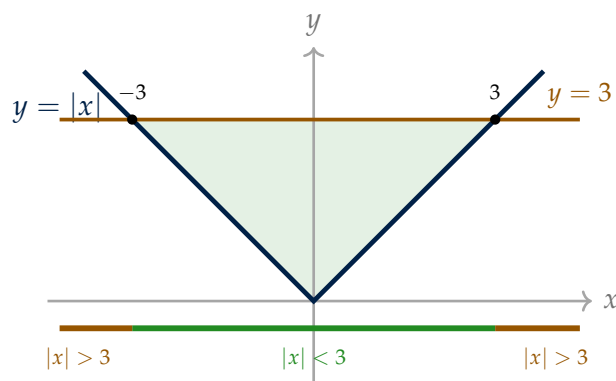


DISEQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

ALGEBRA

Primo grado: regole pratiche, metodo generale,
due moduli, fratte e sistemi



IllogicoMatematico

Teoria, metodi ed errori tipici

Indice

1	Cosa cambia rispetto alle equazioni	3
2	Le regole pratiche: $ A \geq k$ con $k > 0$	3
3	Quando il termine noto non è positivo	4
4	Il metodo generale: unione di due sistemi	5
5	Incognita a secondo membro: $ A(x) \geq B(x)$	6
6	Due moduli: si eleva al quadrato	7
7	Due moduli e termini esterni: la tabella dei segni	8
8	Fratte con il modulo isolato	9
9	Fratte miste: il modulo convive con altri termini	10
10	Sistemi di disequazioni con valore assoluto	10
11	Quale metodo conviene	11

1 Cosa cambia rispetto alle equazioni

Nell'argomento precedente $|x| = 3$ aveva **due soluzioni**: la retta $y = 3$ taglia la V in due punti. Qui $|x| < 3$ non chiede dove la V *tocca* la retta, ma dove le sta **sotto** — e la risposta non è una coppia di numeri, è un pezzo di retta reale.

Formula 1.1: La differenza in una riga:

$$|x| = 3 \implies S = \{-3; 3\} \quad |x| < 3 \implies S = (-3; 3)$$

Gli stessi due numeri: là erano la *risposta*, qui sono i **confini** della risposta.

Cosa devi già sapere

- **Il valore assoluto.** $|-7| = 7$, $|0| = 0$, e soprattutto $|A| \geq 0$ *sempre*: è il fatto da cui discende metà di questo capitolo.
- **La definizione a due rami.** $|A| = A$ se $A \geq 0$; $|A| = -A$ se $A < 0$.
- **Le equazioni con valore assoluto** (argomento 10): il metodo dei due casi e la tabella dei segni si riusano qui identici.
- **La disequazione di primo grado.** Dividendo per un numero negativo **il verso si rovescia**: $-2x < 6 \implies x > -3$.
- **Gli intervalli**, con unione e intersezione, e il disegno sulla retta. Sono la lingua in cui si scrive ogni risposta.
- **Le disequazioni fratte**: tabella dei segni di numeratore e denominatore, e il denominatore che non si annulla mai.

Come si scrive una risposta, qui

L'insieme delle soluzioni si scrive S , con gli intervalli:

$$S = (-1; 5) \quad S = (-\infty; -3] \cup [-1; 3] \quad S = \emptyset \quad S = \mathbb{R}$$

Il separatore dentro l'intervallo è il **punto e virgola**, così la virgola resta libera per i decimali. Scrivere $-1 < x < 5$ non è sbagliato, ma è la disequazione risolta: l'insieme è l'altra cosa, ed è quella che si chiede.

2 Le regole pratiche: $|A| \geq k$ con $k > 0$

Quando il modulo è isolato a primo membro e a secondo membro c'è un numero **positivo**, la disequazione si legge come una *distanza*, e si risolve senza sistemi.

