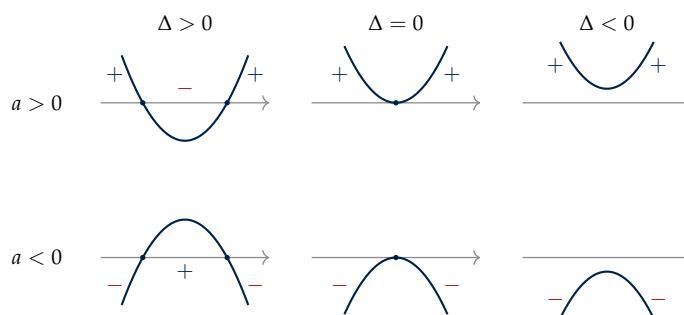


FORMULARIO: DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

In ogni riquadro: la regola, la riga **QUANDO** che dice a quale domanda risponde, e un esempio con i numeri. La risposta di una disequazione è sempre un **insieme**.

1 Leggere il segno

1.1 I sei casi, in un disegno



QUANDO sempre, per primo. Questa figura contiene tutto il capitolo: ogni disequazione intera si risolve leggendo la casella giusta e prendendo la parte che il verso chiede.

ESEMPIO

La curva sopra l'asse è dove il trinomio è **positivo**, sotto dove è **negativo**. Il segno di a decide da che parte si apre, il segno di Δ quante volte tocca l'asse.

1.2 Segno di un trinomio: la regola

Detta $ax^2 + bx + c$ l'espressione e $\Delta = b^2 - 4ac$:

- $\Delta > 0$: **concorde** con a fuori dall'intervallo delle radici, **discorde** dentro;
- $\Delta = 0$: concorde con a per ogni $x \neq x_1$;
- $\Delta < 0$: concorde con a per **ogni** x reale.

QUANDO ti serve il segno e basta — «studia il segno del trinomio», oppure dentro un quadro dei segni più grande, come riga di un prodotto o di una frazione.

ESEMPIO

$x^2 + \frac{7}{2}x - 2$: radici -4 e $\frac{1}{2}$, $a > 0$.

negativo per $-4 < x < \frac{1}{2}$, positivo per $x < -4 \vee x > \frac{1}{2}$

«Fuori come a , dentro il contrario»: è la regola in cinque parole.

1.3 Interni ed esterni

Con due radici $x_1 < x_2$:

$$\underbrace{x < x_1 \vee x > x_2}_{\text{esterni}} \qquad \underbrace{x_1 < x < x_2}_{\text{interni}}$$

QUANDO ogni volta che leggi la regola del segno: «concorde» e «discorde» si riferiscono *sempre* a queste due zone, mai al segno di x .

ESEMPIO

Le due radici non stanno in nessuna delle due zone: lì il trinomio vale zero, e ci entra nella risposta solo se il verso è largo ($\leq$ o $\geq$).

x_1 è **sempre il minore**. Se risolvendo ti escono in ordine inverso — succede quando $a < 0$ — riordinali prima di disegnare qualunque cosa.

2 Risolvere

2.1 I tre passi

1. **forma normale con $a > 0$** (se $a < 0$: moltiplica per -1 e **cambia il verso**);
2. **equazione associata:** Δ , e le radici se ci sono;
3. **leggi il segno** e prendi la parte richiesta.

QUANDO disequazione **intera** di secondo grado, in qualunque forma: se non è in forma normale, il passo 1 la porta lì.

ESEMPIO

$-4x^2 - 11x + 3 \geq 0$ diventa $4x^2 + 11x - 3 \leq 0$.

$\Delta = 169$, radici -3 e $\frac{1}{4}$; serve il trinomio negativo o nullo, cioè la zona interna: $-3 \leq x \leq \frac{1}{4}$.

Il controllo si fa **sul testo di partenza**: $x = 0$ dà $3 \geq 0 \checkmark$.

