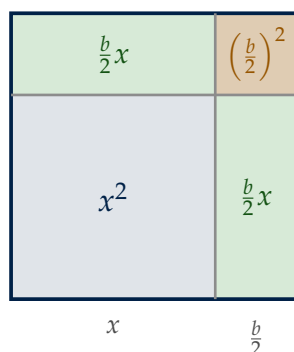


EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

ALGEBRA 2

Il completamento del quadrato, il discriminante,
la formula e le sue letture al contrario



IllogicoMatematico

Teoria, metodi ed errori tipici

Indice

1	Quando isolare la x non basta più	3
2	Forma normale e natura dell'equazione	4
3	Le equazioni incomplete	5
4	Il completamento del quadrato	7
5	Il discriminante	9
6	La formula risolutiva	10
7	Quando la formula non serve	11
8	Equazioni fratte	12
9	Equazioni letterali	14
10	Somma e prodotto delle soluzioni	15
11	La regola di Cartesio	17
12	Scomposizione di un trinomio di secondo grado	19
13	Problemi	20
14	Equazioni parametriche	21
15	Quale strada, e quando	22

1 Quando isolare la x non basta più

Fino a qui ogni equazione si risolveva con lo stesso gesto: portare i termini di qua e di là finché restava $x = \text{qualcosa}$. Con il quadrato quel gesto **non basta più**.

Prova con $x^2 - 2x - 2 = 0$. Puoi spostare quanto vuoi: la x compare due volte, una al quadrato e una no, e non c'è modo di raccoglierla e liberarla. Serve un'idea nuova, e l'idea è **trasformare l'equazione in un quadrato**: se al primo membro c'è $(\dots)^2$ e al secondo un numero, si estrae la radice e si è tornati al primo grado.

Da questa idea nasce tutto il capitolo: il metodo si chiama **completamento del quadrato**, e applicato una volta sola nel caso generale produce la formula che poi si usa sempre.

Cosa devi già sapere

- **La legge di annullamento del prodotto**: se $AB = 0$ allora $A = 0$ oppure $B = 0$. È tutto il metodo delle equazioni *spurie*, e senza di essa «raccolgo e uguaglio a zero» non sarebbe lecito.
- **La scomposizione in fattori**, e in particolare il **quadrato di binomio** $(x + k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$: il completamento del quadrato è un quadrato di binomio costruito a mano.
- **I radicali**: la formula ha una radice dentro, e la risposta si dà in **forma normale** — $\frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$ si scrive $1 \pm \sqrt{3}$.
- **Le frazioni algebriche e le C.E.**: le fratte di secondo grado sono le stesse di primo con un grado in più.
- **Le equazioni letterali di primo grado**: la discussione al variare del parametro è già stata fatta lì. Qui ha un caso in più, ed è quello che conta.

Esempio Svolto 1.1: Un'equazione che non si lascia isolare:

$x^2 + 6x - 55 = 0$. Spostando il termine noto: $x^2 + 6x = 55$. E adesso?

La x non si raccoglie in modo utile ($x(x + 6) = 55$ non serve: il prodotto non fa zero, e la legge di annullamento non si applica). Ma se al primo membro ci fosse un **quadrato** sarebbe tutto risolto.

Aggiungendo 9 a tutti e due i membri:

$$x^2 + 6x + 9 = 64 \implies (x + 3)^2 = 64$$

$$x + 3 = \pm 8 \implies x_1 = -11, x_2 = 5$$

Il 9 non è uscito dal nulla: è $\left(\frac{6}{2}\right)^2$, ed è esattamente quello che manca per chiudere il quadrato. Il paragrafo 4 spiega perché.

2 Forma normale e natura dell'equazione

Formula 2.1: Come si scrive, e come si legge: Un'equazione è di secondo grado se, scritta in **forma normale**, è del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

Le lettere a, b, c si chiamano **primo, secondo e terzo coefficiente**; c si chiama anche **termine noto**.

La condizione $a \neq 0$ non è un dettaglio: se a fosse nullo il termine in x^2 sparirebbe e resterebbe un'equazione di *primo* grado. È una condizione che tornerà, e sarà il cuore della discussione, nelle equazioni letterali (par. 9).

Esempio Svolto 2.1: Leggere i coefficienti col loro segno:

$6x^2 - x + 2 = 0$ è di secondo grado in forma normale, con

$$a = 6, \quad b = -1, \quad c = 2$$

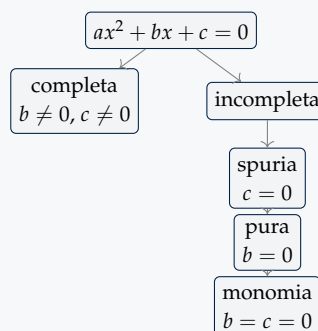
Il b vale -1 , non 1: il meno fa parte del coefficiente, e il coefficiente 1 non si scrive ma c'è. È lo stesso errore che nella retta faceva sbagliare $m = -a/b$.

Formula 2.2: Completa o incompleta:

Se oltre ad a anche b e c sono diversi da zero, l'equazione è **completa**; altrimenti è **incompleta**, e ha un nome a seconda di che cosa manca:

- $c = 0$ (manca il termine noto): **spuria**, $ax^2 + bx = 0$;
- $b = 0$ (manca il termine di primo grado): **pura**, $ax^2 + c = 0$;
- $b = c = 0$: **monomia**, $ax^2 = 0$.

Le incomplete non si risolvono con la formula: si risolvono *prima*, e in due righe.



