

DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

03 - ALGEBRA2

Dove la risposta non è più un numero, ma un insieme

Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima di partire	3
2	Il salto: da due numeri a un insieme	3
3	Ripasso: le disequazioni di primo grado	4
4	Il segno di un trinomio	5
5	La regola: concorde e discorde	6
6	La dimostrazione: perché la regola funziona	8
7	Risolvere una disequazione intera	9
8	I quattro esiti che non sono un intervallo	10
9	Quando gli estremi sono irrazionali	11
10	Grado superiore al secondo	12
11	Disequazioni fratte	13
12	Sistemi di disequazioni	15
13	Domini	17
14	Problemi	18
15	Disequazioni parametriche	19
16	Quale strada, e quando	20

1 Cosa serve prima di partire

Cosa devi già sapere

- **Equazione di secondo grado.** In forma normale è $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$; si risolve con $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, dove $\Delta = b^2 - 4ac$. Per esempio $x^2 - x - 6 = 0$ ha $\Delta = 25$ e soluzioni -2 e 3 .
- **Scomposizione del trinomio.** Se l'equazione associata ha soluzioni x_1 e x_2 , allora $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Nell'esempio di prima: $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$. Il fattore a davanti non si dimentica.
- **Il verso che cambia.** Moltiplicando o dividendo i due membri di una disequazione per un numero **negativo**, il verso si rovescia: da $-2x > 6$ si passa a $x < -3$. È la regola che qui serve più di tutte.
- **Intervalli.** $2 < x \leq 5$ si scrive $(2, 5]$: parentesi **tonda** dove l'estremo è escluso, **quadra** dove è compreso. Dalla parte dell'infinito sempre tonda, perché l'infinito non è un numero.
- **Regola dei segni.** Un prodotto di due fattori è positivo se i due fattori hanno lo stesso segno, negativo se ce l'hanno diverso. Da qui nasce il quadro dei segni.
- **C.E. di una frazione.** Il denominatore non si annulla mai: in $\frac{1}{x-3}$ si scrive $x \neq 3$ *prima* di fare qualunque altra cosa.

Se questi sei punti sono chiari, il resto del capitolo si legge di fila.

2 Il salto: da due numeri a un insieme

Un'equazione di secondo grado chiede: *per quali x vale l'uguaglianza?* E la risposta sono al massimo due numeri.

Una disequazione chiede un'altra cosa: *per quali x vale la disuguaglianza?* E la risposta non può più essere una lista di numeri, perché i numeri che vanno bene sono infiniti.

Esempio Svolto 2.1: Lo stesso trinomio, due domande diverse:

Prendiamo $x^2 - x - 6$.

Domanda da equazione. $x^2 - x - 6 = 0$: $\Delta = 1 + 24 = 25$,

$$x = \frac{1 \pm 5}{2} \implies x_1 = -2, x_2 = 3$$

Due numeri, e il lavoro è finito.

Domanda da disequazione. $x^2 - x - 6 < 0$: quali numeri rendono *negativo* quel trinomio?

Proviamo.

$$x = 0 : -6 < 0 \checkmark \quad x = 1 : -6 < 0 \checkmark \quad x = 5 : 14 < 0 \text{ no} \quad x = -4 : 14 < 0 \text{ no}$$

Vanno bene 0 e 1, non vanno bene 5 e -4. E allora $\frac{1}{2}$? E 2,9? Provandoli uno per uno non si finisce mai: i numeri che vanno bene sono **infiniti**, e la risposta dev'essere il modo di descriverli tutti insieme.

$$-2 < x < 3$$

I due numeri -2 e 3 non sono spariti: sono diventati i **confini** della risposta. È tutto il capitolo in una frase — risolvere l'equazione associata serve a trovare i confini, non la risposta.

Fermarsi alle radici

L'errore numero uno, e si fa per abitudine: si risolve l'equazione associata, si trovano -2 e 3 , e si scrive « $x_1 = -2, x_2 = 3$ ».

Quelle sono le soluzioni dell'**equazione** $x^2 - x - 6 = 0$, cioè i due soli numeri che rendono il trinomio *nullo*. La disequazione $x^2 - x - 6 < 0$ chiede dove è *negativo*, e quei due numeri sono esattamente gli unici due dove non lo è.

Il modo di accorgersene costa cinque secondi: **sostituisci uno dei due**. Con $x = -2$ resta $0 < 0$, che è falsa. Se il numero che hai dato come risposta non verifica la disequazione, non è una risposta.

Come si scrive una risposta, in questo capitolo

Un insieme di numeri si scrive in **tre modi**, e sono la stessa cosa detta tre volte:

- con una **disuguaglianza**: $-2 < x < 3$;
- con un **intervallo**: $S = (-2, 3)$;
- con un **disegno** sulla retta.

In questo file la risposta si dà sempre nei primi due modi, e nel terzo ogni volta che aiuta. Il disegno non è un vezzo: nei sistemi e nelle fratte è il foglio su cui si lavora.

3 Ripasso: le disequazioni di primo grado

Qui non c'è niente di nuovo, e serve tutto.

Formula 3.1: I due principi:

- **Primo principio**. Aggiungendo o togliendo lo stesso numero ai due membri, la disequazione non cambia. Da qui la *regola del trasporto*: un termine passa dall'altra parte cambiando segno.
- **Secondo principio**. Moltiplicando o dividendo i due membri per uno stesso numero

diverso da zero:

- se è **positivo**, il verso resta;
- se è **negativo**, il verso **cambia**.