Formula 2.1: Le due regole (solo per $k > 0$):

$$|A(x)| < k \iff -k < A(x) < k$$

$$|A(x)| > k \iff A(x) < -k \vee A(x) > k$$

Con $\leq$ e $\geq$ vale lo stesso, con le parentesi chiuse. **Minore** $\rightarrow$ una fascia sola, *dentro*. **Maggiore** $\rightarrow$ due pezzi staccati, *fuori*.

Esempio Svolto 2.1: $|2x - 4| < 6$:

Il verso è minore: si apre la fascia.

$$-6 < 2x - 4 < 6$$

Si somma 4 dappertutto, poi si divide per 2 (positivo: il verso resta):

$$-2 < 2x < 10 \implies -1 < x < 5$$

$$S = (-1; 5)$$

Esempio Svolto 2.2: $|2x + 1| \geq 5$:

Il verso è maggiore: due pezzi, uniti da una **o**.

$$2x + 1 \leq -5 \vee 2x + 1 \geq 5$$

$$2x \leq -6 \vee 2x \geq 4$$

$$x \leq -3 \vee x \geq 2$$

$$S = (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$$

La doppia disequazione scritta al contrario

Con il verso *maggiore* viene la tentazione di scrivere $k < A < -k$, per simmetria con l'altro caso. È un intervallo alla rovescia — l'estremo sinistro è più grande del destro — e quindi è sempre vuoto.

Il controllo che non costa niente: **disegnare**. «Maggiore» vuol dire *lontano dallo zero*, cioè due tratti che se ne vanno verso l'infinito; non si possono descrivere con una fascia sola.

3 Quando il termine noto non è positivo

Se $k \leq 0$ le regole del paragrafo precedente **non valgono**. E non servono: basta guardare la definizione, perché $|A| \geq 0$ sempre.

Metodo 3.1: I quattro casi, a ragionamento:

Disequazione	Perché	Risposta
$ A < k, k < 0$	mai < di un negativo	$S = \emptyset$
$ A > k, k < 0$	sempre > di un negativo	$S = \mathbb{R}$
$ A < 0$	mai negativo	$S = \emptyset$
$ A \leq 0$	solo dove vale zero	si risolve $A = 0$
$ A \geq 0$	sempre vero	$S = \mathbb{R}$
$ A > 0$	tranne dove vale zero	tutto tranne gli zeri di A

Esempio Svolto 3.1: I tre casi che si incontrano più spesso:

$|3x - 2| < -4$. Un valore assoluto non è mai minore di un numero negativo. $S = \emptyset$

$|x + 5| > -2$. Una quantità ≥ 0 è sempre maggiore di un negativo, e non c'è niente da calcolare. $S = \mathbb{R}$

$|2x - 8| \leq 0$. Non può essere < 0 : resta solo $= 0$. Si risolve l'equazione $2x - 8 = 0$.
 $S = \{4\}$

Mettersi a fare i conti

Davanti a $|x + 5| > -2$ la mano parte da sola: $x + 5 < 2 \vee x + 5 > -2$, e viene fuori un insieme che non c'entra niente. Il conto è inutile e sbagliato, perché applica una regola fuori dal suo caso.

Prima di scrivere qualsiasi cosa: **guardare il segno del secondo membro**. Se non è positivo, l'esercizio si risolve a parole.

4 Il metodo generale: unione di due sistemi

Le regole pratiche sono una scorciatoia. Il metodo che vale **sempre** — qualunque sia il secondo membro — è sciogliere il modulo studiando il segno del suo argomento.

Metodo 4.1: $|A(x)| \geq B$ in due casi: Si spezza la retta reale nel punto in cui $A(x)$ cambia segno, e si risolvono due sistemi:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) \geq B \end{cases} \quad \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) \geq B \end{cases}$$

Dentro ogni graffa le condizioni valgono **insieme**: si **intersecano**. I due sistemi sono in **alternativa**: le loro soluzioni si **uniscono**.

$$S = S_1 \cup S_2$$

Esempio Svolto 4.1: $|2x - 4| < 6$, di nuovo — ma col metodo generale:**1. Segno dell'argomento.** $2x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.**2. I due sistemi.**

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x - 4 < 6 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 5 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq x < 5 \\ \begin{cases} x < 2 \\ -(2x - 4) < 6 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 2 \end{aligned}$$

3. Unione.

$$S = [2; 5) \cup (-1; 2) = (-1; 5)$$

Gli intervalli si toccano in $x = 2$ e si saldano in uno solo: è lo stesso insieme trovato con la regola pratica, come dev'essere.

