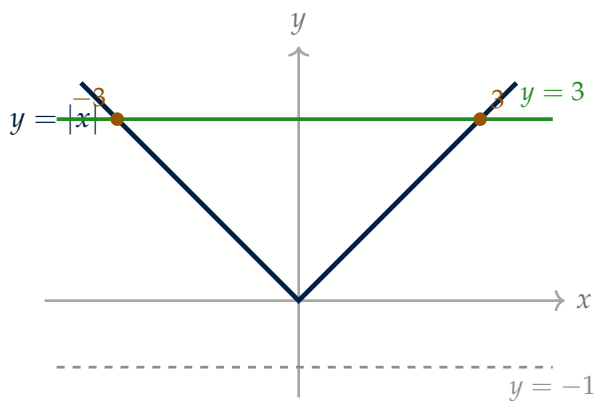


VALORE ASSOLUTO

ALGEBRA

Equazioni di primo grado: definizione, due casi,
tabella dei segni, fratte e moduli annidati



Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima di partire	3
2	La definizione algebrica, e la proprietà che fa risparmiare tempo	4
3	L'equazione $ A(x) = k$ con k numero	5
4	L'equazione $ A(x) = B(x)$: il metodo dei due casi	6
5	Due moduli: la tabella dei segni	8
6	Quante soluzioni può avere	9
7	Il modulo dentro un'equazione fratta	11
8	Il modulo dentro un altro modulo	12
9	Sottocasi annidati: la condizione va messa a sistema	13
10	Equazioni letterali con il modulo	14
11	Problemi, e come si controlla una risposta	15

1 Cosa serve prima di partire

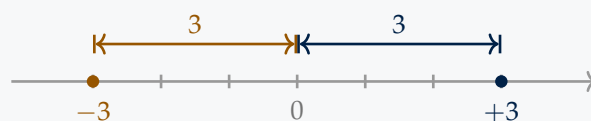
Il valore assoluto non è un'operazione nuova: è una *domanda* in più da farsi prima di togliere le barre. Quella domanda è «che segno ha quello che c'è dentro?», e la risposta cambia l'equazione.

Cosa devi già sapere

- **Il valore assoluto di un numero.** È la sua distanza dallo zero: $|+5| = 5$, $|-7| = 7$, $|0| = 0$. Una distanza non è mai negativa, quindi un valore assoluto è sempre ≥ 0 .
- **L'equazione di primo grado.** I due principi, la forma $ax = b$, e i due casi in cui l'incognita sparisce: $0 \cdot x = 0$ (ogni numero va bene) e $0 \cdot x = 5$ (nessuno).
- **La disequazione di primo grado.** $2x - 6 \geq 0$ dà $x \geq 3$; e moltiplicando per un numero **negativo** il verso si rovescia: $-x \geq -1$ diventa $x \leq 1$.
- **Gli intervalli.** $x \geq 3$ si scrive $[3; +\infty)$, e si disegna sulla retta con il pallino pieno dove l'estremo è compreso.
- **Le equazioni fratte.** Condizioni di esistenza, m.c.m., e il confronto finale: servono ai paragrafi 8 e 9.
- **Il meno davanti a una parentesi.** $-(x - 3) = -x + 3$, non $-x - 3$: cambia il segno di *tutto* quello che c'è dentro. È il passaggio che si sbaglia più spesso in tutto il capitolo.

Formula 1.1: Valore assoluto: Il **valore assoluto** (o **modulo**) di un numero è la sua distanza dallo zero sulla retta reale. Poiché una distanza non può essere negativa,

$$|a| \geq 0 \quad \text{sempre, per ogni } a$$



$+3$ e -3 sono **numeri diversi** alla **stessa distanza** da zero: per questo $|+3| = |-3| = 3$.