Esempio Svolto 3.1: I due casi, affiancati:

$$3x < 6 \implies x < 2$$

dividiamo per +3: **stesso** verso

$$-x > 5 \implies x < -5$$

moltiplichiamo per -1: verso **cambiato**

Controllo del secondo: $x = -6$ dà $6 > 5$ ✓; $x = 0$ dà $0 > 5$, falsa ✓.

Perché il verso cambia

Non è una convenzione, è un fatto sui numeri: $2 < 3$, ma i loro opposti stanno nell'ordine rovesciato, $-2 > -3$. Moltiplicare per un negativo ribalta la retta dei numeri, e chi stava a sinistra si trova a destra.

4 Il segno di un trinomio

Prima di risolvere qualunque disequazione conviene rispondere a una domanda più semplice, che le contiene tutte:

per quali x il trinomio $ax^2 + bx + c$ è positivo, e per quali è negativo?

Chi sa rispondere a questa, sa risolvere ogni disequazione del capitolo: basta leggere la parte che interessa.

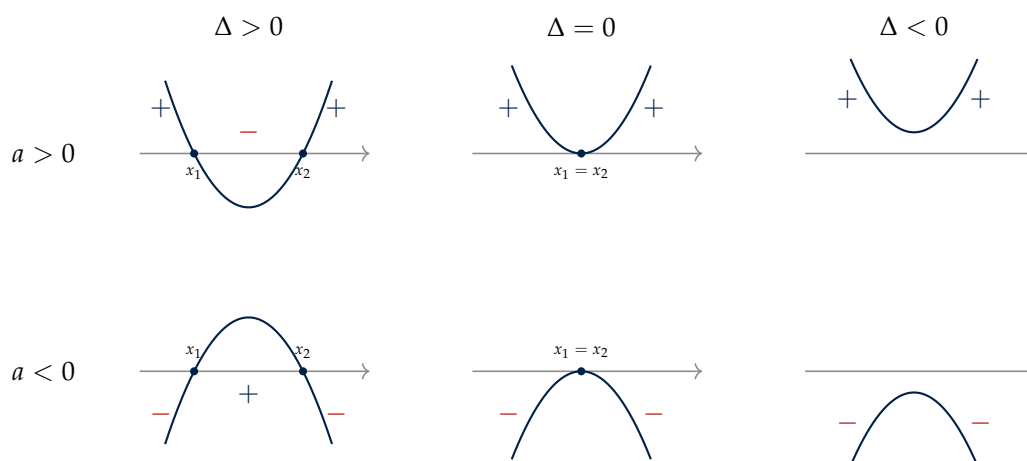
La parabola, cioè il disegno che spiega tutto

Al trinomio $ax^2 + bx + c$ si associa la funzione $y = ax^2 + bx + c$, il cui grafico è una **parabola**. Il segno del trinomio si legge dalla posizione della curva rispetto all'asse x : dove la curva sta **sopra** l'asse, y è positivo; dove sta **sotto**, è negativo.

Due cose determinano il disegno:

- il segno di a dice da che parte si apre la parabola: verso l'**alto** se $a > 0$, verso il **basso** se $a < 0$;
- il segno di Δ dice quante volte tocca l'asse x : due volte se $\Delta > 0$, una sola se $\Delta = 0$, mai se $\Delta < 0$.

Due possibilità per la prima, tre per la seconda: **sei casi**, e sono tutti qui sotto.



Esempio Svolto 4.1: Il segno di $x^2 + \frac{7}{2}x - 2$:

L'equazione associata $x^2 + \frac{7}{2}x - 2 = 0$, moltiplicata per 2, è $2x^2 + 7x - 4 = 0$: $\Delta = 49 + 32 = 81$,

$$x = \frac{-7 \pm 9}{4} \Rightarrow x_1 = -4, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Qui $a = 1 > 0$ e $\Delta > 0$: siamo nella prima casella della tabella. La parabola si apre verso l'alto e taglia l'asse in -4 e $\frac{1}{2}$. Quindi il trinomio è:

- **negativo** per $-4 < x < \frac{1}{2}$ (dove la curva sta sotto l'asse);
- **nullo** per $x = -4$ e $x = \frac{1}{2}$;
- **positivo** per $x < -4 \vee x > \frac{1}{2}$.

Controllo. In $x = 0$ (che sta dentro l'intervallo) il trinomio vale -2 : negativo ✓. In $x = 1$ (che sta fuori) vale $1 + \frac{7}{2} - 2 = \frac{5}{2}$: positivo ✓.

5 La regola: concorde e discorde

La tabella dei sei casi si riassume in una regola sola, che si applica senza disegnare niente. Bisogna solo dare un nome a due zone.

Formula 5.1: Interni ed esterni: Se l'equazione associata ha due soluzioni $x_1 < x_2$, i valori di x si dividono in:

- **interni** all'intervallo delle radici: $x_1 < x < x_2$;
- **esterni**: $x < x_1$ oppure $x > x_2$.

Le due radici stesse non sono né interne né esterne: lì il trinomio vale zero.

Formula 5.2: Segno di un trinomio di secondo grado: Data l'equazione associata a $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$:

- se $\Delta > 0$, il trinomio ha segno **concorde** con a per i valori *esterni* all'intervallo delle

radici, e segno **discorde** da a per i valori *interni*;

- se $\Delta = 0$, ha segno concorde con a per ogni x **diverso** dalla radice;
- se $\Delta < 0$, ha segno concorde con a per **ogni** valore reale di x .