Quante soluzioni può avere

A differenza di quelle di primo grado, che ne hanno una sola, le equazioni di secondo grado possono averne **più di una, al massimo due**. Possono anche non averne nessuna in $\mathbb{R}$, ed è una novità di questo capitolo: non vuol dire che l'equazione sia scritta male. Le soluzioni si chiamano anche **radici** dell'equazione — parola che tornerà nella scomposizione del trinomio, al paragrafo 12.

Esempio Svolto 2.2: Verificare che un numero è soluzione:

$x^2 + 2x = 0$ è incompleta perché $c = 0$. Verifichiamo che sia 0 sia -2 sono soluzioni: si **sostituisce**, come sempre.

$$0^2 + 2 \cdot 0 = 0 \quad \checkmark \quad (-2)^2 + 2(-2) = 4 - 4 = 0 \quad \checkmark$$

Verificare non è risolvere: qui i numeri erano dati, e c'era solo da fare i conti.

3 Le equazioni incomplete

Formula 3.1: Spuria: $ax^2 + bx = 0$: Si **raccoglie** la x e si applica la legge di annullamento del prodotto:

$$ax^2 + bx = 0 \implies x(ax + b) = 0 \implies x = 0 \vee ax + b = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

Una spuria ha **sempre due soluzioni reali**, e una delle due è sempre **zero**. Se il tuo risultato non contiene lo zero, hai sbagliato.

Esempio Svolto 3.1: $7x^2 + 56x = 0$:

$$x(7x + 56) = 0 \implies x = 0 \vee 7x = -56$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -8$$

Controllo con la somma (par. 10): $0 + (-8) = -8$, e $-\frac{b}{a} = -\frac{56}{7} = -8 \quad \checkmark$.

Non si divide per x

Da $7x^2 + 56x = 0$ viene la tentazione di dividere tutto per x e scrivere $7x + 56 = 0$, cioè $x = -8$. Il conto è giusto, la risposta è **monca**: dividendo per x si è supposto $x \neq 0$, e si è

persa proprio la soluzione $x = 0$.

Dividere per una quantità che *può* essere nulla fa sparire soluzioni, sempre. Si raccoglie, non si divide.

Formula 3.2: Pura: $ax^2 + c = 0$: Si isola x^2 e si estrae la radice — con il $\pm$, che è la parte che si dimentica:

$$ax^2 + c = 0 \implies x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$\text{se } -\frac{c}{a} > 0 \quad x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}: \text{ due soluzioni } \mathbf{opposte}$$

$$\text{se } -\frac{c}{a} = 0 \quad \text{ricadi nella monomia}$$

$$\text{se } -\frac{c}{a} < 0 \quad \mathbf{\text{nessuna soluzione reale}}$$

Il terzo caso non è un errore di calcolo: nessun numero reale elevato al quadrato dà un numero negativo.

Esempio Svolto 3.2: Una che si risolve e una che no:

$4x^2 - 1 = 0$. Si isola: $x^2 = \frac{1}{4}$, poi si estrae:

$$x = \pm \frac{1}{2} \implies x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$$

$x^2 + 9 = 0$. Si isola: $x^2 = -9$. Un quadrato non è mai negativo, quindi

nessuna soluzione reale

Non «impossibile» a secco: al paragrafo 5 si vedrà che in un insieme numerico più grande le soluzioni ci sono.

Formula 3.3: Monomia: $ax^2 = 0$: Poiché $a \neq 0$, si divide e resta $x^2 = 0$, cioè

$$x_1 = x_2 = 0$$

Si dice che $x = 0$ è una **soluzione doppia**: non è che ce n'è una sola, è che le due coincidono. La distinzione conta, e tornerà con $\Delta = 0$.

Metodo 3.1: Guarda i coefficienti PRIMA di scrivere la formula:

1. Porta l'equazione in **forma normale**.

2. Manca il termine noto ($c = 0$)? **Raccogli**: due righe.
3. Manca il termine di primo grado ($b = 0$)? **Isola e estrai**: due righe.
4. Mancano tutti e due? La soluzione è 0, doppia.
5. Solo se ci sono tutti e tre, calcola Δ e usa la formula.

Il controllo di dieci secondi al punto 2 e 3 fa risparmiare metà del lavoro, e su una spuria evita anche il rischio di perdere lo zero.

4 Il completamento del quadrato

Formula 4.1: L'idea, su un caso già quasi fatto: Consideriamo $(x + 4)^2 = 25$. Ponendo $x + 4 = t$ diventa $t^2 = 25$, cioè $t = \pm 5$:

$$x + 4 = \pm 5 \implies x_1 = -9, x_2 = 1$$

Eppure è un'equazione *completa*: svolgendo il quadrato,

$$x^2 + 8x + 16 = 25 \implies x^2 + 8x - 9 = 0$$

Quindi: **se riusciamo a riportare una completa nella forma $(x + A)^2 = B$, sappiamo risolverla**. Il metodo che ci arriva sempre si chiama completamento del quadrato.

Metodo 4.1: Il procedimento, e lo stesso procedimento coi numeri:

Caso generale	Che cosa si fa	Esempio
$ax^2 + bx + c = 0$	si porta il termine noto a destra	$3x^2 + x - 2 = 0$
$ax^2 + bx = -c$	si divide tutto per a	$3x^2 + x = 2$
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	si legge il termine di primo grado come un doppio prodotto	$x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}$
$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} = -\frac{c}{a}$	si aggiunge $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a tutti e due i membri	$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$	a sinistra c'è un quadrato di binomio	$\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1+24}{36}$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	e a destra una frazione sola	$\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$

L'equazione è diventata **pura**: a sinistra un quadrato, a destra un numero. Il primo membro è sempre positivo o nullo, quindi tutto dipende dal segno del numeratore di destra — che è $b^2 - 4ac$.