Esempio Svolto 1.1: Valori assoluti numerici:

$$\begin{aligned}
 &|-8| = 8 \quad |12| = 12 \quad |0| = 0 \quad \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3} \\
 &|-3| + |-4| = 3 + 4 = 7 \quad \text{ma} \quad |-3 + (-4)| = |-7| = 7 \\
 &|5| - |-2| = 5 - 2 = 3 \quad \text{mentre} \quad |5 - (-2)| = |7| = 7
 \end{aligned}$$

Le ultime due righe dicono la stessa cosa da due parti: il modulo **non** si distribuisce sulle somme. Prima si fa il conto dentro, poi si toglie il modulo.

2 La definizione algebrica, e la proprietà che fa risparmiare tempo

Formula 2.1: Definizione di modulo: In termini algebrici il modulo **lascia com'è** un numero positivo o nullo, e **cambia di segno** un numero negativo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Lo stesso vale con un'espressione al posto della lettera:

$$|A(x)| = \begin{cases} A(x) & \text{se } A(x) \geq 0 \\ -A(x) & \text{se } A(x) < 0 \end{cases}$$

« $-x$ è un numero negativo»

No: $-x$ è l'*opposto* di x , e se x è negativo il suo opposto è positivo. Per $x = -7$ si ha $-x = 7$.

È il punto in cui la definizione sembra sbagliata a chi la legge in fretta: nel secondo caso si scrive $-x$ proprio perché x è negativo, e il meno serve a farlo tornare positivo. Il risultato di un modulo resta ≥ 0 in tutti e due i casi.

Formula 2.2: Argomenti opposti hanno lo stesso modulo:

$$|-A(x)| = |A(x)|$$

Due quantità opposte stanno alla stessa distanza da zero, quindi hanno lo stesso valore assoluto. In pratica: dentro le barre si possono **cambiare tutti i segni** senza alterare niente.

Esempio Svolto 2.1: Raddrizzare il segno prima di studiarlo:

$$|-x-1| = |-(x+1)| = |x+1| \quad |-x+2| = |-(x-2)| = |x-2|$$

$$|-3x+6| = |-3(x-2)| = 3|x-2|$$

Nell'ultimo il 3 esce dalle barre perché è positivo: $|-3| = 3$.

Conviene farlo sempre, prima di studiare il segno: con il coefficiente della x positivo la disequazione $A(x) \geq 0$ si risolve senza rovesciare il verso, e un'occasione di sbagliare in meno.

Il grafico di $|x|$, e perché le soluzioni sono due

La funzione $y = |x|$ è fatta di due semirette che si incontrano nell'origine: per $x \geq 0$ è la bisettrice $y = x$, per $x < 0$ è $y = -x$. Ne viene una **V**.

Una retta orizzontale $y = k$ taglia la V in **due** punti se $k > 0$, in **uno** se $k = 0$ (il vertice), e in **nessuno** se $k < 0$, perché la V sta tutta sopra l'asse. Sono esattamente i tre casi del paragrafo 3, letti su un disegno invece che su un ragionamento — ed è il disegno in copertina.

3 L'equazione $|A(x)| = k$ con k numero

Quando a destra c'è un **numero**, non serve nessuno studio del segno: si ragiona sul numero e si risparmiano tutti i conti.

Formula 3.1: I tre casi su k :

$$\begin{array}{ll} k < 0 & \text{impossibile: } S = \emptyset \\ k = 0 & \text{si toglie il modulo: } A(x) = 0 \\ k > 0 & A(x) = k \vee A(x) = -k \end{array}$$

Il primo caso perché un modulo non è mai negativo; il secondo perché l'unico numero di modulo nullo è lo zero; il terzo perché a distanza k dallo zero ci sono **due** numeri, k e $-k$.