Perché imparare tutti e due

La regola pratica è più corta, ma vale solo per $k > 0$. Il metodo generale è più lungo, ma non ha condizioni: quando il secondo membro contiene la x , o quando i moduli sono due con altri termini attorno, è l'unico che funziona.

Chi ha capito il metodo generale può dimenticare le regole pratiche e cavarsela lo stesso. Il contrario no.

5 Incognita a secondo membro: $|A(x)| \geq B(x)$

Se a secondo membro c'è un'espressione con la x , le regole della distanza **non si possono usare**: il segno di $B(x)$ cambia al variare di x , e «distanza minore di $B(x)$ » non vuol dire niente dove $B(x)$ è negativo.

Esempio Svolto 5.1: $|x - 3| \geq 2x + 1$:**1. Segno dell'argomento.** $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$.**2. I due sistemi.**

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \geq 3 \\ x - 3 \geq 2x + 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ -x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -4 \end{cases} \Rightarrow \emptyset \\ \begin{cases} x < 3 \\ -(x - 3) \geq 2x + 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ -3x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \leq \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x \leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

3. Unione. $S = \emptyset \cup (-\infty; \frac{2}{3}] = (-\infty; \frac{2}{3}]$

Il primo sistema è vuoto, e non è un errore: vuol dire che in quel intervallo la disequazione non è mai vera.

Formula 5.1: La scorciatoia, se proprio: Esiste anche qui una versione compatta, e funziona perché ricopia i due sistemi:

$$|A| < B \iff \begin{cases} A < B \\ A > -B \end{cases} \quad |A| > B \iff A < -B \vee A > B$$

Attenzione al ruolo delle due parentesi: nel caso *minore* è un sistema (si **interseca**), nel caso *maggiore* è un'alternativa (si **unisce**). Sono le stesse due parole di sempre.

Il verso che decide unione o intersezione

È l'errore che costa più caro di tutti, perché il risultato *sembra* ragionevole: si ottiene quasi sempre il **complementare** dell'insieme giusto, cioè una risposta piena di numeri, dell'aspetto corretto, e completamente sbagliata.

Il controllo, che costa dieci secondi: prendere **un numero** dentro l'insieme trovato e sostituirlo nella disequazione di partenza. Se non la soddisfa, unione e intersezione sono scambiate.

6 Due moduli: si eleva al quadrato

Quando la disequazione è fatta **solo** di due valori assoluti, $|A(x)| \geq |B(x)|$, i moduli si tolgono in un colpo solo.

Formula 6.1: Elevamento al quadrato:

$$|A(x)| \geq |B(x)| \iff [A(x)]^2 \geq [B(x)]^2$$

Vale perché i due membri sono **entrambi** ≥ 0 : elevando al quadrato due quantità non negative il verso non cambia. E perché $|A|^2 = A^2$, quindi i moduli spariscono da soli.

Esempio Svolto 6.1: $|x - 2| < |x + 3|$:

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 &< (x + 3)^2 \\ x^2 - 4x + 4 &< x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$

I termini di secondo grado si elidono — succede sempre quando i due moduli hanno lo stesso coefficiente della x — e resta una disequazione di primo grado:

$$-10x < 5 \implies x > -\frac{1}{2}$$

(diviso per -10 : il verso si rovescia).

$$S = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

Esempio Svolto 6.2: $|x - 5| < |x - 1|$:

$$(x - 5)^2 < (x - 1)^2 \Rightarrow -10x + 25 < -2x + 1 \Rightarrow -8x < -24 \Rightarrow x > 3$$

Si legge anche senza conti: $|x - 5|$ è la distanza da 5, $|x - 1|$ quella da 1; i punti più vicini a 1 che a 5 sono quelli oltre il punto di mezzo, che è 3.

