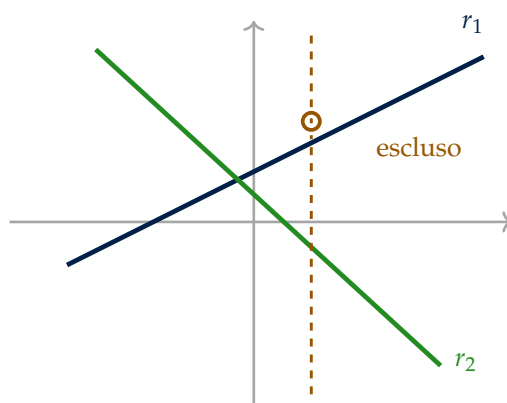


SISTEMI FRATTI

ALGEBRA

Condizioni di esistenza, riduzione a lineare, accettabilità, cambio di variabile e problemi



Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima, e che cos'è un sistema fratto	3
2	Le condizioni di esistenza	4
3	Scomporre il denominatore per leggere le condizioni	5
4	Come si risolve un sistema fratto	7
5	Il m.c.m. dei denominatori e la riduzione	8
6	Quando la soluzione non è accettabile	9
7	La natura di un sistema fratto	10
8	Sistemi fratti a tre incognite	11
9	Il cambio di variabile	12
10	Il cambio di variabile su blocchi	14
11	Sistemi fratti letterali	15
12	Problemi che portano a un sistema fratto	16

1 Cosa serve prima, e che cos'è un sistema fratto

Un sistema fratto non si risolve con un metodo nuovo. Si risolve con quelli che già si conoscono, dopo averlo trasformato in un sistema normale — e con una domanda in più alla fine, che è tutta la difficoltà del capitolo.

Cosa devi già sapere

- **La frazione algebrica.** È un quoziente fra polinomi, $\frac{x+1}{x-2}$, e il denominatore non può valere zero: la divisione per zero non esiste. Per $x = 2$ quella scrittura non significa niente.
- **Scomporre in fattori.** Raccoglimento ($2x^2 - 8x = 2x(x - 4)$), differenza di quadrati ($x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$), raccoglimento parziale ($xy - 2x + y - 2 = (x + 1)(y - 2)$), trinomio ($x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$).
- **Il m.c.m. fra polinomi:** tutti i fattori, ciascuno con l'esponente più alto con cui compare. Fra $x(x - 1)$ e $(x - 1)^2$ il m.c.m. è $x(x - 1)^2$.
- **L'equazione fratta a una incognita:** si scrivono le condizioni, si porta tutto allo stesso denominatore, si cancellano i denominatori, si risolve, e alla fine si controlla che la soluzione sia ammessa.
- **Il sistema lineare** e i suoi metodi: sostituzione, confronto, riduzione, Cramer. E le tre nature: determinato, impossibile, indeterminato.
- **La verifica di una coppia:** si sostituisce in *tutte* le equazioni, non in una sola.

Formula 1.1: Sistema fratto: Un sistema si dice **fratto** quando almeno un'incognita compare a **denominatore** in almeno una equazione.

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{è fratto} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{non lo è}$$

Nel secondo sistema sotto la barra c'è soltanto il numero 2: quello è un sistema a **coefficienti frazionari**, e si risolve come sempre moltiplicando per il m.c.m. dei denominatori. Nessuna condizione, nessun controllo finale.

«C'è una frazione, quindi è fratto»

La barra da sola non basta. Quello che conta è **dove sta l'incognita**: sopra la barra è un coefficiente, sotto la barra è una condizione.

In $\frac{x+1}{3} - \frac{y}{2} = 4$ non c'è niente da condizionare: 3 e 2 non si annullano mai. Scrivere «C.E. $x \neq 0$ » qui non è un errore di forma: è il segno che non si è guardato *dove* sta l'incognita.

Esempio Svolto 1.1: Fratto o no? Cinque casi:

1. $\frac{3}{x} - y = 1 \rightarrow$ **fratto**: la x è sotto.

2. $\frac{x-2y}{5} = 1 \rightarrow$ **non fratto**: sotto c'è il 5.

