

# FORMULARIO: VALORE ASSOLUTO

*In ogni riquadro: la regola con le sue condizioni e un esempio con i numeri.*

## 1 La definizione

### 1.1 Valore assoluto di un numero

È la **distanza dallo zero**: non è mai negativo.

$$|a| \geq 0 \quad \text{per ogni } a$$

#### ESEMPIO

$$|-7| = 7, \quad |12| = 12, \quad |0| = 0, \quad \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3}.$$

### 1.2 Definizione algebrica

$$|A| = \begin{cases} A & \text{se } A \geq 0 \\ -A & \text{se } A < 0 \end{cases}$$

Il modulo lascia com'è quello che è già positivo, e cambia segno a quello che è negativo. Il risultato è  $\geq 0$  in tutti e due i casi.

#### ESEMPIO

$-A$  non è «un numero negativo»: è l'opposto di  $A$ . Se  $A = -7$ , allora  $-A = 7$ .

### 1.3 Argomenti opposti

$$|-A| = |A|$$

Dentro le barre si possono cambiare **tutti** i segni. Conviene farlo sempre, per avere il coefficiente della  $x$  positivo prima di studiare il segno.

#### ESEMPIO

$$|-x-1| = |x+1|; \quad |-x+2| = |x-2|; \quad |-3x+6| = 3|x-2|.$$

### 1.4 Il modulo non si distribuisce

$$|A+B| \neq |A|+|B| \quad \text{in generale}$$

Prima si fa il conto **dentro**, poi si toglie il modulo.

#### ESEMPIO

$$|5 - (-2)| = |7| = 7, \quad \text{ma} \quad |5| - |-2| = 3.$$

## 2 $|A(x)| = k$ con $k$ numero

### 2.1 I tre casi su $k$

$$\begin{array}{ll} k < 0 & \text{impossibile: } S = \emptyset \\ k = 0 & \text{si toglie il modulo: } A(x) = 0 \\ k > 0 & A(x) = k \vee A(x) = -k \end{array}$$

#### ESEMPIO

La scorciatoia della terza riga vale **solo** con un numero positivo a destra: se a destra c'è la  $x$ , si va al metodo dei due casi.

### 2.2 $k > 0$ : due soluzioni

$$|A(x)| = k \implies A(x) = k \vee A(x) = -k$$

A distanza  $k$  dallo zero ci sono due numeri,  $k$  e  $-k$ .

#### ESEMPIO

$$|x - 3| = 5: \quad x - 3 = 5 \vee x - 3 = -5, \text{ quindi } S = \{-2; 8\}.$$

### 2.3 $k = 0$ : una sola

$$|A(x)| = 0 \iff A(x) = 0$$

L'unico numero di modulo nullo è lo zero: i due casi coincidono.

#### ESEMPIO

$$|5x + 10| = 0 \implies 5x + 10 = 0 \implies x = -2. \text{ Una soluzione, non due.}$$

### 2.4 $k < 0$ : nessuna

$$|A(x)| = k < 0 \implies S = \emptyset$$

Si vede **prima** di fare qualunque conto.

#### ESEMPIO

$$|2x + 4| = -1: \text{ a sinistra qualcosa di } \geq 0, \text{ a destra } -1. \text{ Non possono essere uguali.}$$

### 3 $|A(x)| = B(x)$ : i due casi

#### 3.1 Il metodo

- 1 si risolve  $A(x) \geq 0$
- 2 dove  $A \geq 0$ :  $A(x) = B(x)$
- 3 dove  $A < 0$ :  $-A(x) = B(x)$
- 4 **si controlla** che ogni soluzione stia nel suo intervallo

##### ESEMPIO

La risposta è l'**unione** di quello che sopravvive al passo 4. Il passo 4 non è un commento: è quello che decide.

#### 3.2 Il controllo di accettabilità

Una soluzione trovata nel caso  $A \geq 0$  vale **solo** se cade dove  $A \geq 0$ . Se cade fuori, l'equazione che si è risolta non era quella giusta in quel punto.

##### ESEMPIO

$|x + 2| = 2x - 1$ , secondo caso ( $x < -2$ ): esce  $x = -\frac{1}{3}$ , che non è  $< -2$ . Si scarta. Resta  $S = \{3\}$ .

#### 3.3 Un controllo veloce

Se  $|A(x)| = B(x)$  ha una soluzione, in quel punto deve essere  $B(x) \geq 0$ : un modulo non è mai negativo.

##### ESEMPIO

Trovata una soluzione, si sostituisce nel *secondo* membro: se viene negativo, è da buttare senza nemmeno guardare l'intervallo.

#### 3.4 Il meno davanti alla parentesi

$$-(x - 3) = -x + 3 \quad \text{non} \quad -x - 3$$

Cambia il segno di **tutto** quello che c'è dentro. È l'errore di calcolo più frequente del capitolo.

##### ESEMPIO

$$-(3x - 6) = -3x + 6; \quad -[-(2x - 4)] = +(2x - 4) = 2x - 4.$$

## 4 Due o più moduli

### 4.1 Il metodo degli intervalli

- 1 si studia il segno di **ogni** argomento
- 2 si segnano i punti critici sulla retta
- 3 si costruisce la tabella dei segni
- 4 in ogni intervallo si tolgono i moduli e si risolve
- 5 si tiene solo chi cade nel proprio intervallo

#### ESEMPIO

Con  $n$  punti critici distinti gli intervalli sono  $n + 1$ : due moduli danno **tre** casi, non due.

### 4.2 Convenzione dello zero

Il valore che annulla un argomento sta **sempre** con il segno  $+$ : si scrive  $A \geq 0$  e  $A < 0$ , mai il contrario.