Detta ancora più corta, e conviene impararla così: **fuori come a , dentro il contrario** — e quando le radici non ci sono, «dentro» non esiste e resta solo «come a », dappertutto.

Esempio Svolto 5.1: Tre trinomi, tre casi:

a. $-x^2 - x + 2$. Equazione associata: $-x^2 - x + 2 = 0$, cioè $x^2 + x - 2 = 0$, con $\Delta = 1 + 8 = 9$ e radici $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Qui $a = -1 < 0$: fuori è *negativo* (come a), dentro *positivo*.

positivo per $-2 < x < 1$, negativo per $x < -2 \vee x > 1$

b. $9x^2 - 6x + 1$. $\frac{\Delta}{4} = 9 - 9 = 0$, radice doppia $x = \frac{1}{3}$. Con $a = 9 > 0$:

positivo per ogni $x \neq \frac{1}{3}$, nullo solo in $x = \frac{1}{3}$

c. $-8x^2 + x - 3$. $\Delta = 1 - 96 = -95 < 0$: nessuna radice. Con $a = -8 < 0$:

negativo per ogni $x \in \mathbb{R}$

Controllo del terzo, che è quello che sembra strano: in $x = 0$ vale -3 ; in $x = 10$ vale $-800 + 10 - 3$; in $x = -10$ vale $-800 - 10 - 3$. Sempre negativo, e non c'è modo di farlo diventare positivo.

La regola parla di a , non del primo coefficiente scritto

«Concorde con a » vuol dire concorde con il coefficiente di x^2 *così com'è*, segno compreso. Su $-x^2 + 5x - 6$ il coefficiente è -1 , non 1 .

Chi legge $-x^2 + 5x - 6 > 0$ e applica la regola pensando a un a positivo risponde «esterno», cioè $x < 2 \vee x > 3$: sbagliato, la risposta è $2 < x < 3$. Le due risposte sono una il contrario dell'altra, quindi l'errore non è piccolo — è massimo.

La cura è meccanica e si fa **prima** di guardare la regola: moltiplicare tutto per -1 e cambiare il verso, così a diventa positivo.

$$-x^2 + 5x - 6 > 0 \implies x^2 - 5x + 6 < 0 \implies 2 < x < 3$$

Controllo: $x = 2,5$ dà $-6,25 + 12,5 - 6 = 0,25 > 0 \checkmark$.

6 La dimostrazione: perché la regola funziona

La regola non è arrivata dal disegno: il disegno la mostra, l'algebra la dimostra. E si dimostra con la scomposizione del trinomio, che è già nota.

Metodo 6.1: Caso $\Delta > 0$: L'equazione ha due radici distinte $x_1 < x_2$, e il trinomio si scompone:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Il segno del prodotto si studia con la regola dei segni sui due fattori $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$:

	x_1		x_2	
$x - x_1$	-	0	+	+
$x - x_2$	-	-	0	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	-	+

Il prodotto dei due fattori è dunque **positivo fuori** e **negativo dentro**. Moltiplicando per a :

- se $a > 0$ i segni restano, e il trinomio è positivo fuori;
- se $a < 0$ tutti i segni si rovesciano, e il trinomio è negativo fuori.

In tutti e due i casi: **fuori concorde con a , dentro discorde**. ■

Metodo 6.2: Caso $\Delta = 0$: Le due radici coincidono e la scomposizione diventa un quadrato:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

Un quadrato è positivo per ogni $x \neq x_1$ e nullo in x_1 : quindi il prodotto ha il segno di a dappertutto tranne in x_1 , dove vale zero. ■

Metodo 6.3: Caso $\Delta < 0$: Qui non ci sono radici e la scomposizione non esiste. Si completa il quadrato:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right]$$

perché $-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{-\Delta}{4a^2}$.

Dentro la parentesi quadra ci sono due addendi: il primo è un quadrato, quindi ≥ 0 ; il secondo è $\frac{-\Delta}{4a^2}$, che con $\Delta < 0$ è **strettamente positivo**. Una somma fra un numero non negativo e uno positivo è positiva, sempre.

Quindi la parentesi è positiva per ogni x , e il trinomio ha il segno di a per ogni valore reale. ■

Esempio Svolto 6.1: La dimostrazione, su un caso concreto:

Vale la pena rifare il primo caso con dei numeri, per vedere che il quadro dei segni della dimostrazione è lo stesso che si compila negli esercizi.

Prendiamo $-2x^2 + 2x + 12$. L'equazione associata dà, dividendo per -2 , $x^2 - x - 6 = 0$: radici $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$. La scomposizione è

$$-2x^2 + 2x + 12 = -2(x + 2)(x - 3)$$

Il prodotto $(x + 2)(x - 3)$ è positivo fuori e negativo dentro, come dice la tabella della dimostrazione. Moltiplicando per $a = -2$, che è negativo, **tutti i segni si rovesciano**: il trinomio è negativo fuori e positivo dentro.

positivo per $-2 < x < 3$, negativo per $x < -2 \vee x > 3$

Controllo. $x = 0$ (dentro): 12 , positivo ✓. $x = 4$ (fuori): $-32 + 8 + 12 = -12$, negativo ✓. Ed è quello che prevedeva la regola: $a < 0$, quindi *discorde* da a — cioè positivo — nella zona interna.

