

FORMULARIO: EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

In ogni riquadro: la formula, la riga **QUANDO** che dice a quale domanda risponde, e un esempio con i numeri.

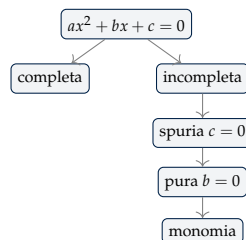
1 Riconoscere l'equazione

1.1 Forma normale e natura

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$$

- $b \neq 0$ e $c \neq 0$: **completa**
- $c = 0$: **spuria**, $ax^2 + bx = 0$
- $b = 0$: **pura**, $ax^2 + c = 0$
- $b = c = 0$: **monomia**, $ax^2 = 0$

QUANDO sempre, per primo. Un'incompleta si risolve in due righe e la formula non serve: guardare i coefficienti prima fa risparmiare metà del lavoro.



ESEMPIO

$6x^2 - x + 2 = 0$: $a = 6$, $b = -1$, $c = 2$, completa.

Il meno fa parte del coefficiente, e il coefficiente 1 non si scrive ma c'è.

1.2 Le tre incomplete

Tipo	Come si risolve	Soluzioni
spuria $ax^2 + bx = 0$	raccogli: $x(ax + b) = 0$	$x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$
pura $ax^2 + c = 0$	isola: $x^2 = -\frac{c}{a}$	$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ oppure nessuna
monomia $ax^2 = 0$		$x_1 = x_2 = 0$

QUANDO manca un coefficiente. La spuria ha **sempre** lo zero fra le soluzioni; la pura ne ha due opposte oppure nessuna, secondo il segno di $-c/a$.

ESEMPIO

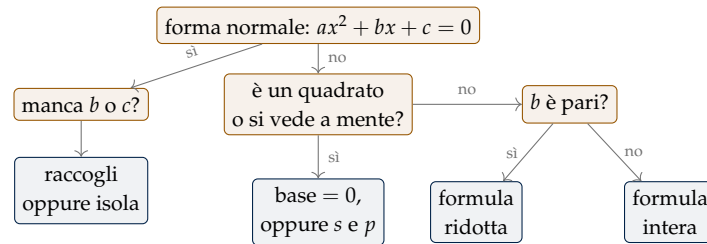
$7x^2 + 56x = 0$: $x(7x + 56) = 0$, quindi $x_1 = 0$, $x_2 = -8$.

$4x^2 - 1 = 0$: $x^2 = \frac{1}{4}$, quindi $x = \pm \frac{1}{2}$.

$x^2 + 9 = 0$: $x^2 = -9$, nessuna soluzione reale.

Non si divide per x : si perderebbe la soluzione $x = 0$.

1.3 Quale strada, e quando



QUANDO prima di scrivere qualunque cosa. Le domande si leggono da sinistra, e ci si ferma alla prima che dà sì: ogni ramo più a sinistra costa meno conti di quello dopo.

ESEMPIO

$3x^2 - 12x = 0$ si ferma alla prima domanda ($x_1 = 0$, $x_2 = 4$); $x^2 - 7x + 12 = 0$ alla seconda (3 e 4, a mente); $3x^2 - 10x + 7 = 0$ alla terza, con la ridotta.

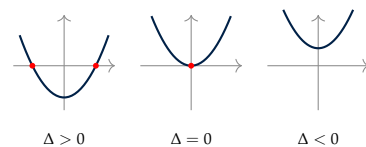
La formula funziona su tutte e quattro. Ma il tempo speso a guardare i coefficienti si ripaga sempre, e la strada corta sbaglia meno.

2 Risolvere

2.1 Discriminante: quante soluzioni, senza risolvere

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- $\Delta > 0$: due soluzioni **distinte**
- $\Delta = 0$: due **coincidenti** (doppia)
- $\Delta < 0$: **nessuna soluzione reale**



QUANDO il testo chiede «quante soluzioni», «per quale k ne ha due», «è scomponibile?». Si risponde col solo segno di Δ , senza calcolare nulla d'altro.

ESEMPIO

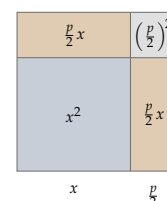
$3x^2 - 5x - 2$: $\Delta = 25 + 24 = 49 > 0$, due distinte.

Attenzione al $-4ac$ col suo segno: con c negativo diventa un più.

2.2 Completamento del quadrato

$$x^2 + px + q = 0 \implies \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

- se $a \neq 1$ si divide tutto per a ;
- si porta il termine noto a destra;
- si aggiunge $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ **a entrambi** i membri;
- si estrae la radice, col $\pm$.



Il quadrato grande è $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$: il pezzo grigio è quello che manca, e si aggiunge da tutte e due le parti.

QUANDO quasi mai per risolvere — per quello c'è la formula, che è questo procedimento fatto una volta per tutte. Serve invece per riconoscere un quadrato, per portare l'equazione della circonferenza in forma canonica e per trovare il

vertice di una parabola.