2.2 La tabella delle risposte (con $a > 0$)

	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta > 0$	$x < x_1 \vee x > x_2$	$x_1 < x < x_2$
$\Delta = 0$	$x \neq x_1$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$

QUANDO hai già portato $a > 0$ e calcolato Δ : qui c'è la risposta senza ripassare dal disegno.

ESEMPIO

Col verso **largo** si aggiungono le radici: $x \leq x_1 \vee x \geq x_2$, e la casella $\nexists$ di $\Delta = 0$ diventa il solo punto $x = x_1$.

2.3 I quattro esiti che non sono un intervallo

$$x^2 - 6x + 9 > 0 \quad x \neq 3$$

$$x^2 - 6x + 9 \geq 0 \quad S = \mathbb{R}$$

$$x^2 - 6x + 9 < 0 \quad S = \emptyset$$

$$x^2 - 6x + 9 \leq 0 \quad x = 3$$

QUANDO $\Delta \leq 0$. Sono i casi in cui la risposta *sembra* sbagliata e non lo è: prima di cercare l'errore, rileggi il verso.

ESEMPIO

$S = \emptyset$ vuol dire «nessun numero», non « $x = 0$ ».

$S = \mathbb{R}$ vuol dire «tutti», non « $x = \infty$ »: l'infinito non è un numero e non può essere una soluzione.

2.4 Estremi irrazionali

Se $\Delta > 0$ non è un quadrato perfetto, gli estremi **restano radicali**:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

QUANDO sempre, tranne nell'ultima riga di un problema che chiede un numero intero di oggetti. Lì — e solo lì — si approssima, una volta sola.

ESEMPIO

$x^2 - 2x - 1 < 0$: $\frac{\Delta}{4} = 2$, quindi $x = 1 \pm \sqrt{2}$ e

$$1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$$

Scrivere $-0,41 < x < 2,41$ è **sbagliato**: il numero 2,41 starebbe dentro l'insieme vero e fuori da quello arrotondato.

3 I due quadri, che non sono lo stesso quadro

Segni o soluzioni? Guarda che c'è scritto a sinistra

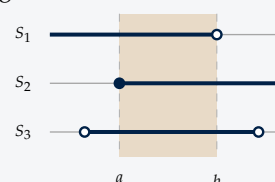
QUADRO DEI SEGNI

righe = *fattori* → si **moltiplica**

		-1		5	
F_1	-	0	+		+
F_2	-		-	0	+
$F_1 F_2$	+	0	-	0	+

QUADRO DELLE SOLUZIONI

righe = *insiemi* → si **interseca**



Si somigliano sul foglio e non c'entrano niente l'uno con l'altro. Nel primo ogni casella contiene un **segno** e alla fine i segni si moltiplicano; nel secondo ogni riga è una **barra** disegnata dove quella disequazione è verificata, e alla fine si prende la **zona comune**. Se a sinistra ci sono fattori, si moltiplica; se ci sono disequazioni, si interseca.

3.1 Grado superiore al secondo

1. porta tutto a primo membro;
2. **scomponi** (raccoglimento, prodotti notevoli, Ruffini);
3. studia il segno di **ogni fattore**;
4. compila il **quadro dei segni** e moltiplica;
5. prendi la parte richiesta.

QUANDO il grado è 3 o più. Non esiste una formula: la strada è sempre la scomposizione.

ESEMPIO

$x^3 - 2x^2 - 13x - 10 > 0$. Con Ruffini ($x = -1$ annulla):

$$(x + 1)(x^2 - 3x - 10) > 0 \implies -2 < x < -1 \vee x > 5$$

Ci si **ferma al secondo grado**: un fattore di secondo grado non si scompone oltre, il suo segno si sa già studiare.

3.2 Un fattore sempre positivo si può saltare

Se un fattore ha $\Delta < 0$ e $a > 0$, è positivo per ogni x : non cambia il segno del prodotto, e si può **dividere** per lui senza cambiare il verso.