Il quadrato con i moduli spaiati

Il quadrato funziona solo se **da una parte e dall'altra** c'è un modulo e basta. Con $|A| \geq |B| + C(x)$ elevando si ottiene

$$A^2 \geq B^2 + 2|B|C + C^2$$

e il modulo è ancora lì, moltiplicato per qualcosa: l'esercizio è peggiorato, non risolto. Quel caso ha il suo paragrafo, il prossimo.

7 Due moduli e termini esterni: la tabella dei segni

Quando fuori dai moduli c'è dell'altro, l'unica strada è il **metodo degli intervalli**: si studiano i segni di tutti gli argomenti, la retta si spezza in più tratti, e si risolve un sistema per tratto.

Esempio Svolto 7.1: $|x - 1| \leq |x + 2| - x$:

1. I segni. $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$; $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$. Due punti critici, tre tratti.

	$x < -2$	$-2 \leq x < 1$	$x \geq 1$
$x - 1$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+

2. Un sistema per tratto.

$$\begin{cases} x < -2 \\ -(x - 1) \leq -(x + 2) - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \leq -3 \end{cases} \Rightarrow x \leq -3$$

$$\begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ -(x - 1) \leq (x + 2) - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 1$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1) \leq (x+2) - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

3. Unione.

$$S = (-\infty; -3] \cup [-1; 1) \cup [1; 3] = (-\infty; -3] \cup [-1; 3]$$

Il secondo e il terzo si saldano in $x = 1$; il primo resta staccato.

Quanti tratti aspettarsi

Con n moduli i punti critici sono al massimo n , e i tratti al massimo $n + 1$. Con due moduli i sistemi sono tre — non due, non quattro — e contarli prima di cominciare è il modo più semplice di accorgersi se se n'è perso uno per strada.

8 Fratte con il modulo isolato

Se un modulo occupa **tutto** il numeratore o **tutto** il denominatore, non c'è niente da sciogliere: nella tabella dei segni entra come un fattore **sempre positivo**.

Formula 8.1: Il modulo nella tabella dei segni: $|A(x)|$ è > 0 dappertutto **tranne** dove $A(x) = 0$, dove vale zero. Nella tabella è una riga di segni $+$ con un buco in un punto.

- a numeratore: quel punto **annulla** la frazione;
- a denominatore: quel punto la fa **non esistere**.

Esempio Svolto 8.1: $\frac{|x-1|}{|x+3|} \leq 0$:

Il numeratore è ≥ 0 e il denominatore è > 0 dove esiste: la frazione è **sempre positiva o nulla**. La richiesta ≤ 0 lascia quindi solo il caso «uguale a zero», cioè dove si annulla il numeratore:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Il denominatore impone $x \neq -3$, che qui non toglie niente.

$$S = \{1\}$$

Una disequazione la cui risposta è un punto solo: succede, ed è il segnale che l'esercizio si risolveva guardandolo.

Il denominatore che sparisce

Il valore che annulla il denominatore **esce sempre** dall'insieme, anche quando il verso è largo ($\leq, \geq$) e la tabella dei segni sembra volerlo tenere. Non è una soluzione «al limite»: lì la frazione non esiste.

9 Fratte miste: il modulo convive con altri termini

Se il modulo non copre tutto il numeratore o tutto il denominatore, va sciolto: si torna all'unione di due sistemi, e *dentro* ogni sistema c'è una disequazione fratta da risolvere con la sua tabella dei segni.

Esempio Svolto 9.1: $\frac{|x-1|-2}{x} \geq 0$:

1. **Segno dell'argomento.** $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$.