Esempio Svolto 3.1: $|x - 3| = 5$, in due modi:

Con la scorciatoia ($k = 5 > 0$):

$$x - 3 = 5 \vee x - 3 = -5 \implies x = 8 \vee x = -2$$

Con i due casi, che è il metodo generale del paragrafo 4:

Primo caso: $x - 3 \geq 0$, cioè $x \geq 3$

$$x - 3 = 5 \implies x = 8$$

Controllo: $8 \geq 3$? Sì. **Accettabile**

Secondo caso: $x - 3 < 0$, cioè $x < 3$

$$-(x - 3) = 5 \implies -x + 3 = 5 \implies x = -2$$

Controllo: $-2 < 3$? Sì. **Accettabile**

$$S = \{-2; 8\}$$

I due metodi danno la stessa cosa, e non è un caso: la scorciatoia è i due casi con il controllo già fatto una volta per tutte. Vale **solo** quando a destra c'è un numero positivo.

Esempio Svolto 3.2: $|2x + 4| = -1$ e $|5x + 10| = 0$:

Il **primo** si chiude senza conti: a sinistra c'è un modulo, che è ≥ 0 ; a destra c'è -1 , che è negativo. Non possono essere uguali.

$$S = \emptyset$$

Il **secondo** ha $k = 0$: l'unico modo perché un modulo sia nullo è che sia nullo l'argomento. Il modulo si toglie e basta, senza spezzare.

$$5x + 10 = 0 \implies x = -2$$

Qui la soluzione è **una sola**, non due: i due casi coinciderebbero.

Togliere il modulo come fosse una parentesi

Da $|x - 3| = 5$ scrivere direttamente $x - 3 = 5$ e fermarsi a $x = 8$ perde metà della risposta. Il modulo **non** è una parentesi: è una scrittura che nasconde *due* possibilità, e vanno guardate tutte e due.

Il controllo che salva: se il termine noto è positivo e la risposta è una sola, quasi sempre manca l'altra.

4 L'equazione $|A(x)| = B(x)$: il metodo dei due casi

Quando a destra non c'è un numero ma un'espressione con la x , la scorciatoia non vale più: bisogna studiare il segno dell'argomento.

Metodo 4.1: $|A(x)| = B(x)$ in quattro passi:

1. **Si studia il segno dell'argomento:** si risolve $A(x) \geq 0$. Questo taglia la retta in due intervalli.
2. **Primo caso**, dove $A(x) \geq 0$: il modulo si toglie *invariato* e si risolve $A(x) = B(x)$.
3. **Secondo caso**, dove $A(x) < 0$: il modulo si toglie *cambiando segno* e si risolve $-A(x) = B(x)$.
4. **Si controlla**, per ciascuna soluzione, che cada **dentro** l'intervallo del proprio caso. Quelle che non ci cadono si scartano.

La risposta è l'**unione** di quello che sopravvive.

Esempio Svolto 4.1: $|3x - 6| = 9$:**Segno dell'argomento:** $3x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.**Primo caso:** $x \geq 2$

$$3x - 6 = 9$$

$$3x = 15$$

$$x = 5$$

 $5 \geq 2$? Sì. **Accettabile****Secondo caso:** $x < 2$

$$-(3x - 6) = 9$$

$$-3x + 6 = 9$$

$$-3x = 3 \Rightarrow x = -1$$

 $-1 < 2$? Sì. **Accettabile**

$$S = \{-1; 5\}$$

Esempio Svolto 4.2: $|x + 2| = 2x - 1$: una soluzione si butta:**Segno dell'argomento:** $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$.**Primo caso:** $x \geq -2$

$$x + 2 = 2x - 1$$

$$-x = -3 \Rightarrow x = 3$$

 $3 \geq -2$? Sì. **Accettabile****Secondo caso:** $x < -2$

$$-(x + 2) = 2x - 1$$

$$-x - 2 = 2x - 1$$

$$-3x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} < -2$$
? **No.** Si scarta

$$S = \{3\}$$

Il valore $-\frac{1}{3}$ è calcolato benissimo: solo, è stato trovato risolvendo l'equazione *del secondo caso*, e vale soltanto se sta nel secondo caso. Non ci sta, e quindi non risolve niente. Provare a sostituirlo nell'equazione di partenza lo conferma: $|\frac{-1}{3} + 2| = \frac{5}{3}$, mentre $2(\frac{-1}{3}) - 1 = -\frac{5}{3}$.