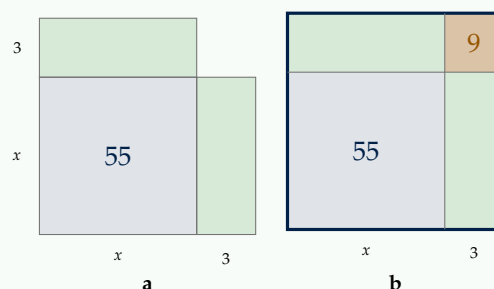
Esempio Svolto 4.1: Il quadrato disegnato: al-Khwarizmi, IX secolo:

L'equazione $x^2 + 6x = 55$ si legge come un'area: un quadrato di lato x più due rettangoli di lati x e 3, in tutto 55.

Alla figura manca un quadratino di lato 3 per diventare un quadrato intero. Aggiungendolo, l'area diventa $55 + 9 = 64$ e il quadrato ha lato $x + 3$:

$$(x + 3)^2 = 64 \implies x + 3 = 8 \implies x = 5$$

Il metodo geometrico si ferma qui: non dà la seconda soluzione ($x = -11$), perché non esiste un quadrato di lato negativo. È il limite di ragionare per aree, e il motivo per cui l'algebra ha finito per vincere.



5 Il discriminante

Formula 5.1: $\Delta = b^2 - 4ac$, e i tre casi: Dal completamento del quadrato l'equazione è diventata

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Il primo membro è un quadrato, quindi non è mai negativo; il denominatore di destra è positivo. Tutto dipende dal segno del numeratore, che si chiama **discriminante** e si indica con Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

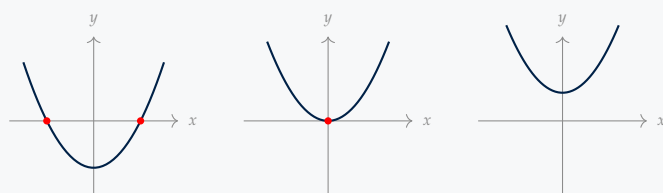
$\Delta > 0$ due soluzioni reali e **distinte**

$\Delta = 0$ due soluzioni reali e **coincidenti** (soluzione doppia)

$\Delta < 0$ **nessuna soluzione reale**

Si chiama discriminante perché *discrimina*, cioè distingue: dal suo segno si sa quante soluzioni ci sono **senza risolvere**.

Formula 5.2: I tre casi, visti: Un anticipo del capitolo sulla parabola: il grafico di $y = ax^2 + bx + c$ taglia l'asse x proprio nelle soluzioni dell'equazione.



$\Delta > 0$: due punti

$\Delta = 0$: lo tocca

$\Delta < 0$: non lo tocca

Ampliare $\mathbb{R}$: dove sono finite le soluzioni

Quando $\Delta < 0$ la formula chiede $\sqrt{\Delta}$, e in $\mathbb{R}$ quella radice non esiste. Ma i numeri sono già stati ampliati altre volte — da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ per poter sottrarre, da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ per poter dividere, da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ per poter estrarre radici di positivi — e si può fare ancora.

Si definisce l'**unità immaginaria** $i = \sqrt{-1}$ e si chiamano **numeri complessi** quelli della forma $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$. L'insieme $\mathbb{C}$ contiene $\mathbb{R}$ (basta $b = 0$) e su di esso si calcola con le regole di sempre.

Per esempio $x^2 - 2x + 5 = 0$ ha $\Delta = 4 - 20 = -16$, e

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$$

In $\mathbb{C}$ **ogni** equazione di secondo grado ha sempre due soluzioni, eventualmente coincidenti. Le due soluzioni sono sempre *coniugate*: stessa parte reale, immaginaria

opposta.

6 La formula risolutiva

Formula 6.1: Il teorema: L'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$:

- se $\Delta > 0$ ha due soluzioni reali e distinte

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- se $\Delta = 0$ ha due soluzioni reali coincidenti

$$x = -\frac{b}{2a}$$

- se $\Delta < 0$ non ha soluzioni reali.

Nei primi due casi si scrive tutto insieme:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

I tre errori che si fanno sulla formula

- **Il $-b$ è tutto il coefficiente cambiato di segno.** Se $b = -5$, allora $-b = +5$. Chi scrive -5 sbaglia il segno di tutte e due le soluzioni.
- **Il $2a$ sta sotto tutto**, non solo sotto la radice. La frazione ha una barra sola.
- **Nel Δ il $4ac$ va col suo segno.** Se $c = -2$ e $a = 3$, allora $-4ac = +24$: due meno che si mangiano. È da lì che escono i Δ negativi inventati.

Esempio Svolto 6.1: I tre casi, uno per uno:

a. $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49 > 0$$

$$x = \frac{5 \pm 7}{6} \implies x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 2$$

b. $25x^2 + 20x + 4 = 0$.

$$\Delta = 20^2 - 4 \cdot 25 \cdot 4 = 400 - 400 = 0$$

$$x = -\frac{20}{50} \implies x_1 = x_2 = -\frac{2}{5}$$

c. $2x^2 - x + 3 = 0$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 - 24 = -23 < 0$$

nessuna soluzione reale

Formula 6.2: La formula ridotta, quando b è pari: Se b è divisibile per 2, si divide tutta l'equazione per 2 e si riapplica la formula. Semplificando si ottiene

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

Il radicando è un quarto del discriminante:

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

Non è una formula nuova da imparare: è la stessa, scritta senza i 2 che si semplificherebbero comunque. Il segno di $\frac{\Delta}{4}$ è quello di Δ , quindi i tre casi restano gli stessi.

