

FORMULARIO: SISTEMI FRATTI

In ogni riquadro: la regola con le sue condizioni e un esempio con i numeri.

1 Riconoscere

1.1 Sistema fratto

È fratto quando almeno un'incognita compare a **denominatore**, in almeno una equazione. Conta *dove sta l'incognita*, non che ci sia una barra.

ESEMPIO

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{fratto} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{no: sotto c'è un numero.}$$

1.2 Coefficienti frazionari

Sotto le barre ci sono **solo numeri**. Non c'è nessuna C.E.: si moltiplica per il m.c.m. dei denominatori numerici e si va avanti come con un sistema qualsiasi.

ESEMPIO

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \text{ per } 6 \text{ diventa } 3x + 2y = 6. \text{ Nessuna condizione da scrivere.}$$

2 Le condizioni di esistenza

2.1 C.E. di un sistema fratto

Si scompone **ogni** denominatore, si pone **ogni fattore** diverso da zero, e si tiene l'elenco fino alla fine dell'esercizio. Si scrivono **prima** di ogni conto.

ESEMPIO

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y-1} = 3 \\ \frac{x+1}{y} = \frac{3}{x-2} \end{cases} \quad \text{C.E. } x \neq 0 \wedge x \neq 2 \wedge y \neq 0 \wedge y \neq 1.$$

2.2 Prodotto diverso da zero

$$A \cdot B \neq 0 \iff A \neq 0 \wedge B \neq 0$$

Un denominatore con n fattori dà n condizioni. È il motivo per cui va scomposto prima.

ESEMPIO

$$(x+y)(x-y) \neq 0 \text{ dà } x \neq -y \text{ e } x \neq y: \text{ due condizioni, non una.}$$

2.3 I denominatori che si incontrano più spesso

Denominatore	Scomposto	Condizioni
$x^2 - y^2$	$(x + y)(x - y)$	$x \neq -y, x \neq y$
$x^2 - x$	$x(x - 1)$	$x \neq 0, x \neq 1$
$2x^2 - 16x$	$2x(x - 8)$	$x \neq 0, x \neq 8$
$xy - 2x + y - 2$	$(x + 1)(y - 2)$	$x \neq -1, y \neq 2$
$2x^2 + 3x + 1$	$(2x + 1)(x + 1)$	$x \neq -\frac{1}{2}, x \neq -1$
$x^2 + 1$	–	nessuna

ESEMPIO

Il fattore numerico non dà condizioni ($2 \neq 0$ è sempre vero), ma serve per il m.c.m. L'ultima riga è l'unico caso in cui non si scrive niente: $x^2 + 1$ non è mai zero.

2.4 La condizione sta sul denominatore, non sull'incognita

Si guarda **solo** sotto la barra, e ci si dimentica per un attimo di quello che c'è sopra.

ESEMPIO

In $\frac{x+y}{z+2}$ la condizione è $z \neq -2$: riguarda la z , che compare solo sotto. Su x e y non c'è niente da dire.

3 Risolvere

3.1 Il metodo, in sei passi

- 1 C.E.: si scompongono i denominatori
- 2 m.c.m. di ogni equazione
- 3 si cancellano i denominatori (**tutti** i termini)
- 4 forma normale: deve venire **lineare**
- 5 si risolve col metodo più comodo
- 6 **si confronta con le C.E.**

ESEMPIO

I primi cinque passi sono quelli dei sistemi lineari. Il sesto è la novità, ed è quello che vale la risposta.

3.2 Perché i denominatori si possono cancellare

$$\frac{N}{D} = 0 \iff N = 0 \quad (D \neq 0)$$

Una frazione è nulla quando è nullo il **numeratore**. Il permesso vale *sotto le C.E.*: senza quelle non

si può fare.

ESEMPIO

$\frac{3}{x} = \frac{2}{y}$ per xy diventa $3y = 2x$, con $x \neq 0 \wedge y \neq 0$.

3.3 Moltiplicare per il m.c.m.

Si moltiplicano **tutti** i termini, compresi quelli senza barra.

ESEMPIO

$\frac{2}{x} + 3 = \frac{5}{x}$ per x dà $2 + 3x = 5$: il 3 diventa $3x$. Lasciarlo 3 è l'errore di calcolo più frequente.

3.4 Il m.c.m. si sceglie

Tutti i fattori distinti, ciascuno con l'**esponente massimo**. Non è il prodotto dei denominatori: quello funziona ma è molto più grande, e allunga i conti.

ESEMPIO

Fra x , $x - 8$ e $2x(x - 8)$ il m.c.m. è $2x(x - 8)$, non $x(x - 8) \cdot 2x(x - 8)$.

4 La risposta

4.1 Soluzione non accettabile

Una soluzione del sistema **ridotto** che viola una C.E. *non* è soluzione del sistema fratto: si scarta. Se era l'unica, $S = \emptyset$.

ESEMPIO

$$\begin{cases} \frac{x-2}{y} = 1 \\ \frac{y-4}{x} = -2 \end{cases} \quad \text{dà } (2; 0), \text{ ma } y \neq 0: S = \emptyset \text{ con il conto giusto.}$$

4.2 I quattro esiti

Ridotto	Fratto
determinato, soluzione ammessa	determinato
determinato, soluzione vietata	$S = \emptyset$ (non accettabile)
impossibile	$S = \emptyset$ (impossibile)
indeterminato	indeterminato <i>meno</i> le escluse

ESEMPIO

Le due righe di mezzo danno la stessa scritta e non sono la stessa cosa: nel primo caso la soluzione c'era ed è stata buttata, nel secondo non c'era.