Non controllare la condizione del caso

È l'errore che produce «tre soluzioni» a un'equazione di primo grado.

Ogni valore trovato vale **solo dentro l'intervallo in cui è stato cercato**: fuori di lì l'equazione che si è risolta non era quella giusta, perché il modulo si toglieva nell'altro modo.

Una scorciatoia che serve spesso

Se $|A(x)| = B(x)$ e una soluzione esiste, allora $B(x) \geq 0$ in quel punto: un modulo non è mai negativo, quindi non può essere uguale a qualcosa di negativo.

Si può usare come **controllo veloce**: trovata una soluzione, si guarda se il secondo membro viene ≥ 0 . Se viene negativo, la soluzione è da buttare e non serve nemmeno controllare l'intervallo.

5 Due moduli: la tabella dei segni

Con più di un modulo la scissione in due casi non basta: ogni argomento ha il suo segno, e i punti in cui i segni cambiano tagliano la retta in più intervalli.

Metodo 5.1: Il metodo degli intervalli:

1. Si studia il segno di **ogni** argomento: $A(x) \geq 0, B(x) \geq 0$.
2. Si segnano sulla retta i **punti critici**, cioè i valori che annullano gli argomenti. Con due argomenti sono due punti, e tagliano la retta in **tre** intervalli.
3. Si costruisce la **tabella dei segni**: una riga per argomento, una colonna per intervallo.
4. In ogni intervallo si tolgono i moduli *secondo il segno che hanno lì*, e si risolve l'equazione che resta.
5. Si tiene ogni soluzione solo se cade nel **proprio** intervallo. La risposta è l'unione.

Formula 5.1: Convenzioni della tabella:

- Il valore che annulla un argomento si mette **sempre** nell'intervallo dove l'argomento è positivo: si scrive $A \geq 0$ e $A < 0$, mai il contrario. È una convenzione, ma va seguita sempre, se no gli intervalli si sovrappongono o lasciano un buco.
- Nel disegno la parte **positiva** è una linea continua, quella **negativa** è tratteggiata, e lo zero è un pallino.

Esempio Svolto 5.1: $|x - 1| + |x - 3| = 6$:

1. Segni. $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$; $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$.

2. Tabella.

	1	3	
$x - 1$	-	0	+
$x - 3$	-	-	0
	A	B	C

3. I tre casi.

A: $x < 1$

$$\begin{aligned} -(x - 1) - (x - 3) &= 6 \\ -x + 1 - x + 3 &= 6 \\ -2x + 4 &= 6 \\ x &= -1 \\ -1 < 1? &\text{ Si. Ok} \end{aligned}$$

B: $1 \leq x < 3$

$$\begin{aligned} (x - 1) - (x - 3) &= 6 \\ x - 1 - x + 3 &= 6 \\ 2 &= 6 \\ \text{falso} & \\ \text{nessuna soluzione} & \end{aligned}$$

C: $x \geq 3$

$$\begin{aligned} (x - 1) + (x - 3) &= 6 \\ x - 1 + x - 3 &= 6 \\ 2x - 4 &= 6 \\ x &= 5 \\ 5 \geq 3? &\text{ Si. Ok} \end{aligned}$$

$$S = \{-1; 5\}$$

Il caso B non dà niente, e non è un errore: in quell'intervallo i due moduli si compensano e l'equazione diventa $2 = 6$, che è falsa per *ogni* x . Vuol dire soltanto che fra 1 e 3 non ci sono soluzioni.

Esempio Svolto 5.2: $|x| - |2x - 4| = 1$:

Segni. $x \geq 0$; $2x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.