QUANDO nel quadro dei segni compare una riga di soli +: quella riga non serve, e toglierla accorcia il disegno.

ESEMPIO

$(x - 10)(x^2 + 7x + 72) \geq 0$: il secondo fattore ha $\Delta = 49 - 288 < 0$ e $a > 0$, quindi resta $x - 10 \geq 0$, cioè $x \geq 10$.

Va detto, però, e col motivo: saltare una riga senza scriverlo è indistinguibile dal dimenticarla.

4 Fratte, sistemi, domini

4.1 Disequazioni fratte: quattro passi

1. **C.E.**: annulla il denominatore ed escludi quei valori;
2. **forma normale** $\frac{N(x)}{D(x)}$ con lo zero a secondo membro — **non** si moltiplica per il denominatore;
3. **quadro dei segni** di N e D , con $\neq$ sopra gli zeri di D ;
4. leggi, **senza mai includere** i valori esclusi.

QUANDO l'incognita compare al denominatore.

ESEMPIO

$\frac{x-1}{x-3} > 0$: C.E. $x \neq 3$; $N > 0$ per $x > 1$, $D > 0$ per $x > 3$; il quoziente è positivo fuori: $x < 1 \vee x > 3$.

Moltiplicare per $x - 3$ darebbe $x > 1$, **sbagliato**: $x = 2$ ci starebbe dentro, ma nel testo dà $\frac{1}{-1} = -1 > 0$, falsa.

4.2 Perché il denominatore non si tocca

$$\frac{N}{D} > 0 \quad \text{non} \implies N > 0$$

Moltiplicare per D cambia il verso se D è negativo — e non si sa se lo è, perché dipende da x , che è quello che stiamo cercando.

QUANDO ogni volta che ti viene la tentazione di «togliere» il denominatore. Nelle *equazioni* si poteva; qui no, perché lì il verso non c'era.

ESEMPIO

E lo zero del denominatore **non entra mai** nella risposta, nemmeno col verso largo, nemmeno se annulla anche il numeratore: dove il denominatore è zero la frazione non esiste, e una cosa che non esiste non può valere zero.

4.3 Sistemi di disequazioni

1. risolvi **ogni disequazione da sola**: $S_1, S_2, \dots$;
2. disegna il **quadro delle soluzioni**, una barra per riga, punti allineati in verticale;
3. prendi l'**intersezione**: la zona coperta da *tutte*.

QUANDO le disequazioni sono in graffa, cioè devono valere **contemporaneamente**. Anche i domini con più condizioni sono sistemi.

ESEMPIO

$$\begin{cases} x^2 - 5 < 0 \\ x^2 - 4x + 4 > 0 \\ 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{dà } S_1 : -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}, \quad S_2 : x \neq 2, \quad S_3 : x \geq -\frac{1}{3}, \text{ e intersecando} \\ -\frac{1}{3} \leq x < 2 \vee 2 < x < \sqrt{5}.$$

4.4 Sistemi con una riga fratta

Il metodo non cambia — si risolve ogni riga da sola e si interseca — ma

le **C.E.** di una riga valgono per il **sistema intero**

perché le righe devono valere *contemporaneamente*: un valore che rende priva di senso una riga non può essere soluzione, anche se tutte le altre lo accetterebbero.

QUANDO almeno una riga ha l'incognita al denominatore. Scrivi le C.E. in cima al foglio, prima del sistema, e rileggile alla fine: è lì che si dimenticano.

ESEMPIO

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x-3} > 0 \\ x^2 - 16 < 0 \end{cases} \quad \text{con C.E. } x \neq 3: \quad S_1 : x < 1 \vee x > 3, \quad S_2 : -4 < x < 4, \text{ e intersecando} \\ -4 < x < 1 \vee 3 < x < 4.$$

Con **tre o più righe** il quadro delle soluzioni non è più un lusso: gli estremi diventano quattro o

sei, e tenerli a mente nell'ordine giusto è il modo in cui si perde un pezzo di risposta.