2. **Caso $x \geq 1$.** Il modulo si toglie com'è:

$$\frac{x-1-2}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-3}{x} \geq 0 \Rightarrow x < 0 \vee x \geq 3$$

A sistema con $x \geq 1$: **$x \geq 3$.**

3. **Caso $x < 1$.** Il modulo cambia segno:

$$\frac{-(x-1)-2}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{-x-1}{x} \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x < 0$$

A sistema con $x < 1$: **$-1 \leq x < 0$.**

4. **Unione.**

$$S = [-1; 0) \cup [3; +\infty)$$

Il verso della fratta interna

$\frac{x-3}{x} \geq 0$ è **positiva** dove numeratore e denominatore hanno lo *stesso* segno: $x < 0$ oppure $x \geq 3$. Chi scrive $0 < x \leq 3$ ha risolto ≤ 0 , cioè l'opposto — e ottiene il complementare della risposta.

Non è un errore raro: è l'errore di questo paragrafo, e si trova anche stampato. Il controllo è sempre lo stesso, e costa un conto solo: prendere un numero dell'insieme trovato — qui $x = 4$ dà $\frac{|3|-2}{4} = \frac{1}{4} \geq 0 \checkmark$ — e uno fuori.

10 Sistemi di disequazioni con valore assoluto

Un sistema chiede che le disequazioni siano vere **tutte insieme**: si risolve ognuna per conto suo, e alla fine si **interseca**.

Metodo 10.1: Tre passi:

1. Risolvi ogni disequazione, col metodo che le conviene. Ognuna dà un insieme.
2. Disegna gli insiemi uno sotto l'altro sulla stessa retta.
3. L'insieme del sistema è dove sono **tutti** presenti.

Esempio Svolto 10.1: $\begin{cases} |x - 1| < 4 \\ |x + 2| \geq 3 \end{cases} :$

Prima: $-4 < x - 1 < 4 \Rightarrow -3 < x < 5$.

Seconda: $x + 2 \leq -3 \vee x + 2 \geq 3 \Rightarrow x \leq -5 \vee x \geq 1$.

Intersezione: il primo insieme è $(-3; 5)$; il secondo è fatto di due pezzi, e solo $[1; +\infty)$ tocca il primo.

$$S = [1; 5)$$

Il sistema risolto con l'unione

Dentro un sistema si **interseca**, sempre. L'unione compare in un posto solo: fra i rami del metodo generale, che sono casi *alternativi* della stessa disequazione.

Un modo per non confonderle: l'unione nasce da *una* disequazione spezzata in casi; l'intersezione nasce da *più* disequazioni chieste insieme.

11 Quale metodo conviene**Formula 11.1: La tabella da tenere davanti:**

Che cosa vedi	Che cosa fai
$ A \geq k$, con $k > 0$	regole pratiche
$ A \geq k$, con $k \leq 0$	ragionamento, niente conti
$ A \geq B(x)$	metodo generale (due sistemi)
$ A \geq B $	quadrato
$ A \geq B + C(x)$	tabella dei segni, $n + 1$ tratti
modulo tutto sopra o tutto sotto	fattore sempre positivo
modulo misto ad altro, in frazione	due sistemi, fratta dentro
sistema di disequazioni	risolvi ognuna, poi interseca

Il controllo che vale per tutti i casi

Qualunque metodo si sia usato, alla fine si prende **un numero dentro** l'insieme trovato e **uno fuori**, e si sostituiscono nella disequazione *di partenza*, con i moduli ancora al loro posto. Il primo deve renderla vera, il secondo falsa.

Due conti, trenta secondi, e prendono l'unica famiglia di errori che altrimenti non si vede: quelli che danno un insieme dall'aria giusta e dal contenuto rovesciato.

Indice analitico

casi particolari, 4

disequazioni fratte, 10

elevamento al quadrato, 7

fattore sempre positivo, 9

incognita a secondo membro, 6

insieme delle soluzioni, 3

intersezione, 10

metodo generale, 5

punti critici, 8

quale metodo conviene, 11

regole pratiche, 3

sistema di disequazioni, 10

tabella dei segni, 8

unione, 5