Esempio Svolto 6.2: $3x^2 - 10x + 7 = 0$ con la ridotta:

$b = -10$ è pari, quindi $\frac{b}{2} = -5$:

$$\frac{\Delta}{4} = (-5)^2 - 3 \cdot 7 = 25 - 21 = 4$$

$$x = \frac{5 \pm 2}{3} \implies x_1 = 1, x_2 = \frac{7}{3}$$

Con la formula intera si sarebbe ottenuto $\frac{10 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{10 \pm 4}{6}$: stessi risultati, numeri il doppio più grandi.

7 Quando la formula non serve

Metodo 7.1: Tre casi in cui si fa prima a occhio:

1. È **incompleta** (par. 3): raccogli o isola, due righe.
2. Il **trinomio è un quadrato di binomio**: allora $\Delta = 0$ e la soluzione è quella che annulla la base.

3. **Il trinomio si scompone a vista** — trinomio speciale, differenza di quadrati, raccoglimento: si scompone e si applica la legge di annullamento del prodotto.

La formula funziona sempre, ma «sempre» non vuol dire «prima».

Esempio Svolto 7.1: Lo stesso esercizio, per due strade:

$25x^2 + 20x + 4 = 0$. Con la formula si è visto: $\Delta = 0$ e $x = -\frac{2}{5}$.

Ma $25x^2 + 20x + 4$ è il quadrato di $5x + 2$, perché $25x^2 = (5x)^2$, $4 = 2^2$ e $20x = 2 \cdot 5x \cdot 2$.
Quindi

$$(5x + 2)^2 = 0 \implies 5x + 2 = 0 \implies x = -\frac{2}{5}$$

Due righe, nessun discriminante. E il fatto che sia un quadrato *spiega* perché Δ era nullo: un quadrato perfetto ha sempre le radici coincidenti.

Esempio Svolto 7.2: Differenza di quadrati e trinomio speciale:

$x^2 - 49 = 0$: è una differenza di quadrati.

$$(x - 7)(x + 7) = 0 \implies x_1 = -7, x_2 = 7$$

$x^2 + 5x + 6 = 0$: due numeri con somma 5 e prodotto 6 sono 2 e 3.

$$(x + 2)(x + 3) = 0 \implies x_1 = -3, x_2 = -2$$

Il secondo è già il metodo di somma e prodotto, letto al contrario: paragrafo 10.

8 Equazioni fratte

Metodo 8.1: Quattro passi, e il quarto è quello che si dimentica:

1. **Scrivi le C.E.:** si annullano i denominatori e si escludono quei valori. Prima di toccare qualunque cosa.
2. **Riduci allo stesso denominatore** e moltiplica per esso: resta un'equazione intera di secondo grado.
3. **Risolvi l'equazione intera.**
4. **Confronta con le C.E.:** le radici che violano una condizione **non sono accettabili** e si scartano.

È l'unico caso del biennio in cui il conto giusto porta alla risposta sbagliata, se ci si ferma al passo 3.

Esempio Svolto 8.1: $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{x-1}$:

1. **C.E.** I denominatori si annullano per $x = 1$ e $x = 0$:

$$\text{C.E.: } x \neq 0, x \neq 1$$

2. **Denominatore comune** $2x(x-1)$:

$$\frac{2x^2 + x - 1}{2x(x-1)} = \frac{2x}{2x(x-1)}$$

3. **Equazione intera:**

$$2x^2 + x - 1 - 2x = 0 \implies 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 \implies x = \frac{1 \pm 3}{4} \implies x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1$$

4. **Controllo.** $x_1 = -\frac{1}{2}$ soddisfa le C.E.: **accettabile**. $x_2 = 1$ non le soddisfa: **non accettabile**, e si scarta.

$$x = -\frac{1}{2}$$

L'equazione ha **una** sola soluzione, anche se l'equazione intera ne aveva due.

Il denominatore si moltiplica, non si cancella

Davanti a $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{3x}{x - 2}$ viene la tentazione di «togliere» $x - 2$ da tutte e due le parti e scrivere $x^2 - 4 = 3x$.

Il risultato *numerico* è lo stesso — moltiplicare per $x - 2$ dà proprio quello — ma il gesto è diverso, e chi cancella si dimentica di averlo fatto: $x^2 - 3x - 4 = 0$ ha soluzioni -1 e 4 , e

nessuno va più a controllare che $x \neq 2$.

Il caso in cui morde davvero è quello in cui il fattore che si cancella contiene l'incognita e sta *dentro* l'equazione intera. Da $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$, cancellando, resta $x^2 - 4 = 0$ e si risponde $x = \pm 2$: ma $x = 2$ è escluso dalle C.E., e la risposta giusta è solo $x = -2$.

La regola è una: **prima le C.E., poi si moltiplica per il denominatore comune, e alla fine si confronta**. Il passo 4 non è un controllo facoltativo, è parte della risposta.