3. $\frac{x-1}{y+2} = 3 \rightarrow$ **fratto**: la y è sotto.

4. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y = 2 \rightarrow$ **non fratto**: sono coefficienti.

5. $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = 5 \rightarrow$ **fratto**: basta una x sotto, e c'è nel secondo addendo.

Il primo addendo del quinto caso non serve a niente per decidere: si guarda un addendo alla volta, e appena se ne trova uno con l'incognita sotto la barra il sistema è fratto.

2 Le condizioni di esistenza

Formula 2.1: Condizioni di esistenza (C.E.): Le **condizioni di esistenza** di un sistema fratto sono l'elenco dei valori che le incognite *non* possono assumere, perché annullerebbero un denominatore.

Si scrivono **prima** di toccare il sistema, e valgono fino alla fine dell'esercizio.

$$\begin{cases} \frac{x-2}{y} = 1 \\ \frac{y-4}{x} = -2 \end{cases} \quad \text{C.E. } x \neq 0 \wedge y \neq 0$$

Le C.E. non sono una formalità da mettere in fondo per fare bella figura: sono un **dato dell'esercizio**, esattamente come i coefficienti. Un sistema fratto con le sue C.E. e lo stesso sistema senza sono due esercizi con due risposte diverse.

Scrivere le C.E. alla fine

È l'errore numero uno di tutto il capitolo. Il primo passo della risoluzione è *moltiplicare per il m.c.m.*, cioè far sparire i denominatori: dopo quel passo i denominatori non ci sono più, e non c'è più modo di sapere che cosa era vietato.

Chi rimanda le C.E. alla fine se le deve ricostruire a memoria dal testo, e quasi sempre ne dimentica una.

Metodo 2.1: Scrivere le C.E. di un sistema fratto:

1. Si guarda **ogni denominatore** di **ogni equazione**, uno alla volta.
2. Si **scompone in fattori** (paragrafo 3).
3. Ogni fattore che contiene un'incognita si pone **diverso da zero** e si risolve.
4. Le condizioni si mettono tutte insieme con $\wedge$, e i doppietti si scrivono una volta sola.

Esempio Svolto 2.1: Le C.E. di un sistema con quattro denominatori:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y-1} = 3 \\ \frac{x+1}{y} - \frac{3}{x-2} = 0 \end{cases}$$

I denominatori sono $x, y-1, y, x-2$: sono già fattori, e nessuno si ripete. Quindi

$$x \neq 0, \quad y-1 \neq 0 \Rightarrow y \neq 1, \quad y \neq 0, \quad x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$$

e si scrive

$$\text{C.E. } x \neq 0 \wedge x \neq 2 \wedge y \neq 0 \wedge y \neq 1$$

Quattro condizioni, quattro denominatori. Quando il conto non torna, di solito è perché uno è stato saltato.

Perché non basta dire « x e y diversi da zero»

È una scorciatoia che sembra prudente e non lo è. Le condizioni non dipendono dalle incognite ma dai *denominatori*: in $\frac{3}{y+2}$ la condizione è $y \neq -2$, e $y = 0$ è invece perfettamente lecito.

Dire « $y \neq 0$ » dove serviva « $y \neq -2$ » butta via una soluzione buona e ne lascia passare una vietata. Due errori con una riga sola.

3 Scomporre il denominatore per leggere le condizioni

Da $x^2 - y^2 \neq 0$ non si legge niente. Da $(x+y)(x-y) \neq 0$ si legge tutto: un prodotto è nullo quando è nullo *almeno un* fattore, quindi perché non sia nullo devono essere non nulli **tutti**.

Formula 3.1: Legge di annullamento del prodotto, letta al contrario:

$$A \cdot B \neq 0 \iff A \neq 0 \wedge B \neq 0$$

Una condizione su un prodotto diventa **tante** condizioni quanti sono i fattori. È il motivo per cui il denominatore va scomposto *prima*: ogni fattore che non si vede è una condizione che non si scrive.