Che cosa si è guadagnato

La dimostrazione dice una cosa che il disegno non dice: la regola vale **sempre**, non solo negli esempi provati. E dice anche *perché* il caso $\Delta < 0$ non ha eccezioni — non perché «la parabola non tocca l'asse», che è un'osservazione sul disegno, ma perché una somma di un quadrato e di un numero positivo non può annullarsi.

7 Risolvere una disequazione intera

Adesso il metodo, che è corto perché il lavoro l'ha fatto il paragrafo precedente.

Metodo 7.1: Tre passi:

1. **Forma normale**, con $a > 0$: si porta tutto a primo membro e, se il coefficiente di x^2 è negativo, si moltiplica per -1 **cambiando il verso**.
2. **Equazione associata**: si calcola Δ e, se ci sono, le radici.
3. **Si legge il segno** e si prende la parte che la disequazione chiede.

Il passo 1 non è facoltativo: la regola del segno è enunciata rispetto ad a , e con $a > 0$ «concorde» vuol dire «positivo», che è più facile da tenere a mente.

Formula 7.1: La tabella delle risposte, con $a > 0$:

$a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta > 0$	$x < x_1 \vee x > x_2$	$x_1 < x < x_2$
$\Delta = 0$	$x \neq x_1$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$

Col verso *largo* ($\geq$ o $\leq$) si aggiungono le radici, dove il trinomio vale zero: da $x < x_1 \vee x > x_2$ si passa a $x \leq x_1 \vee x \geq x_2$, e la casella $\nexists$ di $\Delta = 0$ diventa il solo punto $x = x_1$.

Esempio Svolto 7.1: $-4x^2 - 11x + 3 \geq 0$:

1. Forma normale con $a > 0$. Moltiplico per -1 e cambio verso:

$$4x^2 + 11x - 3 \leq 0$$

2. Equazione associata. $4x^2 + 11x - 3 = 0$:

$$\Delta = 121 + 48 = 169 > 0 \quad x = \frac{-11 \pm 13}{8} \implies x_1 = -3, \quad x_2 = \frac{1}{4}$$

3. Lettura. La disequazione chiede dove il trinomio è **negativo o nullo**: con $a > 0$ è la zona *interna*, radici comprese.

$$-3 \leq x \leq \frac{1}{4}, \quad S = \left[-3, \frac{1}{4}\right]$$

Controllo. Dentro, $x = 0$: nella disequazione di partenza resta $3 \geq 0 \checkmark$. Fuori, $x = 1$: $-4 - 11 + 3 = -12 \geq 0$ è falsa $\checkmark$.

Il controllo si fa sulla disequazione di partenza

Dopo aver moltiplicato per -1 si hanno due disequazioni sul foglio, e sono equivalenti — hanno le stesse soluzioni. Ma se il segno l'hai sbagliato proprio lì, controllare sulla *seconda* conferma l'errore invece di scoprirlo.

Il numero di prova va sostituito nel testo **originale**. È l'unica riga del foglio di cui sei sicuro.

8 I quattro esiti che non sono un intervallo

Quando $\Delta \leq 0$ la risposta non ha la forma solita, e sono i casi in cui si sbaglia di più — non per il conto, che è finito, ma per il *significato*.

Esempio Svolto 8.1: Lo stesso trinomio, quattro versi:

$x^2 - 6x + 9$ ha $\frac{\Delta}{4} = 9 - 9 = 0$ e radice doppia $x = 3$; è il quadrato $(x - 3)^2$. Con $a = 1 > 0$ è positivo dappertutto tranne in 3.

Disequazione	Risposta	Perché
$x^2 - 6x + 9 > 0$	$x \neq 3$	è positivo ovunque, tranne dove vale zero
$x^2 - 6x + 9 \geq 0$	$S = \mathbb{R}$	adesso anche lo zero va bene
$x^2 - 6x + 9 < 0$	$S = \emptyset$	negativo non lo è mai
$x^2 - 6x + 9 \leq 0$	$x = 3$	solo il punto in cui si annulla

Quattro risposte diverse dallo stesso trinomio, e **nessuna** è un intervallo normale: una è tutta la retta meno un punto, una è tutta la retta, una è vuota, una è un punto solo.

Esempio Svolto 8.2: $2x^2 + x + 1 < 0$:

$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$: nessuna radice reale. Con $a = 2 > 0$ il trinomio è positivo per ogni x , quindi negativo non lo è mai:

$$S = \emptyset$$

Controllo. $x = 0$ dà $1 < 0$, falsa; $x = -10$ dà $200 - 10 + 1 = 191 < 0$, falsa; $x = \frac{1}{2}$ dà $2 < 0$, falsa. Non è che non ne abbiamo trovate: non ce ne sono.

 $\emptyset$ non è «zero», e $\mathbb{R}$ non è «infinito»

Due scritture da non confondere con altre due.

$S = \emptyset$ vuol dire che **nessun numero** verifica la disequazione. Non vuol dire « $x = 0$ », e non vuol dire che l'esercizio è sbagliato: è una risposta legittima, e in un problema è un'informazione (per esempio: quel guadagno non si raggiunge mai).

$S = \mathbb{R}$ vuol dire che la verificano **tutti**. Non si scrive « $x = \infty$ », che non significa niente: l'infinito non è un numero e non può essere una soluzione.

E $x \neq 3$ non è un intervallo, è tutta la retta meno un punto. Scritto con gli intervalli sarebbe $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$, che è giusto e nessuno scrive: la forma leggibile è $S = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

9 Quando gli estremi sono irrazionali

Se Δ è positivo ma non è un quadrato perfetto, le radici sono irrazionali. Non cambia niente nel metodo, e cambia una cosa nella risposta: **gli estremi restano radicali**.