9 Equazioni letterali

Formula 9.1: Che cosa cambia con un parametro: Nelle equazioni **letterali** compaiono, oltre all'incognita, una o più lettere dette **parametri**. La soluzione cambia al variare del parametro, e a volte non esiste: per questo il risultato non è un numero, è una **discussione**. Rispetto alle letterali di primo grado c'è un caso in più, ed è il più importante: se il parametro annulla il coefficiente di x^2 , l'equazione **abbassa il grado** e diventa di primo. Va trattato a parte, sempre.

Metodo 9.1: Come si discute:

1. Porta in **forma normale** ed evidenzia i tre coefficienti A, B, C (maiuscoli, per non confonderli con i parametri).
2. Analizza A : per quali valori del parametro si annulla? **Se** $A = 0$, l'equazione è di primo grado e si risolve come tale.
3. **Se** $A \neq 0$, calcola il discriminante e discutine il segno.
4. Se ci sono **denominatori** col parametro, scarta prima i valori che tolgono senso all'equazione; e se ci sono C.E. sull'incognita, controllale alla fine come nelle fratte.
5. **Scrivi la sintesi:** un elenco di casi, ognuno con la sua risposta.

Esempio Svolto 9.1: $2x + ax^2 = 3a^2x + 6a$, discutendo in a :

1. Forma normale:

$$ax^2 + (2 - 3a^2)x - 6a = 0$$

con $A = a, B = 2 - 3a^2, C = -6a$.

2. Se $a = 0$: resta $2x = 0$, cioè $x = 0$ (equazione di primo grado).

3. Se $a \neq 0$: è di secondo grado.

$$\Delta = (2 - 3a^2)^2 + 24a^2 = 4 + 9a^4 + 12a^2 = (2 + 3a^2)^2 > 0$$

Il discriminante è un quadrato, quindi sempre positivo: due soluzioni distinte per ogni $a \neq 0$.

$$x = \frac{-2 + 3a^2 \pm (2 + 3a^2)}{2a} \implies x_1 = 3a, x_2 = -\frac{2}{a}$$

4. Sintesi. Se $a = 0$: $x = 0$. Se $a \neq 0$: $x_1 = 3a, x_2 = -\frac{2}{a}$.

Esempio Svolto 9.2: Una letterale fratta: $\frac{x}{x+b} = \frac{3x-2b}{2x}$:

C.E.: $x \neq 0, x \neq -b$.

Riducendo e togliendo i denominatori:

$$2x^2 = (x+b)(3x-2b) \implies 2x^2 - 3x^2 + 2bx - 3bx + 2b^2 = 0$$

$$-x^2 - bx + 2b^2 = 0 \implies x^2 + bx - 2b^2 = 0$$

Il coefficiente di x^2 vale 1 e **non dipende da b** : qui l'equazione è sempre di secondo grado, e il caso «abbassa il grado» non si presenta.

$$\Delta = b^2 + 8b^2 = 9b^2$$

Se $b \neq 0$: $\Delta > 0$ e

$$x = \frac{-b \pm 3b}{2} \implies x_1 = -2b, x_2 = b$$

tutte e due accettabili, perché non valgono 0 né $-b$.

Se $b = 0$: resta $x^2 = 0$, cioè $x = 0$, che *non* soddisfa la C.E. $x \neq 0$: l'equazione è impossibile.

10 Somma e prodotto delle soluzioni

Formula 10.1: Il teorema: Se x_1 e x_2 sono le soluzioni di $ax^2 + bx + c = 0$ con $\Delta \geq 0$, allora

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Si possono quindi conoscere somma e prodotto delle soluzioni **senza risolvere l'equazione**.

Metodo 10.1: Dimostrazione: Si scrivono le due soluzioni con la formula e si sommano:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Le due radici si elidono: è per questo che la somma è razionale anche quando le singole soluzioni non lo sono.

Per il prodotto conviene riconoscere una **differenza di quadrati**, con $A = -b$ e $B = \sqrt{\Delta}$:

$$x_1 x_2 = \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

■

Esempio Svolto 10.1: $2x^2 - 3x - 14 = 0$ **senza risolverla:**

$\Delta = 9 + 112 = 121 > 0$, quindi le soluzioni ci sono. Allora

$$x_1 + x_2 = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} \quad x_1 x_2 = \frac{-14}{2} = -7$$

(Risolvendo verrebbero -2 e $\frac{7}{2}$: infatti $-2 + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}$ e $-2 \cdot \frac{7}{2} = -7$ ✓.)

Formula 10.2: L'equazione scritta con s e p : Dividendo $ax^2 + bx + c = 0$ per a e chiamando s la somma e p il prodotto delle soluzioni:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \implies \boxed{x^2 - sx + p = 0}$$

In un'equazione col primo coefficiente uguale a 1, il secondo coefficiente è la somma delle soluzioni **cambiata di segno** e il termine noto è il loro prodotto.

È la formula da usare al contrario: serve a scrivere l'equazione quando si conoscono le soluzioni, e a trovare due numeri di cui si conoscono somma e prodotto.

Esempio Svolto 10.2: Due numeri con somma 15 e prodotto -34 :

$$x^2 - 15x - 34 = 0$$

$$\Delta = 225 + 136 = 361 \implies x = \frac{15 \pm 19}{2}$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 17$$

Controllo: $-2 + 17 = 15$ ✓, $-2 \cdot 17 = -34$ ✓.

Il controllo più economico del capitolo

Trovate due soluzioni, sommate e moltiplicate: devono dare $-\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$. Sono due conti da cinque secondi e prendono quasi ogni errore di segno della formula.

Funziona anche quando le soluzioni sono irrazionali, ed è lì che serve di più: $1 - \sqrt{3}$ e $1 + \sqrt{3}$ hanno somma 2 e prodotto $1 - 3 = -2$, tutti e due razionali.