Esempio Svolto 3.1: Quattro denominatori scomposti:

$$\begin{array}{ll} x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) & \Rightarrow x \neq -y \wedge x \neq y \\ 2x^2 - 16x = 2x(x - 8) & \Rightarrow x \neq 0 \wedge x \neq 8 \\ xy - 2x + y - 2 = (x + 1)(y - 2) & \Rightarrow x \neq -1 \wedge y \neq 2 \\ 2x^2 + 3x + 1 = (2x + 1)(x + 1) & \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq -1 \end{array}$$

Il fattore numerico 2 del secondo caso non dà nessuna condizione: 2 non si annulla. Si scompone lo stesso, perché serve per il m.c.m.

Semplificare prima di scrivere le condizioni

In $\frac{x-2}{(x-2)(y+1)}$ viene naturale cancellare $(x-2)$ e scrivere $\frac{1}{y+1}$, con la sola condizione $y \neq -1$.

È sbagliato: la condizione $x \neq 2$ appartiene alla **scrittura di partenza**, non a quella semplificata. Per $x = 2$ l'espressione originale non esiste, e continua a non esistere anche dopo che l'abbiamo riscritta più corta.

Prima le condizioni, poi le semplificazioni. In quest'ordine, e mai al contrario.

Un fattore che non si annulla mai

$x^2 + 1$ non è zero per nessun numero reale, quindi non dà nessuna condizione: si può lasciarlo a denominatore senza scrivere niente. La condizione si scrive solo per i fattori che *possono* annullarsi.

4 Come si risolve un sistema fratto

Metodo 4.1: Il sistema fratto in sei passi:

1. **C.E.** Si scompongono i denominatori e si scrivono le condizioni. Prima di ogni altra cosa.
2. **m.c.m.** Per ogni equazione si trova il denominatore comune.
3. **Si cancellano i denominatori**, moltiplicando *tutti* i termini — anche quelli che la barra non ce l'hanno.
4. **Si porta in forma normale:** incognite a sinistra, termini noti a destra. Deve venire un sistema **lineare**; se resta un xy o un x^2 si va al paragrafo 9.
5. **Si risolve** col metodo più comodo.
6. **Si confronta con le C.E.** Se la soluzione trovata viola una condizione **non è accettabile**, e si scrive $S = \emptyset$.

I primi cinque passi sono il capitolo precedente. Il sesto è questo.

Esempio Svolto 4.1: $\begin{cases} \frac{3}{x} = \frac{2}{y} \\ x + y = 5 \end{cases}$ **dall'inizio alla fine:**

1. **C.E.** I denominatori sono x e y :

$$\text{C.E. } x \neq 0 \wedge y \neq 0$$

2. **m.c.m.** Della prima equazione è xy ; la seconda non è fratta.

3. **Si cancellano i denominatori.** Moltiplico la prima per xy :

$$\frac{3}{x} \cdot xy = \frac{2}{y} \cdot xy \implies 3y = 2x$$

4. **Forma normale.**

$$\begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

5. **Si risolve** per sostituzione: dalla seconda $y = 5 - x$, e sostituendo

$$-2x + 3(5 - x) = 0 \implies -2x + 15 - 3x = 0 \implies -5x = -15 \implies x = 3$$

da cui $y = 5 - 3 = 2$.

6. **Confronto con le C.E.** $x = 3 \neq 0 \checkmark$ $y = 2 \neq 0 \checkmark$ La coppia è accettabile.

$$S = \{(3; 2)\}$$

Verifica nel sistema di partenza. $\frac{3}{3} = 1$ e $\frac{2}{2} = 1$, uguali $\checkmark$; $3 + 2 = 5 \checkmark$

Moltiplicare per il m.c.m. solo i termini con la barra

In $\frac{2}{x} + 3 = \frac{5}{x}$ il m.c.m. è x , e va moltiplicato **tutto**:

$$\frac{2}{x} \cdot x + 3 \cdot \mathbf{x} = \frac{5}{x} \cdot x \implies 2 + 3x = 5$$

Il 3 da solo diventa $3x$, non resta 3. Dimenticare il termine intero è l'errore di calcolo più frequente del capitolo, e non lascia tracce: il sistema che ne esce si risolve benissimo e dà una risposta sbagliata.