Esempio Svolto 9.1: $x^2 - 2x - 1 < 0$:

$\frac{\Delta}{4} = 1 + 1 = 2 > 0$, quindi

$$x = 1 \pm \sqrt{2} \implies x_1 = 1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

Con $a > 0$ il trinomio è negativo *dentro*:

$$1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}, \quad S = (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$$

Controllo. $x = 0$ sta dentro (perché $1 - \sqrt{2} \approx -0,41$ è negativo e $1 + \sqrt{2} \approx 2,41$ è positivo): sostituendo, $-1 < 0 \checkmark$. $x = 3$ sta fuori: $9 - 6 - 1 = 2 < 0$ è falsa $\checkmark$.

Non si arrotonda a metà strada

Scrivere $-0,41 < x < 2,41$ sembra più chiaro ed è una risposta *sbagliata*: quei due numeri non sono gli estremi, sono due numeri vicini agli estremi. Il valore 2,41 starebbe dentro l'insieme vero e fuori da quello arrotondato.

La regola è la stessa dei radicali: **si tiene l'esatto fino alla fine**. L'approssimazione si usa solo per capire dove cadono gli estremi sulla retta — ed è utilissima per quello — ma si scrive fra parentesi, con il simbolo $\approx$, accanto alla risposta esatta, non al suo posto.

L'unico caso in cui si arrotonda davvero è il problema che chiede un numero intero di oggetti. E anche lì si arrotonda **una volta sola**, alla fine (par. 14).

10 Grado superiore al secondo

Una disequazione $P(x) > 0$ con P di grado tre o quattro non ha una formula sua. Si risolve **scomponendo** e studiando il segno di ogni fattore.

Metodo 10.1: Scomporre, poi il quadro dei segni:

1. Si porta tutto a primo membro: $P(x) > 0$.
2. Si **scompone** $P(x)$ in fattori di primo e secondo grado — raccoglimento, prodotti notevoli, oppure Ruffini.
3. Si studia il **segno di ogni fattore** separatamente.
4. Si compila il **quadro dei segni** e si moltiplicano i segni colonna per colonna.
5. Si prende la parte che la disequazione chiede.

Ci si ferma al secondo grado: un fattore di secondo grado non si scompone oltre, perché il suo segno si sa già studiare.

Esempio Svolto 10.1: $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 > 0$:

Scomposizione con Ruffini. Provo i divisori del termine noto. Con $x = -1$: $-1 - 2 + 13 - 10 = 0$, quindi $P(x)$ è divisibile per $x + 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & -13 & -10 \\ & & -1 & 3 & 10 \\ \hline & 1 & -3 & -10 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x + 1)(x^2 - 3x - 10)$$

Segno dei due fattori.

- $F_1 = x + 1 > 0 \implies x > -1$;
- $F_2 = x^2 - 3x - 10$: $\Delta = 9 + 40 = 49$, radici -2 e 5 ; con $a > 0$ è positivo per $x < -2 \vee x > 5$.

Quadro dei segni.

	-2	-1	5	
F_1	-	-	+	+
F_2	+	0	-	0
$F_1 \cdot F_2$	-	0	+	0

Lettura. Serve il prodotto **positivo**:

$$-2 < x < -1 \vee x > 5$$

Controllo. $x = -1,5$: $(-0,5)(2,25 + 4,5 - 10) = (-0,5)(-3,25) > 0 \checkmark$. $x = 0$: $(1)(-10) < 0$, e infatti 0 non è nella risposta $\checkmark$.

Un fattore sempre positivo si può saltare

Nel quadro dei segni, una riga fatta di soli $+$ non cambia niente: il prodotto ha lo stesso segno con o senza di lei.

Per esempio da $x^3 - 3x^2 + 2x - 720 \geq 0$, con Ruffini viene $(x - 10)(x^2 + 7x + 72) \geq 0$; il secondo fattore ha $\Delta = 49 - 288 < 0$ e $a > 0$, quindi è **sempre positivo**. Si può dividere per lui senza cambiare il verso, e resta $x - 10 \geq 0$, cioè $x \geq 10$.

Convien però *dire* che lo si sta facendo, e perché: « $x^2 + 7x + 72$ è sempre positivo ($\Delta < 0$, $a > 0$), quindi non influisce sul segno». Saltare una riga senza motivarla è indistinguibile dal dimenticarla.

11 Disequazioni fratte

Qui l'incognita compare al denominatore, e cambia una cosa sola — ma è la cosa che rende questo paragrafo il più sbagliato del capitolo.

Metodo 11.1: Quattro passi, e il primo non si salta:

1. **C.E.:** si annulla il denominatore e si escludono quei valori. *Prima* di toccare qualunque cosa.
2. **Forma normale** $\frac{N(x)}{D(x)}$ con un verso e lo zero a secondo membro: si porta tutto da una parte e si fa il denominatore comune. Non si moltiplica per il denominatore.
3. **Quadro dei segni** di numeratore e denominatore, con $\nexists$ sopra i punti che annullano D .
4. Si legge la parte richiesta, **senza mai includere** i valori esclusi dalle C.E.

Il denominatore non si toglie di mezzo

Davanti a $\frac{x-1}{x-3} > 0$ viene naturale moltiplicare tutto per $x-3$ e scrivere $x-1 > 0$.