Il meno della somma, e il Δ che nessuno guarda

Due errori diversi, tutti e due frequenti.

Primo: il segno. La somma è $-\frac{b}{a}$, non $\frac{b}{a}$. In $x^2 - 7x + 12 = 0$ la somma vale $-\frac{-7}{1} = 7$, non -7 : le soluzioni sono 3 e 4. Il prodotto invece è $\frac{c}{a}$ *senza* meno, e questa asimmetria è tutto il motivo per cui ci si sbaglia. Se non ti fidi, guarda la forma $x^2 - sx + p = 0$: il meno è già scritto lì dentro.

Secondo: il teorema vuole $\Delta \geq 0$. Per $x^2 + 2x + 5 = 0$ le formule danno $s = -2$ e $p = 5$, e sono numeri perfettamente rispettabili — ma *non esistono* due numeri reali con quella somma e quel prodotto ($\Delta = 4 - 20 < 0$). Chi risponde «somma -2 , prodotto 5 » senza guardare il discriminante ha descritto una coppia che non c'è.

Vale anche al contrario: cercare due numeri con somma 3 e prodotto 10 porta a $x^2 - 3x + 10 = 0$, che ha $\Delta = -31$. La risposta non è un numero, è **non esistono**.

11 La regola di Cartesio

Formula 11.1: Permanenze e variazioni:

Si scrive l'equazione con $a > 0$ e si leggono i segni dei coefficienti da sinistra a destra. Fra un segno e il successivo c'è una **permanenza** se il segno resta uguale, una **variazione** se cambia.

Regola. In $ax^2 + bx + c = 0$ con $\Delta \geq 0$ e a, b, c tutti non nulli:

- a ogni **variazione** corrisponde una soluzione **positiva**;
- a ogni **permanenza** una soluzione **negativa**.

Se le soluzioni sono discordi, quella positiva è maggiore in valore assoluto se la variazione *precede* la permanenza; è minore nel caso contrario.

$$+3x^2 \xrightarrow{\text{variazione}} -2x \xrightarrow{\text{permanenza}} -1 = 0$$

a	b	c	segni	x_1, x_2
+	+	+	due permanenze	$-, -$
+	-	+	due variazioni	$+, +$
+	-	-	var. e perm.	$+, -$
+	+	-	perm. e var.	$-, +$

Nelle ultime due righe la prima è maggiore in valore assoluto.

Metodo 11.1: Dimostrazione, caso per caso: Serve solo quello che già sappiamo: $s = -\frac{b}{a}$ e $p = \frac{c}{a}$, più la regola dei segni.

1. **Due permanenze** (+, +, +): $p = \frac{c}{a} > 0$, quindi le soluzioni sono *concordi*; $s = -\frac{b}{a} < 0$, quindi sono **entrambe negative**.
2. **Due variazioni** (+, -, +): $p > 0$, concordi; $s > 0$, quindi **entrambe positive**.
3. **Variazione e permanenza** (+, -, -): $p < 0$, quindi *discordi*; $s > 0$, quindi la positiva ha valore assoluto **maggiore**.
4. **Permanenza e variazione** (+, +, -): $p < 0$, discordi; $s < 0$, quindi è la **negativa** ad avere valore assoluto maggiore.



Esempio Svolto 11.1: Due letture, e la verifica:

a. $4x^2 - 7x - 15 = 0$. $\Delta = 49 + 240 = 289 > 0$. I segni sono +, -, -: una **variazione** e una **permanenza**, quindi una soluzione positiva e una negativa, con $|x_{\text{pos}}| > |x_{\text{neg}}|$.

Risolvendo: $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{5}{4}$. $3 > \frac{5}{4}$ ✓.

b. $9x^2 - 30x + 25 = 0$. $\frac{\Delta}{4} = 225 - 225 = 0$: soluzione doppia. I segni sono +, -, +: due **variazioni**, quindi la soluzione doppia è **positiva**.

Risolvendo: $x_1 = x_2 = \frac{5}{3}$ ✓.

A che cosa serve davvero

La regola fu presentata da Cartesio nel 1637 nella *Géométrie*, e serviva a sapere quante soluzioni «vere» (positive) e quante «false» (negative) avesse un'equazione.

Oggi serve soprattutto a **controllare un problema prima di risolverlo**. Se stai cercando una lunghezza e la tua equazione, per Cartesio, ha due soluzioni negative, non serve calcolare: l'equazione è sbagliata. Un valore preciso non è sempre la risposta migliore a un quesito — a volte basta sapere il segno.

Due condizioni prima di contare i segni

La regola si legge sui segni dei coefficienti, ed è per questo che si applica a occhio anche quando non si dovrebbe.

Prima condizione: $a > 0$. Su $-x^2 + 5x - 6 = 0$ i segni sono -, +, -: due variazioni, quindi «entrambe positive». Qui la risposta viene giusta per caso, ma il conto non è quello: la regola è dimostrata a partire da $s = -\frac{b}{a}$ e $p = \frac{c}{a}$ con $a > 0$. Si cambiano di segno *tutti* i coefficienti — $x^2 - 5x + 6 = 0$, segni +, -, + — e poi si legge.

Seconda condizione: $\Delta \geq 0$. Su $x^2 + 2x + 5 = 0$ i segni sono $+$, $+$, $+$: due permanenze, «entrambe negative». Ma $\Delta = 4 - 20 = -16$: di soluzioni reali non ce n'è nessuna, e Cartesio ha appena descritto il segno di due numeri che non esistono. Il discriminante si calcola **prima**, sempre.