5 Il m.c.m. dei denominatori e la riduzione

Formula 5.1: Perché si possono cancellare i denominatori: Se $D \neq 0$, allora

$$\frac{N}{D} = 0 \iff N = 0$$

Una frazione è nulla quando è nullo il *numeratore*; il denominatore deve solo esistere. È tutto qui il permesso di buttare via i denominatori — ed è valido **sotto le C.E.**, che è il motivo per cui le C.E. si scrivono prima.

Esempio Svolto 5.1: Il m.c.m. che si legge dai fattori:

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{y+3} = \frac{5}{(x-2)(y+3)}$$

I denominatori sono $x-2$, $y+3$ e il loro prodotto: il m.c.m. è $(x-2)(y+3)$, e le C.E. sono $x \neq 2 \wedge y \neq -3$. Moltiplico tutto:

$$\frac{(x-2)(y+3)}{x-2} - \frac{(x-2)(y+3)}{y+3} = \frac{5(x-2)(y+3)}{(x-2)(y+3)}$$

$$(y+3) - (x-2) = 5 \implies y+3-x+2 = 5 \implies -\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

Il meno davanti alla parentesi cambia il segno di tutto quello che c'è dentro: $-(x-2) = -x+2$, non $-x-2$.

Esempio Svolto 5.2: Un denominatore che va scomposto per forza:

$$\frac{2}{x} - \frac{1}{x-8} = \frac{y}{2x^2-16x}$$

Il terzo denominatore si scompone: $2x^2 - 16x = 2x(x - 8)$. Ora si vede che è lui il m.c.m., e che le C.E. sono $x \neq 0 \wedge x \neq 8$. I complementari sono $2(x - 8)$, $2x$ e 1 :

$$2 \cdot 2(x - 8) - 1 \cdot 2x = y \implies 4x - 32 - 2x = y \implies 2x - y = 32$$

Senza scomporre, il denominatore comune sarebbe stato $x(x - 8)(2x^2 - 16x)$: funziona lo stesso, ma porta a conti tre volte più lunghi e a un errore di segno quasi garantito.

Il denominatore comune si sceglie, non si subisce

Il prodotto di tutti i denominatori va sempre bene, ed è il modo peggiore: più grande è il denominatore comune, più grandi sono i numeratori e più facile è sbagliare. Il m.c.m. *vero* — ogni fattore una volta sola, con l'esponente massimo — è quasi sempre molto più piccolo.

6 Quando la soluzione non è accettabile

Qui c'è la novità dell'argomento, e conviene dirla in una riga sola: **il conto può essere giusto e la risposta essere «nessuna soluzione».**

Formula 6.1: Soluzione non accettabile: Una soluzione del sistema *ridotto* che **viola una C.E.** non è una soluzione del sistema **fratto**: si dice **non accettabile** e si scarta. Se era l'unica, la risposta è

$$S = \emptyset$$

Esempio Svolto 6.1: $\begin{cases} \frac{x-2}{y} = 1 \\ \frac{y-4}{x} = -2 \end{cases}$: il conto giusto, la risposta vuota:

C.E. $x \neq 0 \wedge y \neq 0$.

Riduzione. Moltiplico la prima per y e la seconda per x :

$$\begin{cases} x - 2 = y \\ y - 4 = -2x \end{cases} \implies \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Soluzione. Sommando membro a membro: $3x = 6$, cioè $x = 2$; poi $y = x - 2 = 0$.

Confronto. La coppia è $(2; 0)$, ma la C.E. dice $y \neq 0$: la coppia **non è accettabile**.

$$S = \emptyset$$

Non c'è nessun errore da cercare: i passaggi sono giusti tutti. Quello che è successo è che il sistema ridotto ha una soluzione che il sistema *fratto* non può avere, perché in quel

punto la prima equazione nemmeno si scrive.

Fermarsi al risultato del sistema ridotto

Trovata la coppia, l'esercizio *non è finito*: manca il confronto, ed è il passo che vale la risposta.

Il modo di non dimenticarlo è scrivere le C.E. **in alto a destra del foglio**, non dentro lo svolgimento: restano sotto gli occhi fino all'ultima riga.

«Non accettabile» non è «impossibile»

Sono due risposte che si scrivono tutte e due $S = \emptyset$ e vengono da due situazioni diverse.