	0	2	
x	-	0	+
$2x - 4$	-	-	0
	A	B	C

A: $x < 0$

$$-x + (2x - 4) = 1$$

$$x - 4 = 1$$

$$x = 5$$

$5 < 0$? **No**

si scarta

B: $0 \leq x < 2$

$$x + (2x - 4) = 1$$

$$3x - 4 = 1$$

$$x = \frac{5}{3}$$

$\frac{5}{3} \in [0; 2)$? **Sì**

Ok

C: $x \geq 2$

$$x - (2x - 4) = 1$$

$$-x + 4 = 1$$

$$x = 3$$

$3 \geq 2$? **Sì**

Ok

$$S = \left\{ \frac{5}{3}; 3 \right\}$$

Attenzione al segno del secondo modulo: nel caso A l'argomento $2x - 4$ è *negativo*, quindi $|2x - 4| = -(2x - 4)$, e davanti c'è già un meno. Due meno fanno più: $-[-(2x - 4)] = +(2x - 4)$.

Spezzare in due invece che in tre

Due moduli danno due punti critici, e due punti tagliano la retta in **tre** pezzi, non in due. Chi ne considera due si perde un intervallo intero — di solito quello di mezzo, che è proprio il più interessante.

Regola: con n punti critici distinti gli intervalli sono $n + 1$.

6 Quante soluzioni può avere

Formula 6.1: Al massimo due — se i moduli non sono annidati: Se i valori assoluti **non sono uno dentro l'altro**, un'equazione di primo grado ne ha al massimo **due**. Con i moduli **annidati** la regola *non vale*: se ne possono avere tre, quattro o più.

Applicare il «massimo due» agli annidati

È un errore che si fa proprio perché la regola è comoda, e si trova scritta quasi ovunque senza la sua condizione. Chi risolve $||x + 2| - 3| = 1$, trova quattro valori e ne butta due «perché non possono essere più di due», sta buttando soluzioni buone: sono giuste tutte e quattro.

La condizione è: **moduli non annidati**. Appena c'è una barra dentro un'altra barra, si controllano le soluzioni una per una e non si contano.

Perché due, e perché con gli annidamenti no

In ogni intervallo l'equazione diventa di primo grado *normale*, quindi dà al massimo una soluzione. Il punto è quanti intervalli possano darne una davvero.

Senza annidamenti il primo membro è una **spezzata** la cui pendenza cambia soltanto nei punti critici, e gira al massimo una volta: sale e poi scende, oppure scende e poi sale. Una retta orizzontale la taglia al massimo in due punti — è la V del disegno in copertina.

Con un modulo dentro un altro il grafico gira **più volte**. Il caso più semplice: $|x|$ è una **V**, ma $||x| - 5|$ è una **W**, e una retta orizzontale taglia una W anche in quattro punti.

$$||x| - 5| = 5 \implies |x| - 5 = 5 \vee |x| - 5 = -5 \implies |x| = 10 \vee |x| = 0$$

da cui $x = -10$, $x = 0$, $x = 10$: **tre** soluzioni, tutte giuste. E $||x + 2| - 3| = 1$ ne ha addirittura **quattro**: $-6, -4, 0, 2$.

Come si usa. Sui casi dei paragrafi 3, 4 e 5 — i moduli «normali», non annidati — se escono tre soluzioni c'è un errore: nove volte su dieci un segno sbagliato sciogliendo una parentesi, o un controllo di accettabilità saltato. Sui casi dei paragrafi 9 e 10, invece, *contarle non serve*: vanno controllate una per una.

Esempio Svolto 6.1: Un caso che dà infinite soluzioni:

$$|x| = x$$

Primo caso ($x \geq 0$): $x = x$, cioè $0 = 0$: vera per *ogni* x dell'intervallo. Tutto $[0; +\infty)$ è soluzione.

Secondo caso ($x < 0$): $-x = x$, cioè $x = 0$; ma $0 < 0$ è falso, quindi si scarta.

$$S = [0; +\infty)$$

Non è una terza soluzione: è un *intervallo* di soluzioni, e viene da un caso in cui è rimasta un'identità. Succede quando i due membri coincidono su tutto un tratto.