4.3 Indeterminato: le esclusioni si scrivono

Le soluzioni sono infinite **meno** quelle che annullano un denominatore. Si scrive il parametro e le sue esclusioni.

ESEMPIO

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} \\ x+y=4 \end{cases} \quad \text{dà } y = 4 - x \text{ con } x \neq 0 \wedge x \neq 4.$$

Scrivere solo $y = 4 - x$ è sbagliato: dichiara soluzioni $(0;4)$ e $(4;0)$, che non lo sono.

4.4 $0 = 0$ e $0 = 5$

Dopo la riduzione: $0 = 0$ è un'**identità** (l'equazione sparisce, le altre restano); $0 = 5$ è **impossibile** (il sistema muore lì).

ESEMPIO

La differenza si legge nei termini noti: uguali $\rightarrow$ identità, diversi $\rightarrow$ impossibile.

5 Il cambio di variabile**5.1 Quando serve**

Se le incognite compaiono **sempre e solo** come $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$, il sistema *non* è lineare in x e y :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c \longrightarrow ay + bx = cxy$$

Il termine xy è di secondo grado. Ma è lineare nei reciproci.

ESEMPIO

$$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 7 \text{ non si riduce; posto } u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y} \text{ diventa } 3u - 4v = 7.$$

5.2 Il metodo

- 1 C.E.
- 2 si pone $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$
- 3 si risolve il sistema lineare in u, v
- 4 **si ritorna:** $x = \frac{1}{u_0}, y = \frac{1}{v_0}$
- 5 si confronta con le C.E.

ESEMPIO

Il passo 4 è quello che si dimentica: u e v non sono la risposta.

5.3 Il ritorno alle incognite

Da $u = u_0$ si ricava $x = \frac{1}{u_0}$: il **reciproco**, non u_0 .

ESEMPIO

$$u = \frac{9}{5} \Rightarrow x = \frac{5}{9}, \quad v = -\frac{2}{5} \Rightarrow y = -\frac{5}{2}.$$

5.4 Un'ausiliaria nulla

Se viene $u = 0$ non esiste nessun x : $\frac{1}{x}$ non è mai zero, perché una frazione è nulla solo col numeratore nullo, e qui vale 1.

$$u = 0 \implies S = \emptyset$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \quad \text{dà } u = 1, v = 0: x = 1 \text{ esiste, } y \text{ no. } S = \emptyset.$$

5.5 Il cambio su blocchi

Si può porre u uguale a **qualunque blocco** che si ripete uguale in tutte le equazioni. Il ritorno dà un **secondo sistema**, non due numeri.

ESEMPIO

$$\begin{cases} \frac{4}{x+y} + \frac{3}{x-y} = \frac{5}{2} \\ \frac{8}{x+y} - \frac{3}{x-y} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{con } u = \frac{1}{x+y}, v = \frac{1}{x-y} \text{ dà } u = \frac{1}{4}, v = \frac{1}{2}, \text{ quindi } \begin{cases} x+y = 4 \\ x-y = 2 \end{cases}, \text{ cioè } (3; 1).$$

6 Letterali e problemi

6.1 La discussione di un sistema fratto letterale

k annulla un denominatore	il sistema non si scrive
k annulla Δ	non determinato: si sostituisce e si guarda
la soluzione viola una C.E.	$S = \emptyset$

ESEMPIO

Tre elenchi **separati**, anche quando contengono lo stesso numero: sono tre motivi diversi.

6.2 I problemi che diventano fratti

lavoro in x ore	in un'ora si fa $\frac{1}{x}$
spazio s , velocità v	tempo $t = \frac{s}{v}$
«il rapporto è $\frac{a}{b}$ »	$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, con $y \neq 0$

ESEMPIO

Due rubinetti insieme: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{T}$, dove T è il tempo in cui riempiono la vasca lavorando insieme.

6.3 C.E. e condizioni del problema

Sono due filtri diversi e vanno scritti tutti e due.

- **C.E.:** dall'algebra. $x \neq 0$ perché $\frac{1}{x}$ non esiste.
- **Condizioni del problema:** dalla realtà. $x > 0$ perché è un tempo, x intero perché è un numero di persone.

ESEMPIO

Una soluzione può essere accettabile per l'algebra e senza senso nel problema: $y = -3$ ore si scarta, e non è una C.E. a dirlo.

A colpo d'occhio

Situazione	Cosa si fa
incognita sotto la barra	C.E., poi m.c.m., poi confronto
solo numeri sotto la barra	m.c.m. numerico, nessuna C.E.
denominatore scomponibile	si scompone <i>prima</i> delle C.E.
resta xy dopo la riduzione	cambio di variabile
stesso blocco in tutti i denominatori	cambio su blocchi
la soluzione annulla un denominatore	$S = \emptyset$
resta $0 = 0$	identità: l'equazione si toglie
resta $0 = k$ con $k \neq 0$	impossibile

Errore tipico

L'ordine non è negoziabile: **prima** le condizioni, **poi** le semplificazioni. Cancellare $(x - 2)$ sopra e sotto fa sparire la condizione $x \neq 2$ dalla vista, non dall'esercizio.