- **Sistema impossibile**: il sistema ridotto non ha proprio soluzioni (due rette parallele). I denominatori non c'entrano.
- **Soluzione non accettabile**: il sistema ridotto una soluzione ce l'ha, ed è quella che si è dovuta buttare.

Nel compito la casella da riempire è la stessa; nella spiegazione no, e saperlo dire è quello che distingue chi ha capito da chi ha copiato il risultato.

7 La natura di un sistema fratto

Formula 7.1: I quattro esiti: Dopo la riduzione il sistema lineare può essere determinato, impossibile o indeterminato. Il confronto con le C.E. aggiunge un caso:

Sistema ridotto	Sistema fratto
determinato, soluzione ammessa	determinato : una coppia
determinato, soluzione vietata	non accettabile : $S = \emptyset$
impossibile	impossibile : $S = \emptyset$
indeterminato	indeterminato <i>meno</i> le escluse

Formula 7.2: Le infinite soluzioni, al netto delle esclusioni: In un sistema fratto indeterminato le soluzioni sono infinite, ma **non tutte**: quelle che annullano un denominatore vanno tolte. La risposta si scrive con il parametro e le sue esclusioni:

$$y = 4 - x \quad \text{con } x \neq 0 \wedge x \neq 4$$

Scrivere solo $y = 4 - x$ è una risposta **sbagliata**, non incompleta: dichiara soluzioni due coppie che non lo sono.

Esempio Svolto 7.1: $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} \\ x+y=4 \end{cases}$: un'identità travestita:

C.E. $x \neq 0 \wedge y \neq 0$.

Riduzione della prima. Il m.c.m. è xy :

$$\frac{y}{xy} - \frac{x}{xy} = \frac{y-x}{xy} \implies y-x = y-x \implies 0=0$$

La prima equazione è un'identità: è vera per ogni coppia ammessa, e non dice niente. Il sistema si riduce alla sola $x+y=4$.

Soluzioni. Posto $x=t$, si ha $y=4-t$, con t qualsiasi.

Esclusioni. Le C.E. dicono $x \neq 0$, cioè $t \neq 0$; e $y \neq 0$, cioè $4-t \neq 0$, cioè $t \neq 4$.

$$S = \{(t; 4-t) \text{ con } t \neq 0 \wedge t \neq 4\}$$

Due coppie sole, $(0;4)$ e $(4;0)$, restano fuori da un insieme infinito: sono poche, ma sono proprio quelle su cui l'esercizio si gioca.

«Zero uguale zero, quindi impossibile»

Quando dopo la riduzione resta $0=0$, l'equazione non è impossibile: è *sempre vera*, e va tolta dal sistema. Impossibile è $0=5$, dove a sinistra e a destra ci sono due numeri diversi.

La differenza si legge dai termini noti: se sono uguali l'equazione sparisce, se sono diversi il sistema muore lì.

8 Sistemi fratti a tre incognite

Non cambia niente di sostanziale: ci sono più denominatori da guardare, e il sistema ridotto è un 3×3 che si risolve per riduzione a scala o con Cramer.

Metodo 8.1: Il 3×3 fratto:

1. C.E. su tutti i denominatori, in tutte e tre le equazioni.
2. Si riduce ogni equazione fratta al suo m.c.m.
3. Si porta in forma normale: deve venire un sistema lineare in x, y, z .
4. Si risolve col metodo del capitolo precedente.
5. Si confronta la **terna** con tutte le C.E.

Esempio Svolto 8.1:
$$\begin{cases} \frac{x+y}{z+2} = 3 \\ \frac{y-z}{x-1} = 2 \\ x+2y+z = 3 \end{cases} :$$

C.E. $z \neq -2 \wedge x \neq 1$.

Riduzione. Moltiplico la prima per $z+2$ e la seconda per $x-1$:

$$\begin{cases} x+y = 3(z+2) \\ y-z = 2(x-1) \\ x+2y+z = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x+y-3z = 6 \\ -2x+y-z = -2 \\ x+2y+z = 3 \end{cases}$$

Soluzione. Dalla prima $y = 6 - x + 3z$. Sostituendo nelle altre due:

$$\begin{cases} -2x + (6 - x + 3z) - z = -2 \\ x + 2(6 - x + 3z) + z = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} -3x + 2z = -8 \\ -x + 7z = -9 \end{cases}$$

Dalla seconda $x = 7z + 9$; sostituendo: $-3(7z + 9) + 2z = -8$, cioè $-19z = 19$, quindi $z = -1$, $x = 2$ e $y = 6 - 2 - 3 = 1$.