#### ESEMPIO

Se lo zero finisce dalla parte sbagliata, gli intervalli si sovrappongono o lasciano un buco, e una soluzione può cadere in mezzo e sparire.

### 4.3 La tabella dei segni

|         | 1        | 3        |          |
|---------|----------|----------|----------|
| $x - 1$ | $-$      | $0$      | $+$      |
| $x - 3$ | $-$      | $-$      | $0$      |
|         | <b>A</b> | <b>B</b> | <b>C</b> |

#### ESEMPIO

Per  $|x - 1| + |x - 3| = 6$ . Nel caso A tutt'e due i moduli cambiano segno, in B solo il secondo, in C nessuno.

### 4.4 Un caso che dà una contraddizione

Se in un intervallo resta  $2 = 6$ , è **quel caso** a non dare soluzioni. Gli altri vanno guardati lo stesso.

#### ESEMPIO

$|x - 1| + |x - 3| = 6$ : il caso B dà  $2 = 6$ , falso; A e C danno  $-1$  e  $5$ .  $S = \{-1; 5\}$ .

### 4.5 Al massimo due — ma solo se non sono annidati

Se i moduli **non** sono uno dentro l'altro, le soluzioni sono al massimo **due**. Con gli annidati la regola *non vale*.

**ESEMPIO**

Non annidati: se ne escono tre c'è un errore, di solito un segno.

Annidati:  $||x| - 5| = 5$  ne ha **tre**  $(-10, 0, 10)$  e  $||x + 2| - 3| = 1$  ne ha **quattro**.  $|x|$  è una V, ma  $||x| - 5|$  è una W, e una retta taglia una W in quattro punti.

**4.6 Quando le soluzioni sono infinite**

Se in un caso resta un'identità ( $0 = 0$ ), tutto quell'intervallo è soluzione. Non è una terza soluzione: è un intervallo.

**ESEMPIO**

$|x| = x$ : nel caso  $x \geq 0$  resta  $0 = 0$ .  $S = [0; +\infty)$ .

**5 Fratte, annidati, letterali****5.1 Fratte con il modulo**

- 1 C.E.: ogni denominatore  $\neq 0$
- 2 si moltiplica per il m.c.m.
- 3 metodo dei casi su quello che resta
- 4 si controlla la condizione del caso e le C.E.

**ESEMPIO**

$|A| \neq 0$  equivale a  $A \neq 0$ : il modulo non cambia dove si annulla.

**5.2 Due filtri diversi**

Le C.E. vengono dal denominatore; la **condizione del caso** viene dal segno dell'argomento. Sono cose diverse e agiscono in momenti diversi.

**ESEMPIO**

In  $\frac{4}{|x+3|} = 2$ : C.E.  $x \neq -3$ ; condizione del caso  $x + 3 \geq 0$ .  $S = \{-5; -1\}$ .

**5.3 Moduli annidati**

Si scioglie sempre il modulo **più interno**: finché dentro c'è un modulo, del segno esterno non si sa niente.

**ESEMPIO**

$|x + |x - 2|| = 3x - 1$ : si parte da  $x - 2 \geq 0$ . Nel ramo  $x < 2$  l'interno diventa  $-(x - 2)$  e resta  $|2| = 3x - 1$ : il modulo esterno sparisce da solo.

#### 5.4 Sottocasi: la condizione va a sistema

La condizione del modulo esterno **non vale da sola**: si mette a sistema con il vincolo del ramo da cui si viene.

##### ESEMPIO

In  $||x + 1| - 2x| = 4$  il sottocaso  $\begin{cases} x < -1 \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases}$  è **vuoto**: quel ramo non esiste, e va scritto che non esiste.

#### 5.5 Letterali

Il primo controllo è **sempre** sul secondo membro: se è un parametro, si discute il suo segno prima di ogni conto.

##### ESEMPIO

$|x - 1| = k$ :  $k < 0$  nessuna;  $k = 0$  una ( $x = 1$ );  $k > 0$  due ( $x = 1 \pm k$ ).

#### 5.6 Il modulo come distanza

$$|x - c| = \text{distanza fra } x \text{ e } c$$

È la lettura che rende naturali i problemi.

##### ESEMPIO

«I punti che distano 5 da 3»:  $|x - 3| = 5$ , e sono due, uno per parte:  $-2$  e  $8$ .

#### A colpo d'occhio

| Come si presenta                   | Cosa si fa                                   |
|------------------------------------|----------------------------------------------|
| $ A  = k, k < 0$                   | $S = \emptyset$ , subito                     |
| $ A  = 0$                          | si toglie il modulo: $A = 0$                 |
| $ A  = k, k > 0$                   | $A = k \vee A = -k$                          |
| $ A  = B(x)$                       | due casi sul segno di $A$ , poi si controlla |
| $ A  +  B  = k$                    | tabella dei segni, tre intervalli            |
| modulo sotto una barra             | prima le C.E., poi i casi                    |
| modulo dentro un modulo            | si parte dal più interno                     |
| sottocaso di un ramo               | condizione <i>a sistema</i> col ramo         |
| tre soluzioni, moduli non annidati | è un errore: al massimo due                  |
| tre soluzioni, moduli annidati     | può essere giusto: si controllano            |
| resta $0 = 0$ in un caso           | quell'intervallo è tutto soluzione           |
| resta $0 = k$ in un caso           | quel caso non dà niente, gli altri sì        |

**Errore tipico**

Il modulo **non** è una parentesi. Da  $|x - 3| = 5$  scrivere  $x - 3 = 5$  e fermarsi perde la metà della risposta: le possibilità nascoste sono due, e vanno guardate tutte e due.