4.5 Domini

- sotto una **radice quadrata**: radicando ≥ 0 ;
- a **denominatore**: $\neq 0$;
- radice quadrata *al* denominatore: radicando > 0 (stretto: non può valere zero).

Più condizioni valgono **tutte insieme**: si mettono a sistema.

QUANDO «trova il dominio», «per quali x l'espressione ha senso», «campo di esistenza». È l'uso di questo capitolo che tornerà per tutto il triennio.

ESEMPIO

$\sqrt{x^2 + 7x} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$: $x^2 + 7x \geq 0$ dà $x \leq -7 \vee x \geq 0$; $3 - x > 0$ dà $x < 3$. A sistema: $x \leq -7 \vee 0 \leq x < 3$.

5 Parametri, problemi, controlli

5.1 Sempre positivo, sempre negativo

$$ax^2 + bx + c > 0 \forall x \iff \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \quad ax^2 + bx + c < 0 \forall x \iff \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

QUANDO «per quali k il trinomio è sempre positivo/negativo», «per quali k la disequazione è verificata da ogni x ».

ESEMPIO

$2x^2 + 5x + k$ sempre positivo: $a = 2 > 0$ già va bene, resta $\Delta = 25 - 8k < 0$, cioè $k > \frac{25}{8}$.
Le due condizioni sono un **sistema**, non una scelta: servono tutte e due.

5.2 Il parametro davanti a x^2 : $k = 0$ va discusso

Se il coefficiente di x^2 contiene il parametro, il valore che lo annulla **non** dà una disequazione di secondo grado: va guardato a parte, prima di calcolare Δ .

QUANDO il parametro sta nel primo coefficiente. È il primo caso da scrivere, e quasi sempre si scarta — ma va *scritto*.

ESEMPIO

$kx^2 + 8x - 11 < 0$ per ogni x : con $k = 0$ resta $8x - 11$, che è una retta e cambia segno: non va bene.

Con $k \neq 0$ serve $\begin{cases} k < 0 \\ 64 + 44k < 0 \end{cases}$, cioè $k < -\frac{16}{11}$.

5.3 Problemi: le condizioni prima, l'arrotondamento dopo

1. scegli l'incognita e poni **subito** le condizioni ($x > 0, x \in \mathbb{N}$);
2. traduci in disequazione e risolvi **in esatto**;
3. torna al problema: scarta il non accettabile e **solo adesso** arrotonda.

QUANDO il testo è in italiano. La disequazione dà un intervallo; il problema vuole un numero.

ESEMPIO

Rete con almeno 24 collegamenti: $\frac{x(x-1)}{2} \geq 24$ dà $x^2 - x - 48 \geq 0$, con $x \geq \frac{1+\sqrt{193}}{2} \approx 7,45$. Il minimo naturale è 8, e si controlla: $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \geq 24 \checkmark$, mentre con 7 sarebbero 21.

5.4 I controlli che costano dieci secondi

- **un numero dentro S**: sostituito nel testo di partenza, la disuguaglianza dev'essere **vera**;
- **un numero fuori**: dev'essere **falsa**;
- **gli estremi**: sostituiti danno l'uguaglianza, e ci stanno solo col verso largo;
- **nelle fratte**: nessun valore accettato annulla il denominatore;
- **il verso**: se hai moltiplicato per un negativo, è cambiato?

QUANDO sempre, prima di consegnare. Un insieme sbagliato non si vede rileggendo: si vede sostituendo.

ESEMPIO

Il controllo va fatto **sul testo originale**, non sulla forma normale: se l'errore è nel passaggio a $a > 0$, controllare sulla riga dopo conferma l'errore invece di scoprirlo.