Confronto. $z = -1 \neq -2 \checkmark$ $x = 2 \neq 1 \checkmark$

$$S = \{(2; 1; -1)\}$$

Verifica. $\frac{2+1}{-1+2} = 3 \checkmark$ $\frac{1-(-1)}{2-1} = 2 \checkmark$ $2+2-1 = 3 \checkmark$

Una condizione sull'incognita sbagliata

In $\frac{x+y}{z+2} = 3$ la condizione è $z \neq -2$: riguarda la z , che compare *solo* a denominatore. È facile scriverla su x o su y , perché sono loro a comparire sopra e sono loro che si stanno cercando.

La regola è meccanica: si guarda **solo** il denominatore, e ci si dimentica per un attimo che sopra la barra ci sia qualcosa.

9 Il cambio di variabile

C'è una famiglia di sistemi fratti che **non si riduce a lineare** e che pure si risolve senza fatica. Sono quelli in cui le incognite compaiono *sempre e solo* come $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$.

Formula 9.1: Perché $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c$ non è di primo grado: Moltiplicando per xy :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c \implies ay + bx = cxy$$

Compare il termine xy , che è di **secondo grado**: il sistema non è lineare in x e y , e infatti non appartiene ai paragrafi precedenti.

Ma è **lineare** in $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$, ed è di lì che si passa.

Metodo 9.1: Il cambio di variabile in cinque passi:

1. **C.E.**, come sempre e per prima cosa.
2. **Si pone** $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$, e si riscrive il sistema: $\frac{3}{x}$ diventa $3u$.
3. **Si risolve** il sistema lineare in u e v .
4. **Si ritorna alle incognite**: da $u = u_0$ si ricava $x = \frac{1}{u_0}$.
5. **Si confronta** con le C.E.

Il passo 4 è quello che si dimentica: u e v non sono la risposta.

Esempio Svolto 9.1: $\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 7 \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1 \end{cases} :$

C.E. $x \neq 0 \wedge y \neq 0$.

Posto $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$:

$$\begin{cases} 3u - 4v = 7 \\ u + 2v = 1 \end{cases}$$

Risoluzione. Dalla seconda $u = 1 - 2v$; sostituendo nella prima:

$$3(1 - 2v) - 4v = 7 \Rightarrow 3 - 6v - 4v = 7 \Rightarrow -10v = 4 \Rightarrow v = -\frac{2}{5}$$

$$\text{e } u = 1 - 2\left(-\frac{2}{5}\right) = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}.$$

Ritorno alle incognite.

$$\frac{1}{x} = \frac{9}{5} \Rightarrow x = \frac{5}{9} \quad \frac{1}{y} = -\frac{2}{5} \Rightarrow y = -\frac{5}{2}$$

Confronto. Nessuno dei due è zero ✓

$$S = \left\{ \left(\frac{5}{9}; -\frac{5}{2} \right) \right\}$$

Consegnare u e v al posto di x e y

Trovato $u = \frac{9}{5}$, la tentazione è scrivere $x = \frac{9}{5}$. Ma u era $\frac{1}{x}$, quindi x è il **reciproco**: $x = \frac{5}{9}$. Un modo di accorgersene senza pensarci: la verifica finale si fa *sempre* nel sistema di partenza. Sostituendo $\frac{9}{5}$ al posto di x in $\frac{3}{x}$, non torna.

Un'ausiliaria che viene zero

Se dalla risoluzione esce $u = 0$, non esiste nessun x : $\frac{1}{x}$ non vale zero per nessun numero, perché una frazione è nulla solo quando è nullo il numeratore, e qui il numeratore è 1. Quindi $u = 0$ significa $S = \emptyset$, e va scritto così — non « $x = 0$ », che è esattamente il valore proibito.