E una cosa che la regola non fa: non dice *quanto* valgono le soluzioni. Dice solo i segni — e, quando sono discordi, quale delle due è più grande in valore assoluto.

12 Scomposizione di un trinomio di secondo grado

Formula 12.1: Il teorema: Dato il trinomio $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, si considera l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$.

- Se $\Delta > 0$, dette x_1 e x_2 le soluzioni:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Se $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.
- Se $\Delta < 0$: il trinomio **non è scomponibile** in $\mathbb{R}$.

Il fattore a davanti non si dimentica: senza, la scomposizione ha il coefficiente sbagliato.

Metodo 12.1: Dimostrazione: Si raccoglie a e si usano somma e prodotto:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a [x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$$

perché $\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$ e $\frac{c}{a} = x_1x_2$. Adesso si raccoglie parzialmente:

$$a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Se $\Delta = 0$ le due soluzioni coincidono e il prodotto diventa un quadrato.

Se $\Delta < 0$ il trinomio non è scomponibile: se lo fosse, la scomposizione avrebbe un fattore $(x - x_1)$, e allora x_1 sarebbe una soluzione dell'equazione — che però non ne ha. ■

Esempio Svolto 12.1: Tre trinomi, tre esiti:

a. $5x^2 + 34x - 7$. L'equazione associata ha $\frac{\Delta}{4} = 289 + 35 = 324$, e $x = \frac{-17 \pm 18}{5}$, cioè $x_1 = -7$ e $x_2 = \frac{1}{5}$:

$$5x^2 + 34x - 7 = 5(x + 7) \left(x - \frac{1}{5} \right)$$

b. $9x^2 - 6x + 1$. $\frac{\Delta}{4} = 9 - 9 = 0$, $x = \frac{1}{3}$:

$$9x^2 - 6x + 1 = 9 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2$$

(che è anche $(3x - 1)^2$: le due scritture sono la stessa cosa).

c. $2x^2 - 3x + 5$. $\Delta = 9 - 40 = -31 < 0$:

non scomponibile

13 Problemi

Metodo 13.1: Quattro passi, e uno in più rispetto al primo grado:

1. **Scegli l'incognita** e scrivi in funzione di essa tutte le altre quantità.
2. **Poni le condizioni:** se x è una lunghezza, un tempo, un numero di oggetti, allora $x > 0$. Vanno scritte *subito*, non alla fine.
3. **Traduci** la relazione del testo in un'equazione e risolvi.
4. **Scarta le soluzioni non accettabili** e rileggi la domanda: la risposta è quello che chiedeva il testo, non necessariamente la x .

Il passo 4 è la novità: un'equazione di secondo grado dà due numeri, e il problema spesso ne vuole uno solo.

Esempio Svolto 13.1: Un problema babilonese:

Trova due numeri sapendo che la loro somma è 27 e che, sommando al loro prodotto la differenza fra il maggiore e il minore, si ottiene 183.

Sia x il maggiore; l'altro è $27 - x$. La seconda relazione diventa

$$x(27 - x) + x - (27 - x) = 183$$

$$27x - x^2 + 2x - 27 = 183 \implies x^2 - 29x + 210 = 0$$

$$\Delta = 841 - 840 = 1 \implies x = \frac{29 \pm 1}{2} \implies x_1 = 14, x_2 = 15$$

Tutte e due accettabili: le coppie sono **14 e 13** e **15 e 12**. Qui il problema ha **due** risposte, e vanno date tutte e due.

Esempio Svolto 13.2: Un problema geometrico, e la soluzione da scartare:

L'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura 85 cm e un cateto supera di 5 cm il doppio dell'altro. Trova i cateti.

Sia x il cateto minore, con $x > 0$; l'altro è $2x + 5$. Per Pitagora:

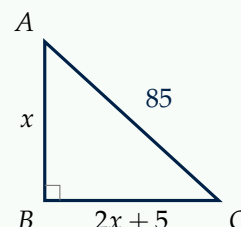
$$x^2 + (2x + 5)^2 = 85^2$$

$$5x^2 + 20x - 7200 = 0 \implies x^2 + 4x - 1440 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4 + 1440 = 1444 = 38^2 \implies x = -2 \pm 38$$

$$x_1 = -40, \quad x_2 = 36$$

$x_1 = -40$ **non è accettabile**: una lunghezza non è negativa. Quindi $\overline{AB} = 36$ e $\overline{BC} = 2 \cdot 36 + 5 = 77$ cm.

**Esempio Svolto 13.3: Un problema di realtà: l'interesse composto:**

Luisa investe 8000 euro e dopo due anni ne ha 8487,20. Quale tasso annuo composto le è stato applicato?

Detto i il tasso, dopo un anno il capitale è $8000(1 + i)$, e dopo il secondo $8000(1 + i)^2$:

$$8000(1 + i)^2 = 8487,20 \implies (1 + i)^2 = 1,0609$$

$$i^2 + 2i - 0,0609 = 0 \implies i = -1 \pm \sqrt{1,0609} = -1 \pm 1,03$$

$$i_1 = -2,03 \quad i_2 = 0,03$$

Un tasso non è negativo, quindi i_1 si scarta: $i = 0,03 = 3\%$.

14 Equazioni parametriche

Formula 14.1: Una domanda diversa: Nelle equazioni parametriche non interessa trovare le soluzioni: interessa sapere per quali valori del parametro le soluzioni hanno una certa proprietà.

