

FORMULARIO: DISEQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

In ogni riquadro: la regola con le sue condizioni e un esempio con i numeri.

1 Da dove si parte

1.1 Il fatto che regge tutto

$$|A| \geq 0 \quad \text{sempre, per ogni } A$$

Da qui discendono i casi particolari, il quadrato fra due moduli e il «fattore sempre positivo» delle fratte.

ESEMPIO

Non serve sapere quanto vale $|3x - 7|$ per sapere che non è negativo.

1.2 La risposta è un INSIEME

$$S = (-1; 5) \quad S = (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$$

$$S = \emptyset \quad S = \mathbb{R} \quad S = \{4\}$$

Il separatore è il **punto e virgola**: la virgola serve ai decimali.

ESEMPIO

$-1 < x < 5$ è la disequazione risolta; $S = (-1; 5)$ è la risposta. Nelle equazioni si scrivevano dei numeri, qui degli intervalli.

1.3 Unione o intersezione: come si decide

- **una** disequazione spezzata in casi $\rightarrow$ i casi sono alternativi $\rightarrow$ si **uniscono**
- **più** disequazioni chieste insieme (sistema) $\rightarrow$ si **intersecano**

ESEMPIO

Scambiarle dà quasi sempre il **complementare** della risposta: un insieme dall'aria giusta e dal contenuto rovesciato.

2 Modulo isolato, termine noto positivo

2.1 Verso minore: una fascia

$$|A(x)| < k \iff -k < A(x) < k \quad (k > 0)$$

Con $\leq$ le parentesi si chiudono.

ESEMPIO

$$|2x - 4| < 6 \Rightarrow -6 < 2x - 4 < 6 \Rightarrow -2 < 2x < 10$$

$$S = (-1; 5)$$

2.2 Verso maggiore: due pezzi

$$|A(x)| > k \iff A(x) < -k \vee A(x) > k \quad (k > 0)$$

ESEMPIO

$$|2x + 1| \geq 5 \Rightarrow 2x + 1 \leq -5 \vee 2x + 1 \geq 5$$

$$S = (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$$

2.3 Il verso maggiore scritto a fascia

$k < A < -k$ è un intervallo **alla rovescia**: l'estremo sinistro supera il destro, quindi è sempre vuoto.

ESEMPIO

«Maggiore» vuol dire *lontano dallo zero*: due tratti che se ne vanno verso l'infinito, e una fascia sola non li descrive.

3 Termine noto non positivo: si ragiona**3.1 I sei casi**

$ A < k, k < 0$	$S = \emptyset$
$ A > k, k < 0$	$S = \mathbb{R}$
$ A < 0$	$S = \emptyset$
$ A \leq 0$	si risolve $A = 0$
$ A \geq 0$	$S = \mathbb{R}$
$ A > 0$	tutto tranne gli zeri di A

ESEMPIO

$$|3x - 2| < -4 \rightarrow \emptyset; \quad |x + 5| > -2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad |2x - 8| \leq 0 \rightarrow \{4\}.$$

3.2 Le regole pratiche fuori dal loro caso

Valgono **solo** per $k > 0$. Con $k \leq 0$ non sono meno comode: sono false.

ESEMPIO

Prima di scrivere qualsiasi cosa: **guarda il segno del secondo membro**. Se non è positivo, l'esercizio si risolve a parole.

4 Il metodo generale

4.1 Due sistemi, poi l'unione

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) \geq B \end{cases} \quad \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) \geq B \end{cases}$$

$$S = S_1 \cup S_2$$

Dentro la graffa si interseca, fra le graffe si unisce.

ESEMPIO

Vale **sempre**, qualunque sia il secondo membro: è l'unico metodo che non ha condizioni d'uso.

4.2 Un caso vuoto non è un errore

Se un sistema dà $\emptyset$, vuol dire che in quell'intervallo la disequazione non è mai vera. Si scrive e si va avanti.

ESEMPIO

$|x - 3| \geq 2x + 1$: il caso $x \geq 3$ è vuoto, e la risposta viene tutta dall'altro. $S = (-\infty; \frac{2}{3}]$

4.3 Incognita a secondo membro

$$|A| < B \iff \begin{cases} A < B \\ A > -B \end{cases} \quad |A| > B \iff A < -B \vee A > B$$

ESEMPIO

Le regole della distanza **non** si possono usare: il segno di $B(x)$ cambia al variare di x . Queste due invece ricopiano i due sistemi, e valgono.