10 Il cambio di variabile su blocchi

La sostituzione non deve per forza essere $\frac{1}{x}$: si può porre uguale a u **qualsunque blocco** che si ripete, purché il sistema diventi lineare nei blocchi.

Esempio Svolto 10.1:
$$\begin{cases} \frac{4}{x+y} + \frac{3}{x-y} = \frac{5}{2} \\ \frac{8}{x+y} - \frac{3}{x-y} = \frac{1}{2} \end{cases} :$$

C.E. $x + y \neq 0 \wedge x - y \neq 0$, cioè $x \neq -y \wedge x \neq y$.

Posto $u = \frac{1}{x+y}, v = \frac{1}{x-y}$:

$$\begin{cases} 4u + 3v = \frac{5}{2} \\ 8u - 3v = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sommando membro a membro: $12u = 3$, cioè $u = \frac{1}{4}$; poi $3v = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$, cioè $v = \frac{1}{2}$.

Ritorno alle incognite. Qui il ritorno non dà due numeri: dà un **secondo sistema**.

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{4} \Rightarrow x+y = 4 \quad \frac{1}{x-y} = \frac{1}{2} \Rightarrow x-y = 2$$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} \implies x = 3, y = 1$$

Confronto. $x + y = 4 \neq 0 \checkmark$ $x - y = 2 \neq 0 \checkmark$

$$S = \{(3; 1)\}$$

Come si riconosce il blocco

Si guardano i denominatori: se in tutte le equazioni compaiono *sempre gli stessi*, quelli sono i blocchi. In $\frac{4}{3x-1}$ e $\frac{2}{3x-1}$ il blocco è $3x-1$; in $\frac{7}{2x+3y}$ e $\frac{1}{2x+3y}$ è $2x+3y$. Se invece i denominatori sono tutti diversi, il cambio di variabile non serve a niente e si torna al metodo del paragrafo 4.

Il ritorno che è un sistema, non due divisioni

Con $u = \frac{1}{x+y}$ il valore u_0 non dà x : dà $x+y$. Servono *tutte e due* le equazioni del ritorno per separare x da y , e quel secondo sistema va risolto — non guardato.

11 Sistemi fratti letterali

Un sistema fratto **letterale** ha, oltre alle incognite, una lettera che sta per un numero qualunque: il **parametro**. Discuterlo vuol dire dire che cosa succede al variare del parametro.

Metodo 11.1: La discussione, in tre elenchi separati:

1. **I valori che annullano un denominatore.** Per quelli il sistema non si scrive nemmeno: si escludono subito.
2. **I valori che annullano Δ .** Lì il sistema ridotto non è determinato: si sostituisce quel valore e si guarda se viene impossibile o indeterminato.
3. **I valori per cui la soluzione viola una C.E.** Il sistema ridotto è determinato, ma la coppia è vietata: $S = \emptyset$.

Tre elenchi **diversi**, che vanno tenuti separati anche quando per caso contengono lo stesso numero.

Esempio Svolto 11.1: $\begin{cases} \frac{x}{k} + y = 3 \\ x - y = k \end{cases}$ **discusso:**

1. Denominatori. C'è k a denominatore: per $k = 0$ il sistema non esiste. Si discute per $k \neq 0$.

2. Riduzione. Moltiplico la prima per k :

$$\begin{cases} x + ky = 3k \\ x - y = k \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - k$$

$\Delta = 0$ per $k = -1$. Sostituendo $k = -1$ si ottiene $\begin{cases} x - y = -3 \\ x - y = -1 \end{cases}$, che è **impossibile**.

3. Il caso generale. Per $k \neq 0$ e $k \neq -1$:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3k & k \\ k & -1 \end{vmatrix} = -3k - k^2, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3k \\ 1 & k \end{vmatrix} = k - 3k = -2k$$

$$x = \frac{-k^2 - 3k}{-1 - k} = \frac{k(k + 3)}{k + 1}, \quad y = \frac{-2k}{-1 - k} = \frac{2k}{k + 1}$$

Riepilogo.

- $k = 0$: il sistema non ha senso.
- $k = -1$: impossibile, $S = \emptyset$.
- negli altri casi: determinato, con la coppia scritta sopra.