«Impossibile in un caso» non è «impossibile»

Se in un intervallo resta $2 = 6$, è *quel caso* a non dare soluzioni. Gli altri vanno guardati lo stesso, e spesso danno la risposta.

L'equazione è impossibile solo se **tutti** i casi lo sono.

7 Il modulo dentro un'equazione fratta

Quando compare una barra di frazione si aggiunge un filtro: le **condizioni di esistenza**. Sono un'altra cosa dalla condizione del caso, e vanno tenute separate.

Metodo 7.1: Fratte con il modulo:

1. **C.E.:** si pone ogni denominatore diverso da zero. Se il denominatore è un modulo, $|A| \neq 0$ equivale a $A \neq 0$.
2. Si moltiplica per il m.c.m. e si arriva a un'equazione con i moduli ma senza barre.
3. Si procede col metodo dei casi.
4. Alla fine si controlla **due volte**: la condizione del caso *e* le C.E.

Esempio Svolto 7.1: $\frac{|x-1|}{x} = 2$ — il modulo al numeratore:

C.E. $x \neq 0$. **Segno:** $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$.

Primo caso: $x \geq 1$

$$x - 1 = 2x$$

$$-x = 1 \Rightarrow x = -1$$

$-1 \geq 1$? **No:** si scarta

Secondo caso: $x < 1$ (e $x \neq 0$)

$$-(x - 1) = 2x$$

$$-x + 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3} < 1$ e $\frac{1}{3} \neq 0$? Sì. **Ok**

$$S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

Esempio Svolto 7.2: $\frac{4}{|x+3|} = 2$ — il modulo al denominatore:

C.E. $|x+3| \neq 0$, cioè $x \neq -3$.

Il m.c.m. è $|x+3|$; moltiplicando (lecito, per le C.E.):

$$4 = 2|x+3| \implies |x+3| = 2$$

Ora è un'equazione del paragrafo 3, con $k = 2 > 0$:

$$x+3 = 2 \vee x+3 = -2 \implies x = -1 \vee x = -5$$

Tutt'e due rispettano $x \neq -3$.

$$S = \{-5; -1\}$$

La C.E. si scrive sul denominatore, modulo compreso

In $\frac{4}{|x+3|}$ la condizione non è « $x+3 \geq 0$ »: quella è la condizione del *caso*, e serve dopo. La C.E. è $|x+3| \neq 0$, cioè $x \neq -3$, e nasce dal fatto che il denominatore non può annullarsi.

Sono due filtri diversi che agiscono in momenti diversi. Confonderli fa perdere una soluzione buona o accettarne una vietata.

Esempio Svolto 7.3: $\frac{2}{|x-2|} = \frac{1}{x+1}$ — due denominatori:

C.E. $x \neq 2$ e $x \neq -1$. **Segno:** $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.

Il m.c.m. è $|x-2|(x+1)$; moltiplicando:

$$2(x+1) = |x-2| \implies |x-2| = 2x+2$$

Primo caso: $x \geq 2$

$$x-2 = 2x+2$$

$$-x = 4 \Rightarrow x = -4$$

$-4 \geq 2$? **No:** si scarta

Secondo caso: $x < 2$

$$-(x-2) = 2x+2$$

$$-x+2 = 2x+2 \Rightarrow x = 0$$

$0 < 2$, $0 \neq 2$, $0 \neq -1$? **Sì. Ok**

$$S = \{0\}$$

Il caso $x \geq 2$ non è escluso dalle C.E.: è la soluzione che ne esce a cadere fuori dall'intervallo. Sono due motivi diversi di scartare, e vanno detti tutti e due.

8 Il modulo dentro un altro modulo

Un modulo può contenerne un altro: $|x + |x-2||$. Si scioglie **sempre partendo da dentro**, perché finché l'argomento esterno contiene un modulo non si sa nemmeno che segno abbia.