5 Due moduli

5.1 Il quadrato

$$|A| \geq |B| \iff A^2 \geq B^2$$

Lecito perché i due membri sono entrambi ≥ 0 , e perché $|A|^2 = A^2$.

ESEMPIO

$|x - 2| < |x + 3| \Rightarrow x^2 - 4x + 4 < x^2 + 6x + 9 \Rightarrow -10x < 5$
 $S = (-\frac{1}{2}; +\infty)$ (diviso per -10 : il verso si rovescia)

5.2 Quando il quadrato NON si può usare

Con termini fuori dai moduli, $|A| \geq |B| + C(x)$, elevando esce

$$A^2 \geq B^2 + 2|B|C + C^2$$

e il modulo è ancora lì. Si passa alla tabella dei segni.

ESEMPIO

Il quadrato serve solo quando da una parte e dall'altra c'è un modulo **e basta**.

5.3 Tabella dei segni: quanti tratti

Con n moduli i punti critici sono al più n , e i tratti al più $n + 1$.

ESEMPIO

Due moduli $\rightarrow$ **tre** sistemi. Contarli prima è il modo più semplice di accorgersi se se n'è perso uno.

$$|x - 1| \leq |x + 2| - x \quad \text{dà} \quad S = (-\infty; -3] \cup [-1; 3].$$

6 Fratte

6.1 Modulo isolato: fattore sempre positivo

$|A(x)| > 0$ dappertutto tranne dove $A(x) = 0$. Nella tabella è una riga di $+$ con un buco in un punto.

ESEMPIO

$$\frac{|x - 1|}{|x + 3|} \leq 0: \text{ la frazione è sempre } \geq 0, \text{ quindi resta solo dove si annulla. } S = \{1\}$$

6.2 Modulo misto: due sistemi, fratta dentro

Si scioglie il modulo sul segno del suo argomento, e dentro ogni caso si risolve una disequazione **fratta** con la sua tabella.

ESEMPIO

$$\frac{|x - 1| - 2}{x} \geq 0 \quad \text{dà} \quad S = [-1; 0) \cup [3; +\infty).$$

6.3 Il denominatore esce sempre

Il valore che annulla il denominatore non entra mai nell'insieme, nemmeno con $\leq$ o $\geq$: lì la frazione non esiste.

ESEMPIO

Non è una soluzione «al limite»: è un punto in cui l'espressione non ha senso.

6.4 Il verso della fratta interna

$\frac{N}{D} \geq 0$ dove N e D hanno lo **stesso** segno; ≤ 0 dove li hanno **opposti**.

ESEMPIO

$\frac{x-3}{x} \geq 0 \Rightarrow x < 0 \vee x \geq 3$. Chi scrive $0 < x \leq 3$ ha risolto ≤ 0 e ottiene il complementare.

7 Sistemi

7.1 Si risolve ognuna, poi si interseca

$$\begin{cases} |x-1| < 4 \\ |x+2| \geq 3 \end{cases}$$

ESEMPIO

Prima: $-3 < x < 5$. Seconda: $x \leq -5 \vee x \geq 1$.

Intersezione: $S = [1; 5)$

8 Il controllo finale

8.1 Due numeri, trenta secondi

Prendi **un numero dentro** l'insieme trovato e **uno fuori**, e sostituiscili nella disequazione *di partenza*, coi moduli ancora al loro posto.

ESEMPIO

Il primo deve renderla vera, il secondo falsa. È l'unico controllo che prende gli errori di unione/intersezione e di verso — quelli che danno un insieme dall'aria giusta e dal contenuto rovesciato.

A colpo d'occhio

Come si presenta	Cosa si fa	Poi
$ A \geq k, k > 0$	regole pratiche	—
$ A \geq k, k \leq 0$	si ragiona, non si calcola	—
$ A \geq B(x)$	due sistemi	si unisce
$ A \geq B $	quadrato	—
$ A \geq B + C(x)$	tabella dei segni, $n+1$ tratti	si unisce
modulo tutto sopra o sotto	fattore sempre positivo	—
modulo misto, in frazione	due sistemi, fratta dentro	si unisce
sistema di disequazioni	risolvi ognuna	si interseca

Chi ha capito il metodo generale può dimenticare le regole pratiche e cavarsela lo stesso. Il contrario no.