La condizione che va controllata quasi sempre, e che si dimentica quasi sempre, è che le soluzioni **esistano**:

$$\Delta \geq 0$$

Una risposta che soddisfa la richiesta ma rende Δ negativo non è una risposta.

Esempio Svolto 14.1: $kx^2 - 2(k+3)x + k - 1 = 0$: soluzioni reali:

Se $k = 0$: resta $-6x - 1 = 0$, di primo grado, con $x = -\frac{1}{6}$: una soluzione reale c'è.

Se $k \neq 0$: è di secondo grado, e b è pari:

$$\frac{\Delta}{4} = (k+3)^2 - k(k-1) = k^2 + 9 + 6k - k^2 + k = 9 + 7k$$

$$9 + 7k \geq 0 \implies k \geq -\frac{9}{7}$$

e in particolare $k = -\frac{9}{7}$ dà soluzioni coincidenti, mentre $k > -\frac{9}{7}$ con $k \neq 0$ le dà distinte.

Esempio Svolto 14.2: La stessa equazione: una soluzione vale -2 :

Se -2 è soluzione, allora **sostituendola** l'equazione è soddisfatta. Diventa un'equazione nell'incognita k :

$$k(-2)^2 - 2(k+3)(-2) + k - 1 = 0$$

$$4k + 4k + 12 + k - 1 = 0 \implies 9k + 11 = 0 \implies k = -\frac{11}{9}$$

Controllo obbligatorio: la condizione di realtà era $k \geq -\frac{9}{7}$, e $-\frac{11}{9} > -\frac{9}{7} \checkmark$. Se non fosse stata soddisfatta, il valore trovato andrebbe scartato.

Esempio Svolto 14.3: La stessa equazione: somma 3, e prodotto -1 :

a. Somma 3. $s = -\frac{b}{a} = \frac{2(k+3)}{k}$, con C.E. $k \neq 0$:

$$\frac{2k+6}{k} = 3 \implies 2k+6 = 3k \implies k = 6$$

b. Prodotto -1 . $p = \frac{c}{a} = \frac{k-1}{k}$:

$$\frac{k-1}{k} = -1 \implies k-1 = -k \implies k = \frac{1}{2}$$

Tutti e due i valori soddisfano $k \neq 0$ e $k \geq -\frac{9}{7}$: accettabili.

15 Quale strada, e quando

Formula 15.1: La tabella da tenere davanti:

Che cosa hai davanti	Che cosa fai
manca il termine noto	raccogli x : una soluzione è 0
manca il termine in x	isola x^2 ed estrai, col $\pm$
mancano tutti e due	$x = 0$, doppia
è un quadrato di binomio	annulla la base: Δ è nullo
si scompone a vista	legge di annullamento del prodotto
completa, b dispari	$\Delta = b^2 - 4ac$ e formula intera
completa, b pari	$\frac{\Delta}{4}$ e formula ridotta
«quante soluzioni?»	il segno di Δ , senza risolvere
«che segno hanno?»	regola di Cartesio
«somma e prodotto?»	$-\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$, senza risolvere
«due numeri con somma e prodotto»	$x^2 - sx + p = 0$
«scomponi il trinomio»	risolvi, poi $a(x - x_1)(x - x_2)$
ci sono denominatori con la x	C.E. prima, confronto dopo
c'è una lettera oltre alla x	discussione: prima $A = 0$
«per quale k ...»	imponi la condizione, e controlla Δ

Esempio Svolto 15.1: Un esercizio che ne usa quattro:

Del trinomio $2x^2 - 5x - 3$: di' quante radici ha l'equazione associata e che segno hanno, scrivilo, e scomponi il trinomio.

Quante → discriminante. $\Delta = 25 + 24 = 49 > 0$: due distinte.

Che segno → Cartesio. Segni $+$, $-$, $-$: una variazione e una permanenza, quindi una positiva e una negativa, con la positiva maggiore in valore assoluto.

Quali → formula. $x = \frac{5 \pm 7}{4}$, cioè $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = 3$. E infatti $3 > \frac{1}{2} \checkmark$, come diceva Cartesio.

Scomposizione → teorema del paragrafo 12:

$$2x^2 - 5x - 3 = 2 \left(x + \frac{1}{2} \right) (x - 3)$$

Controllo finale con somma e prodotto: $-\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2} = -\frac{b}{a} \checkmark$, $-\frac{1}{2} \cdot 3 = -\frac{3}{2} = \frac{c}{a} \checkmark$.

Dove si va da qui

Il segno del discriminante che qui dice «quante soluzioni» diventerà, nel capitolo delle **disequazioni di secondo grado**, «per quali x il trinomio è positivo»: la stessa quantità, letta su tutta la retta invece che nei soli punti in cui si annulla.

La scomposizione $a(x - x_1)(x - x_2)$ è ciò che rende leggibile quel segno, e le due soluzioni diventeranno i punti in cui la **parabola** taglia l'asse x . I tre disegni del paragrafo 5 sono

già quel capitolo, visto da lontano.

Indice analitico

completamento del quadrato, 7

condizioni di esistenza, 12

discriminante, 9

discussione, 14

equazione di secondo grado, 3

equazione fratta, 12

equazione letterale, 14

equazione monomia, 5

equazione parametrica, 20

equazione pura, 5

equazione spuria, 5

forma normale, 4

formula risolutiva, 10

numeri complessi, 9

problemi, 19

quadrato di binomio, 11

regola di Cartesio, 17

scomposizione, 18

somma e prodotto, 15