È vietato, e il motivo è il secondo principio: moltiplicare per un numero cambia il verso se quel numero è **negativo**. Qui non si sa se $x-3$ è positivo o negativo — dipende da x , che è proprio quello che stiamo cercando. Moltiplicare vorrebbe dire scegliere il verso a caso.

La risposta sbagliata sarebbe $x > 1$; quella giusta è $x < 1 \vee x > 3$. Il numero 2 le distingue: sostituendolo nel testo di partenza dà $\frac{1}{-1} = -1 > 0$, che è **falsa** — eppure 2 starebbe nella risposta sbagliata.

Nelle *equazioni* moltiplicare per il denominatore si poteva: lì il verso non c'era, e bastava ricordarsi delle C.E. alla fine. Qui no.

Esempio Svolto 11.1: $\frac{x-x^3}{4x^2-25x+6} \leq 0$:

1. **C.E.** $4x^2 - 25x + 6 = 0$ ha $\Delta = 625 - 96 = 529 = 23^2$, quindi

$$x = \frac{25 \pm 23}{8} \implies x = \frac{1}{4} \text{ e } x = 6 \quad \text{C.E.: } x \neq \frac{1}{4}, x \neq 6$$

2. **Scomposizione dei due pezzi.**

$$N = x - x^3 = x(1 - x^2) = x(1 - x)(1 + x) \quad D = 4x^2 - 25x + 6$$

3. **Segno dei fattori.** $x > 0$ per $x > 0$; $1 - x > 0$ per $x < 1$; $1 + x > 0$ per $x > -1$; $D > 0$ per $x < \frac{1}{4} \vee x > 6$.

Quadro dei segni. Sopra $\frac{1}{4}$ e 6 va $\nexists$, non 0: lì la frazione *non esiste*.

	-1	0	$\frac{1}{4}$	1	6
N	+	0	-	0	+
D	+		+	0	-
$\frac{N}{D}$	+	0	-	0	+

4. **Lettura.** Serve la frazione **negativa o nulla**:

$$-1 \leq x \leq 0 \vee \frac{1}{4} < x \leq 1 \vee x > 6$$

Gli estremi -1 , 0 e 1 entrano (lì $N = 0$ e la frazione vale zero); $\frac{1}{4}$ e 6 **no**, mai, perché lì la frazione non esiste — e infatti accanto a loro la parentesi è tonda.

Controllo. $x = -2$: $\frac{-2+8}{16+50+6} > 0$, e -2 non è nella risposta ✓. $x = 7$: $\frac{7-343}{196-175+6} = \frac{-336}{27} < 0$, e 7 è nella risposta ✓.

Lo zero del denominatore non entra mai

Col verso largo ($\leq$ o $\geq$) si includono i punti dove la frazione vale zero, e sono quelli che annullano il **numeratore**.

Se un valore annulla il denominatore, resta fuori *comunque* — e resta fuori anche nel caso ambiguo in cui annulla tutti e due. In $\frac{x-2}{(x-2)(x+1)} \geq 0$ il valore 2 annulla numeratore e denominatore: la frazione lì non esiste, e una cosa che non esiste non può valere zero. Nella risposta 2 non c'è.

12 Sistemi di disequazioni

Un **sistema** è un insieme di disequazioni che devono essere verificate **contemporaneamente**. Si risolvono una per una, e poi si prende quello che hanno in comune.

Metodo 12.1: Risolvere, disegnare, intersecare:

1. Si risolve **ogni disequazione da sola**, e si chiamano $S_1, S_2, \dots$ i loro insiemi di soluzioni.
2. Si disegna il **quadro delle soluzioni**: una barra per ogni insieme, tutte sulla stessa retta, con gli stessi punti allineati in verticale.
3. Si prende l'**intersezione**: la zona coperta da *tutte* le barre.

Quadro dei segni e quadro delle soluzioni sono due cose diverse

Si somigliano sul foglio e non c'entrano niente l'uno con l'altro.

Nel **quadro dei segni** le righe sono i *fattori* di un prodotto, in ogni casella c'è un segno ($+$ o $-$), e alla fine i segni si **moltiplicano** con la regola dei segni.

Nel **quadro delle soluzioni** le righe sono gli *insiemi* di soluzioni, in ogni riga c'è una barra disegnata dove quella disequazione è verificata, e alla fine le barre si **intersecano**.

Chi li confonde moltiplica segni che nel sistema non esistono, oppure interseca righe di un prodotto — e in tutti e due i casi la risposta non c'entra niente col testo. Il modo di non sbagliare è guardare che cosa c'è scritto a sinistra: se sono *fattori*, si moltiplica; se sono *disequazioni*, si interseca.

Esempio Svolto 12.1: Un sistema di tre:

$$\begin{cases} x^2 - 5 < 0 \\ x^2 - 4x + 4 > 0 \\ 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

1. Una per volta.

- $x^2 - 5 < 0$: radici $\pm\sqrt{5}$, con $a > 0$ negativo dentro: $S_1 : -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$.
- $x^2 - 4x + 4 > 0$: è $(x - 2)^2$, con $\Delta = 0$: $S_2 : x \neq 2$.
- $3x + 1 \geq 0$: $S_3 : x \geq -\frac{1}{3}$.

2. Quadro delle soluzioni. I punti in gioco sono $-\sqrt{5}$, $-\frac{1}{3}$, 2 , $\sqrt{5}$, in quest'ordine ($\sqrt{5} \approx 2,24$).