ESEMPIO

$x^2 + 6x - 7 = 0$: $x^2 + 6x = 7$, si aggiunge $(\frac{6}{2})^2 = 9$:

$$(x + 3)^2 = 16 \implies x + 3 = \pm 4 \implies x_1 = -7, x_2 = 1$$

Il $\pm$ nasce qui, ed è l'unico posto della formula in cui nasce.

2.3 Formula risolutiva, e formula ridotta

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} \quad \text{con} \quad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

QUANDO l'equazione è **completa**. La ridotta si usa quando b è **pari**: non è una formula nuova, è la stessa senza i 2 che si semplificherebbero.

ESEMPIO

$3x^2 - 5x - 2 = 0$: $x = \frac{5 \pm 7}{6}$, cioè $-\frac{1}{3}$ e 2.

$3x^2 - 10x + 7 = 0$ con la ridotta: $\frac{\Delta}{4} = 25 - 21 = 4$, $x = \frac{5 \pm 2}{3}$, cioè 1 e $\frac{7}{3}$.

Il $2a$ sta sotto **tutto**, non solo sotto la radice.

2.4 Quando Δ non è un quadrato: come si scrive la risposta

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

1. porta fuori dalla radice i quadrati che ci sono dentro $\sqrt{\Delta}$;
2. semplifica il fattore comune **a tutti e tre** i numeri: $-b$, il coefficiente della radice e $2a$.

QUANDO ogni volta che Δ è positivo ma non è un quadrato perfetto. La risposta **resta un radicale**: non si scrive 2,449, si scrive $\sqrt{6}$. Un decimale è una risposta approssimata a una domanda esatta.

ESEMPIO

$2x^2 - 4x - 1 = 0$: $\Delta = 16 + 8 = 24$, e $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$$

Il 2 si semplifica perché divide 4, 2 e 4: tutti e tre.

L'errore: da $\frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{4}$ scrivere $1 \pm 2\sqrt{6}$, semplificando il 4 del denominatore col solo 4 del numeratore. Il denominatore sta sotto *tutta* la somma: o si divide ogni termine, o non si divide niente. (Dividendo ogni termine per 4 verrebbe $1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$, che è giusto ed è la stessa cosa di $\frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$.)

2.5 Quando la formula non serve

- è incompleta → raccogli o isola;
- è un **quadrato di binomio** → annulla la base;
- si scompone a vista → legge di annullamento del prodotto.

QUANDO prima di scrivere Δ . La formula funziona sempre, ma «sempre» non vuol dire «prima».

ESEMPIO

$25x^2 + 20x + 4 = 0$ è $(5x + 2)^2 = 0$, quindi $x = -\frac{2}{5}$: due righe, nessun discriminante. E il fatto che sia un quadrato *spiega* perché Δ era nullo.

$x^2 + 5x + 6 = 0$: due numeri con somma 5 e prodotto 6 sono 2 e 3, quindi $(x + 2)(x + 3) = 0$.

Le letture al contrario

Diretta	Inversa	A che domanda risponde
$\Delta = b^2 - 4ac$	$c = \frac{b^2 - \Delta}{4a}$	«per quale c ha due soluzioni coincidenti?»
$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	sostituisci la radice nota	«per quale k una soluzione vale -2 ?»
$s = -\frac{b}{a}, p = \frac{c}{a}$	$x^2 - sx + p = 0$	«scrivi l'equazione che ha per soluzioni...»
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$	dalle radici al trinomio	«scomponi», e al contrario «ricostruisci»

Un'inversa non si impara: si *ricava* risolvendo la diretta rispetto alla lettera che serve.

3 Senza risolvere

3.1 Somma e prodotto

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad x^2 - sx + p = 0$$

QUANDO tre usi diversi: **controllare** due soluzioni appena trovate; **scrivere** l'equazione che ha certe soluzioni; **trovare** due numeri di cui si conoscono somma e prodotto.

ESEMPIO

$2x^2 - 3x - 14 = 0$: $s = \frac{3}{2}$, $p = -7$, senza risolvere.

Due numeri con somma 15 e prodotto -34 : $x^2 - 15x - 34 = 0$, che dà -2 e 17 .

È il controllo più economico del capitolo: funziona anche con soluzioni irrazionali, perché somma e prodotto restano razionali.

3.2 Regola di Cartesio: i segni

Con $a > 0$ e $\Delta \geq 0$, leggendo i segni da sinistra:

- ogni **variazione** $\rightarrow$ una soluzione **positiva**;
- ogni **permanenza** $\rightarrow$ una **negativa**.

Se discordi, la maggiore in valore assoluto è quella data dal **primo** dei due passaggi.

a	b	c	x_1, x_2
+	+	+	$-, -$
+	-	+	$+, +$
+	-	-	$+, -$ (la + maggiore)
+	+	-	$-, +$ (la - maggiore)

QUANDO prima di risolvere un **problema**: se cerchi una lunghezza e Cartesio dice «due negative», l'equazione è sbagliata e non serve calcolare.