Metodo 8.1: Moduli annidati:

1. Si individua il modulo **più interno**, quello il cui argomento non contiene altri moduli.
2. Si studia il segno di quell'argomento e si spezza in due rami.
3. In ogni ramo l'argomento esterno diventa un'espressione normale: **si semplifica**, e a volte il modulo esterno sparisce da solo.

4. Si continua con il metodo dei casi su quello che resta, *trascinandosi dietro* il vincolo del ramo.

Esempio Svolto 8.1: $|x + |x - 2|| = 3x - 1$:

Modulo interno: $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.

Ramo 1 ($x \geq 2$): l'interno resta com'è.

$$|x + (x - 2)| = 3x - 1 \implies |2x - 2| = 3x - 1$$

In questo ramo $x \geq 2$, quindi $2x - 2 \geq 2 > 0$: il modulo si toglie direttamente.

$$2x - 2 = 3x - 1 \implies -x = 1 \implies x = -1$$

Controllo: $-1 \geq 2$? **No**, si scarta.

Ramo 2 ($x < 2$): l'interno cambia segno.

$$|x - (x - 2)| = 3x - 1 \implies |2| = 3x - 1$$

Il modulo di un numero positivo è il numero:

$$2 = 3x - 1 \implies 3x = 3 \implies x = 1$$

Controllo: $1 < 2$? Sì. **Accettabile.**

$$S = \{1\}$$

Nel ramo 2 il modulo esterno è sparito da solo: dentro non c'era più nessuna x . È il motivo per cui conviene semplificare *prima* di spezzare di nuovo.

Partire dal modulo esterno

Non si può. Per togliere $|x + |x - 2||$ bisogna sapere che segno ha $x + |x - 2|$, e finché dentro c'è un modulo quel segno non si sa studiare.

Si parte sempre dall'argomento **più profondo**: è l'unico che sia un'espressione normale, e quindi l'unico di cui si possa studiare il segno.

9 Sottocasi annidati: la condizione va messa a sistema

A volte, sciolto il modulo interno, il modulo esterno resta e va spezzato a sua volta. Allora la sua condizione **non vale da sola**: va messa a sistema con il vincolo del ramo da cui si viene.

Esempio Svolto 9.1: $||x + 1| - 2x| = 4$:

Modulo interno: $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$.

Prima ramificazione:

$$\text{ramo 1 } (x \geq -1) : |(x + 1) - 2x| = 4 \Rightarrow |-x + 1| = 4$$

$$\text{ramo 2 } (x < -1) : |-(x + 1) - 2x| = 4 \Rightarrow |-3x - 1| = 4$$

Seconda ramificazione. Ogni condizione del modulo esterno si mette **a sistema** con il vincolo del suo ramo.

1a

$$-x + 1 \geq 0$$

$$x \leq 1$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$-x + 1 = 4$$

$$x = -3$$

$$-3 \in [-1; 1]? \text{ No}$$

si scarta

1b

$$-x + 1 < 0$$

$$x > 1$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$x > 1$$

$$x - 1 = 4$$

$$x = 5$$

$$5 > 1? \text{ Sì}$$

Ok

2a

$$-3x - 1 \geq 0$$

$$x \leq -\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x < -1 \\ x \leq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x < -1$$

$$-3x - 1 = 4$$

$$x = -\frac{5}{3}$$

$$-\frac{5}{3} < -1? \text{ Sì}$$

Ok

2b

$$-3x - 1 < 0$$

$$x > -\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x < -1 \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases}$$

vuoto

$$—$$

$$—$$

$$—$$

$$—$$

$$S = \left\{ -\frac{5}{3}; 5 \right\}$$

Dimenticare il vincolo del ramo

Nel sottocaso 1a la condizione del modulo esterno è $x \leq 1$. Da sola accetterebbe anche $x = -3$, e infatti $x = -3$ esce dai conti. Ma il ramo da cui si viene imponeva $x \geq -1$, e messe a sistema le due condizioni danno $-1 \leq x \leq 1$: -3 non c'è.