3. Intersezione. Dove tutte e tre le barre sono presenti:

$$-\frac{1}{3} \leq x < 2 \vee 2 < x < \sqrt{5}$$

Il punto 2 è tolto da S_2 , e taglia in due un intervallo che altrimenti sarebbe unico.

Controllo. $x = 0$: $-5 < 0 \checkmark$, $4 > 0 \checkmark$, $1 \geq 0 \checkmark$: dentro. $x = 2$: la seconda dà $0 > 0$, falsa: fuori $\checkmark$.

Con tre righe il quadro non è più un lusso

Con due disequazioni l'intersezione si fa a mente. Con tre, no: gli estremi in gioco diventano quattro o sei, e tenerli a mente nell'ordine giusto è esattamente il modo in cui si perde un pezzo di risposta.

La regola pratica: si segnano **tutti** i punti sulla stessa verticale, in ordine crescente, e si disegna una barra per riga. La zona buona è quella dove le barre ci sono *tutte*. Se una riga è $x \neq 2$, la sua barra ha un buco — e quel buco taglia in due la risposta anche se le altre due righe non se ne accorgono.

Quando una riga è fratta

Un sistema può avere righe di tipo diverso: di primo grado, di secondo, e anche **fatte**. Il metodo non cambia — si risolve ogni riga da sola e si interseca — ma c'è una cosa in più da ricordare.

Le C.E. di una riga valgono per il sistema intero

Se una riga è $\frac{x-1}{x-3} > 0$, la condizione $x \neq 3$ non riguarda solo quella riga: riguarda **tutto il sistema**.

Il motivo è che le righe devono valere *contemporaneamente*: un valore che rende priva di senso una delle righe non può essere soluzione del sistema, anche se tutte le altre righe lo accetterebbero senza problemi.

È l'errore che si fa risolvendo la fratta per prima, scrivendo bene le sue C.E., e poi dimenticandosene quando si guarda il quadro delle soluzioni. Il rimedio è meccanico: le C.E. si scrivono **in cima al foglio**, prima del sistema, e si rileggono alla fine.

Esempio Svolto 12.2: Un sistema con una riga fratta:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x-3} > 0 \\ x^2 - 16 < 0 \end{cases}$$

C.E. Il denominatore della prima riga si annulla in $x = 3$:

$$\text{C.E.: } x \neq 3 \quad (\text{vale per tutto il sistema})$$

1. Prima riga. Quadro dei segni di $x-1$ e $x-3$: il quoziente è positivo fuori dall'intervallo dei due zeri.

$$S_1 : x < 1 \vee x > 3$$

2. Seconda riga. $x^2 - 16 < 0$ ha radici ± 4 e $a > 0$: negativo dentro.

$$S_2 : -4 < x < 4$$

3. Intersezione. I punti in gioco sono $-4, 1, 3, 4$.

$$-4 < x < 1 \vee 3 < x < 4$$

Il valore 3 è già escluso dalla prima riga, e resta escluso: se anche S_1 lo avesse contenuto, le C.E. lo toglierebbero lo stesso.

Controllo. $x = 0$ (dentro): $\frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} > 0 \checkmark$ e $-16 < 0 \checkmark$. $x = 2$ (fuori): la prima dà $\frac{1}{-1} = -1 > 0$, falsa $\checkmark$. $x = 5$: la seconda dà $9 < 0$, falsa $\checkmark$.

13 Domini

È la prima applicazione vera, e il motivo per cui questo capitolo serve al triennio: il **dominio** di un'espressione è l'insieme dei valori di x per cui l'espressione ha senso.

Formula 13.1: Le due condizioni:

- Sotto una **radice quadrata** il radicando dev'essere ≥ 0 ;
- un **denominatore** dev'essere $\neq 0$.

Se ci sono più condizioni, valgono **tutte insieme**: si mettono a sistema.

Esempio Svolto 13.1: Il dominio di $\sqrt{x^2 + 7x} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$:

Prima condizione: $x^2 + 7x \geq 0$. Radici 0 e -7 , con $a > 0$ positivo fuori: $x \leq -7 \vee x \geq 0$.

Seconda condizione: $3 - x > 0$, con il verso **stretto** perché quella radice sta al denominatore e non può valere zero: $x < 3$.

A **sistema**, cioè intersecando:

$$x \leq -7 \vee 0 \leq x < 3$$

Controllo. $x = 1$: $\sqrt{8} + \frac{1}{\sqrt{2}}$, esiste $\checkmark$. $x = -1$: sotto la prima radice verrebbe -6 , non esiste $\checkmark$. $x = 3$: il denominatore verrebbe 0, non esiste $\checkmark$.

14 Problemi

Metodo 14.1: Dal testo alla disequazione:

1. **Scegli l'incognita** e scrivi le altre quantità in funzione di essa.
2. **Poni le condizioni** subito: una lunghezza è positiva, un numero di persone è un naturale.
3. **Traduci** la richiesta in una disequazione e risolvi.
4. **Torna al problema**: fra le soluzioni tieni solo quelle accettabili, e rispondi alla domanda che è stata fatta.

Esempio Svolto 14.1: Quanti dispositivi in rete:

In una rete ogni dispositivo è collegato a tutti gli altri, e i collegamenti sono almeno 24. Qual è il numero minimo di dispositivi?

Incognita e condizioni. x = numero di dispositivi, con $x \in \mathbb{N}$ e $x \geq 2$.