ESEMPIO

$4x^2 - 7x - 15 = 0$: segni $+, -, -$, una variazione e una permanenza, quindi una positiva e una negativa, con la positiva maggiore. Infatti 3 e $-\frac{5}{4}$.

3.3 Scomposizione del trinomio

$$\Delta > 0 : ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \Delta = 0 : a(x - x_1)^2$$

$$\Delta < 0 : \text{non scomponibile in } \mathbb{R}$$

QUANDO ti chiedono di scomporre e i prodotti notevoli non bastano. Serve anche al capitolo dopo, per studiare il segno del trinomio.

ESEMPIO

$5x^2 + 34x - 7$: radici -7 e $\frac{1}{5}$, quindi $5(x + 7)(x - \frac{1}{5})$.

Il fattore a davanti **non si dimentica**: senza, il coefficiente non torna.

4 Fratte, letterali, parametriche

4.1 Equazioni fratte: quattro passi

1. scrivi le **C.E.** (prima di toccare i denominatori);
2. riduci allo stesso denominatore e togliilo;
3. risolvi l'equazione intera;
4. **confronta con le C.E.** e scarta le non accettabili.

QUANDO c'è l'incognita a denominatore. Il passo 4 è quello che si dimentica, ed è l'unico caso in cui il conto giusto porta alla risposta sbagliata.

ESEMPIO

$\frac{x}{x-1} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{x-1}$, con C.E. $x \neq 0, x \neq 1$.

L'intera è $2x^2 - x - 1 = 0$, che dà $-\frac{1}{2}$ e 1. Ma $x = 1$ viola le C.E.: si scarta. Una sola soluzione, $x = -\frac{1}{2}$.

4.2 Equazioni letterali: la discussione

1. forma normale, ed evidenza A, B, C ;
2. **se** $A = 0$ l'equazione è di primo grado: caso a parte;
3. se $A \neq 0$, calcola Δ e discutine il segno;
4. scarta i valori che tolgono senso (denominatori) e controlla le C.E.;
5. scrivi la **sintesi** per casi.

QUANDO oltre alla x c'è una lettera. Il passo 2 è la novità rispetto al primo grado: il parametro può **abbassare il grado**.

ESEMPIO

$ax^2 + (2 - 3a^2)x - 6a = 0$: se $a = 0$ resta $2x = 0$, cioè $x = 0$. Se $a \neq 0$, $\Delta = (2 + 3a^2)^2 > 0$ sempre, e $x_1 = 3a$, $x_2 = -\frac{2}{a}$.

4.3 Equazioni parametriche

Richiesta	Condizione da imporre
soluzioni reali	$\Delta \geq 0$
soluzioni coincidenti	$\Delta = 0$
una soluzione vale x_0	sostituisci x_0 e risolvi in k
somma assegnata	$-\frac{b}{a} = s$
prodotto assegnato	$\frac{c}{a} = p$

QUANDO il testo chiede «per quali valori di $k \dots$ ». La condizione $\Delta \geq 0$ va **sempre** controllata alla fine, anche quando non è la richiesta: una risposta con Δ negativo non è una risposta.

ESEMPIO

$kx^2 - 2(k+3)x + k - 1 = 0$: $\frac{\Delta}{4} = 9 + 7k$, quindi soluzioni reali per $k \geq -\frac{9}{7}$.
Se una soluzione è -2 : sostituendo, $9k + 11 = 0$ e $k = -\frac{11}{9}$, che soddisfa $k \geq -\frac{9}{7}$ ✓.

5 Problemi, e i controlli

5.1 Problemi: la soluzione da scartare

1. scegli l'incognita e scrivi le altre quantità in funzione;
2. **poni le condizioni** ($x > 0$ per lunghezze, tempi, quantità) *subito*;
3. traduci e risolvi;
4. scarta le non accettabili e **rileggi la domanda**.

QUANDO sempre, nei problemi. Un'equazione di secondo grado dà due numeri, e il problema spesso ne vuole uno solo — ma non sempre: a volte le risposte sono due davvero.

ESEMPIO

Ipotenusa 85, un cateto supera di 5 il doppio dell'altro: $x^2 + 4x - 1440 = 0$ dà -40 e 36 . La prima si scarta (una lunghezza non è negativa): i cateti sono 36 e 77 .

5.2 I controlli che costano dieci secondi

- **Sostituisci** una radice nell'equazione: deve venire zero.
- **Somma e prodotto**: devono dare $-\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$.
- **Cartesio**: i segni che hai trovato devono essere quelli che prevedeva.
- **Spuria**: una soluzione dev'essere 0.
- **Fratta**: nessuna radice accettata può annullare un denominatore.
- **Parametrica**: il valore trovato deve dare $\Delta \geq 0$.

QUANDO sempre, prima di consegnare. Un errore di segno non si vede rileggendo: si vede solo sostituendo.

ESEMPIO

Il più economico è somma e prodotto, e prende quasi ogni errore di segno della formula. Con $1 - \sqrt{3}$ e $1 + \sqrt{3}$: somma 2, prodotto $1 - 3 = -2$ — tutti e due razionali, e si controllano a mente.