Il sottocaso 2b mostra la stessa cosa all'estremo: $x < -1$ e $x > -\frac{1}{3}$ insieme non lasciano **niente**. Quel sottocaso non esiste, e va scritto che non esiste — non fatto sparire.

10 Equazioni letterali con il modulo

Con un parametro al posto di un numero, la domanda diventa: *per quali valori del parametro l'equazione ha soluzioni, e quante?*

Esempio Svolto 10.1: $|x - a| = 3$ **discussa:**

Il secondo membro è $3 > 0$, quindi vale sempre la scorciatoia:

$$x - a = 3 \vee x - a = -3 \implies x = a + 3 \vee x = a - 3$$

Le due soluzioni sono **sempre** distinte, perché $a + 3 \neq a - 3$ per ogni a : la distanza fra loro è 6, e non dipende dal parametro.

$$S = \{a - 3; a + 3\} \quad \text{per ogni } a$$

Esempio Svolto 10.2: $|x - 1| = k$ discussa:

Qui il parametro è a destra, ed è lui a decidere.

- $k < 0$: **impossibile**, $S = \emptyset$.
- $k = 0$: una sola soluzione, $x = 1$.
- $k > 0$: due soluzioni, $x = 1 + k$ e $x = 1 - k$.

Sono i tre casi del paragrafo 3, scritti una volta per tutte. Sul grafico: la retta $y = k$ taglia la V in nessun punto, nel vertice, o in due punti.

Discutere il parametro dimenticando il segno del modulo

In $|A(x)| = k$ il primo controllo è **sempre** su k , e viene prima di qualunque conto. Mettersi a spezzare in casi quando k è negativo è lavoro buttato: la risposta era già scritta.

11 Problemi, e come si controlla una risposta

Formula 11.1: Il modulo come distanza:

$$|x - c| = \text{distanza fra } x \text{ e } c$$

È la lettura che rende naturali i problemi: «i punti che distano 5 da 3» si scrive $|x - 3| = 5$, e sono due, uno per parte.

Esempio Svolto 11.1: Un problema di tolleranza:

Un pezzo meccanico deve misurare 20 mm, con una tolleranza di 0,3 mm. Quali sono le misure *limite*, cioè quelle che stanno esattamente al bordo di quanto è ammesso?

La distanza fra la misura x e il valore nominale 20 deve essere esattamente 0,3:

$$|x - 20| = 0,3$$

$$x - 20 = 0,3 \vee x - 20 = -0,3 \implies x = \mathbf{20,3} \vee x = \mathbf{19,7}$$

Le misure ammesse stanno *fra* questi due valori; l'equazione dà i bordi, e per l'intervallo servirebbe una disequazione.

Metodo 11.1: Come si controlla una risposta:

1. **Contarle:** se sono più di due, c'è un errore.
2. **Sostituire nell'equazione di partenza**, con le barre, e fare i conti dentro il modulo *prima* di toglierlo.
3. **Rileggere le condizioni:** ogni soluzione deve stare nel suo intervallo, e rispettare le C.E. se c'erano frazioni.

Il punto 2 è quello che vale: non dipende da come si è spezzato, quindi trova anche gli errori fatti nello spezzare.

Dove si va da qui

Il passo successivo sono le **disequazioni** con il valore assoluto: $|A| < k$ diventa $-k < A < k$, e $|A| > k$ diventa $A < -k \vee A > k$. Il metodo non cambia — si studia il segno e si spezza in casi — ma la risposta è un intervallo invece di un elenco di numeri.

Quello che resta identico è l'ultimo passo: una soluzione trovata in un caso vale solo dentro quel caso.

Indice analitico

argomenti opposti, 4

definizione di modulo, 4

distanza, 15

equazione fratta con modulo, 11

equazione letterale, 14

metodo dei due casi, 6

moduli annidati, 12

modulo, 3

numero di soluzioni, 9

punti critici, 8

sottocasi annidati, 13

tabella dei segni, 8

tre casi su k , 5

valore assoluto, 3