il pareggio è dunque «costi fissi diviso margine», e si legge come una

frase: quanti pezzi servono perché i margini coprano le spese fisse. Se $p \leq c$ il pareggio non esiste: si perde a ogni pezzo venduto, e produrne di più peggiora le cose.

Il pareggio con la virgola

Se il conto dà $x = \frac{125}{2} = 62,5$, la risposta non è «62,5 noleggi»: le quantità intere non si spezzano. Il pareggio esatto sta fra 62 e 63, quindi **da 63 in poi** si guadagna e fino a 62 si perde.

Si scrive il valore esatto e poi si arrotonda *nel verso giusto*: verso l'alto se si cerca la quantità che fa guadagnare, verso il basso se si cerca l'ultima che fa perdere.

Dove si va da qui

Con equazioni di secondo grado i sistemi diventano *non lineari* e le soluzioni possono essere due, una o nessuna; con più incognite si passa al *rango*, che è il modo generale di dire quello che qui si è visto sui determinanti. Quello che non cambia: la soluzione è sempre l'insieme dei valori che soddisfano *tutte* le equazioni insieme.

Indice analitico

Break even point, 20

Combinazione lineare, 7

Condizioni di esistenza, 15

Coppia ordinata, 4

Costi e ricavi, 20

Determinante, 8

Discussione, 18

Forma matriciale, 8

Forma normale, 4

Matrice dei coefficienti, 8

Metodo del confronto, 6

Metodo di riduzione, 7

Metodo di sostituzione, 5

Parametro, 18

Problemi con i sistemi, 19

Punto di pareggio, 20

Regola di Cramer, 8

Regola di Sarrus, 12

Rette coincidenti, 11

Rette incidenti, 11

Rette parallele, 11

Riduzione a scala, 12

Sistema 3×3 , 12

Sistema determinato, 11

Sistema fratto, 15

Sistema impossibile, 11

Sistema indeterminato, 11

Sistema lineare, 4

Sistema parametrico, 18

Sistemi con il modulo, 17

Soluzione di un sistema, 4

Sostituzione di variabile, 15

Traduzione algebrica, 19

Valore assoluto, 17