« k annulla un denominatore» e « k annulla Δ »

Sono due cose che capitano in punti diversi del ragionamento e vanno dette separatamente.

Il primo caso riguarda il **testo**: senza quel valore il sistema non si può nemmeno scrivere.

Il secondo riguarda la **risoluzione**: il sistema c'è, e non è determinato.

Metterli nella stessa riga — «per $k = 0$ e $k = -1$ non si può» — nasconde proprio la parte che il compito vuole vedere.

12 Problemi che portano a un sistema fratto

Il sistema fratto non è un capriccio: viene fuori da solo tutte le volte che la grandezza cercata sta a **denominatore**. Succede in tre situazioni tipiche, e vale la pena riconoscerle a colpo d'occhio.

Formula 12.1: I tre schemi che tornano sempre:

- **Lavori e riempimenti.** Se un rubinetto riempie una vasca in x ore, in un'ora ne riempie $\frac{1}{x}$. Due rubinetti insieme fanno $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ all'ora.
- **Velocità e tempi.** Con spazio s e velocità v il tempo è $t = \frac{s}{v}$: se l'incognita è la velocità, il tempo è fratto.
- **Rapporti e percentuali.** «Il rapporto fra i due numeri è $\frac{3}{5}$ » si scrive $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$, e $y \neq 0$ è una condizione vera, non una formalità.

Esempio Svolto 12.1: Due rubinetti:

Due rubinetti riempiono insieme una vasca in 6 ore. Aperto da solo, il primo impiega 5 ore in più del secondo. Quanto ci mette ciascuno?

Incognite. x = ore del primo, y = ore del secondo, con $x > 0$ e $y > 0$ (condizione del problema, non C.E.).

Equazioni. In un'ora il primo fa $\frac{1}{x}$ di vasca, il secondo $\frac{1}{y}$, e insieme $\frac{1}{6}$:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ x = y + 5 \end{cases} \quad \text{C.E. } x \neq 0 \wedge y \neq 0$$

Risoluzione. Sostituendo $x = y + 5$ nella prima e moltiplicando per $6y(y + 5)$:

$$6y + 6(y + 5) = y(y + 5) \Rightarrow 12y + 30 = y^2 + 5y \Rightarrow y^2 - 7y - 30 = 0$$

da cui $y = 10$ oppure $y = -3$. La seconda si scarta perché un tempo è positivo.

$$y = \mathbf{10 \text{ ore}}, \quad x = \mathbf{15 \text{ ore}}$$

Verifica. $\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{2}{30} + \frac{3}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \checkmark$

«In un'ora fa x »

Se x sono le ore che servono per finire il lavoro, in un'ora se ne fa $\frac{1}{x}$, non x . È il rovesciamento che rende il problema fratto, ed è il punto in cui si sbaglia.

Un modo di controllarlo: se $x = 10$ ore, in un'ora si fa un decimo. Il numero $\frac{1}{10}$ è più piccolo di 1, come dev'essere per una frazione di lavoro; 10 no.

Le condizioni del problema non sono le C.E.

Sono due filtri diversi, e agiscono tutti e due sulla risposta.

Le **C.E.** vengono dall'algebra: $x \neq 0$ perché $\frac{1}{x}$ non esiste. Le **condizioni del problema** vengono dalla realtà: $x > 0$ perché è un tempo, x intero perché è un numero di persone. Vanno scritte tutte e due e controllate tutte e due. Una soluzione può essere algebricamente accettabile e non avere senso nel problema — è esattamente il caso del $y = -3$ qui sopra.

Dove si va da qui

Nei problemi come quello dei rubinetti l'equazione che esce è di *secondo* grado: risolverla è il capitolo successivo. Quello che non cambia mai è l'ordine dei passi — condizioni, riduzione, risoluzione, confronto — e il fatto che l'ultimo non si salta.

Indice analitico

cambio di variabile, 13

coefficienti frazionari, 3

condizioni di esistenza, 4

denominatori, cancellazione, 8

legge di annullamento del prodotto, 6

m.c.m. dei denominatori, 8

problemi, 16

sistema fratto, 3

sistema indeterminato, 10

sistema letterale, 15

soluzione non accettabile, 9

tre incognite, 11