Traduzione. Ogni dispositivo è collegato agli altri $x - 1$, ma così ogni collegamento è contato due volte: i collegamenti sono $\frac{x(x-1)}{2}$. Quindi

$$\frac{x(x-1)}{2} \geq 24 \implies x^2 - x - 48 \geq 0$$

Risoluzione. $\Delta = 1 + 192 = 193$, che non è un quadrato:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{193}}{2}$$

Con $a > 0$ e verso largo, la risposta è la zona esterna:

$$x \leq \frac{1 - \sqrt{193}}{2} \quad \vee \quad x \geq \frac{1 + \sqrt{193}}{2}$$

Ritorno al problema. La prima parte è negativa e si scarta ($x \in \mathbb{N}$). Resta $x \geq \frac{1+\sqrt{193}}{2}$, e solo adesso si approssima, per contare i dispositivi: $\sqrt{193} \approx 13,89$, quindi $x \geq 7,45$.

il numero minimo di dispositivi è 8

Controllo. Con 8 dispositivi i collegamenti sono $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \geq 24 \checkmark$. Con 7 sarebbero $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$, che non basta $\checkmark$.

L'approssimazione va all'ultima riga

Nel problema qui sopra l'estremo esatto è $\frac{1+\sqrt{193}}{2}$, e l'ho tenuto tale fino alla riga in cui serviva contare dei dispositivi.

Molti libri scrivono $x \geq 7,45$ già nel passaggio della formula risolutiva. Il risultato finale non cambia — qui — ma l'abitudine è rischiosa: se quell'estremo dovesse entrare in un altro conto, l'approssimazione se lo porterebbe dietro e l'errore crescerebbe senza che nessuno lo veda. Approssimare è l'*ultima* operazione, e si fa una volta sola.

15 Disequazioni parametriche

Un'ultima domanda, che è la più frequente all'esame: *per quali valori del parametro un trinomio è sempre positivo?*

Formula 15.1: Sempre positivo, sempre negativo: Il trinomio $ax^2 + bx + c$ è

- **sempre positivo** (> 0 per ogni x) se e solo se $a > 0$ e $\Delta < 0$;
- **sempre negativo** se e solo se $a < 0$ e $\Delta < 0$.

Le due condizioni valgono **insieme**: sono un sistema, non una scelta.

Esempio Svolto 15.1: Per quali k è $2x^2 + 5x + k$ sempre positivo:

Il coefficiente di x^2 è $2 > 0$, e non dipende da k : la prima condizione è già soddisfatta. Resta $\Delta < 0$:

$$\Delta = 25 - 8k < 0 \implies -8k < -25 \implies k > \frac{25}{8}$$

(il verso è cambiato perché ho diviso per -8).

Controllo. Con $k = 4 > \frac{25}{8}$: $2x^2 + 5x + 4$ ha $\Delta = 25 - 32 = -7 < 0$ e $a > 0$, sempre positivo $\checkmark$. Con $k = 3$: $\Delta = 1 > 0$, e allora il trinomio cambia segno $\checkmark$.

Esempio Svolto 15.2: Per quali k è $kx^2 + 8x - 11$ sempre negativo:

Qui k è proprio il coefficiente di x^2 , e servono due condizioni:

$$\begin{cases} k < 0 \\ \Delta = 64 + 44k < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} k < 0 \\ k < -\frac{16}{11} \end{cases}$$

Intersecando, e siccome $-\frac{16}{11} \approx -1,45$ è già negativo:

$$k < -\frac{16}{11}$$

E il caso $k = 0$? Va guardato a parte, perché lì il trinomio non è più di secondo grado: resta $8x - 11$, che è una retta e cambia segno. Quindi $k = 0$ non va bene, ed è coerente con la risposta trovata.

Il caso $k = 0$ non è un dettaglio

Quando il parametro sta davanti a x^2 , il valore che lo annulla **va discusso a parte**: con $a = 0$ l'espressione non è un trinomio di secondo grado, e tutta la teoria di questo capitolo — discriminante, regola dei segni, parabola — non si applica.

Non è un caso raro né una finezza: è il primo valore da guardare, prima ancora di calcolare Δ . E la risposta è quasi sempre che quel valore si scarta, ma bisogna *dirlo*, perché la differenza fra averlo scartato e non averlo visto non si legge dal foglio.

16 Quale strada, e quando

Formula 16.1: La mappa del capitolo:

Se il testo è...	allora...
un trinomio con un verso	forma normale con $a > 0$, Δ , e si legge la tabella
un polinomio di grado ≥ 3	si scompone (Ruffini) e si compila il quadro dei segni
una frazione	C.E. per prime, poi quadro dei segni con $\#$ sotto il denominatore
un sistema	si risolve ogni riga da sola, poi quadro delle soluzioni e intersezione
una radice o un denominatore	è un dominio : radicando ≥ 0 , denominatore $\neq 0$, e a sistema
«per quali k è sempre...»	sistema fra il segno di a e $\Delta < 0$, e si discute $k = 0$

Dove si va da qui

Tutto quello che c'è in questo capitolo torna, quasi subito.

Il **dominio** di una funzione è il paragrafo 11 applicato a un'espressione qualunque. Il **segno di una funzione**, che nello studio di funzione è uno dei primi passi, sono i paragrafi 4 e 5. La **parabola** qui è servita come strumento di lettura; in geometria analitica diventa l'oggetto di studio, con vertice, fuoco e direttrice, e i punti in cui taglia l'asse x saranno le radici che abbiamo appena imparato a trovare.

E il segno della **derivata**, che al quinto anno dice dove una funzione cresce, per moltissime funzioni è esattamente una disequazione di secondo grado.