

FORMULARIO: RADICALI

In ogni riquadro: la regola con le sue condizioni e un esempio con i numeri.

1 Che cos'è

1.1 Radice n -esima

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

n è l'**indice**, a il **radicando**. Con $n = 2$ l'indice non si scrive.

ESEMPIO

$$\sqrt{16} = 4, \quad \sqrt[3]{27} = 3, \quad \sqrt[5]{32} = 2.$$

1.2 Quando esiste

	indice pari	indice dispari
$a > 0$	sì, positiva	sì, positiva
$a = 0$	0	0
$a < 0$	non esiste	sì, negativa

ESEMPIO

$\sqrt[3]{-27} = -3$ esiste; $\sqrt{-16}$ no. La condizione è dell'**indice pari**, non del radicale.

1.3 $\sqrt{16}$ non è ± 4

Il simbolo di radice, con indice pari, indica la radice **non negativa**: un numero solo.

ESEMPIO

I due segni vengono dalle *equazioni*: $x^2 = 16$ ha due soluzioni, $x = \pm 4$. Ma quella è un'equazione, non un simbolo di radice.

1.4 Radicale come potenza

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (a \geq 0)$$

Da qui si ricavano **tutte** le regole del capitolo: sono le regole delle potenze lette al contrario.

ESEMPIO

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (a^{1/n})^{1/m} = a^{1/(mn)} = \sqrt[mn]{a}: \text{ecco perché gli indici si moltiplicano.}$$

2 Condizioni di esistenza

2.1 C.E. di un radicale

$$\sqrt[n]{A(x)} : \begin{cases} A(x) \geq 0 & n \text{ pari} \\ \text{sempre} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

ESEMPIO

$\sqrt{x-3}$ esiste per $x \geq 3$; $\sqrt[3]{x-3}$ esiste **sempre**; $\sqrt{3-x}$ per $x \leq 3$.

2.2 Radicale a denominatore

Sotto una barra la condizione diventa **stretta**: $A(x) > 0$.

ESEMPIO

$\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ esiste per $x > 2$, non per $x \geq 2$: in $x = 2$ la radice esiste ma il denominatore è zero.

2.3 Indice dispari non vuol dire «nessuna condizione»

Vuol dire nessuna condizione **di segno**. Denominatori e altri radicali dentro il radicando continuano a dare le loro.

ESEMPIO

$\sqrt[3]{\frac{5}{2x-4}}$: il segno non conta, ma serve $x \neq 2$.

2.4 Segno di un radicale: altra domanda, altra risposta

Dove esiste, $\sqrt[n]{A}$ è:

- ≥ 0 **sempre**, se n è pari;
- dello **stesso segno** di A , se n è dispari.

ESEMPIO

$\sqrt[8]{2-a}$: C.E. $a \leq 2$; è > 0 per $a < 2$ e $= 0$ per $a = 2$.

$\sqrt[7]{b-3}$: esiste $\forall b$, ma è < 0 per ogni $b < 3$. «Esiste sempre» **non** è una risposta sul segno.

3 Proprietà invariantiva

3.1 Il teorema

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n \cdot m]{a^{p \cdot m}} \quad a \geq 0, m, n, p \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Indice ed esponente si moltiplicano per lo **stesso** numero: il radicale non cambia valore. È la stessa idea delle frazioni equivalenti.

ESEMPIO

$$\sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{8}; \quad \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[6]{5^4} = \sqrt[6]{625}.$$

Letta al contrario è la regola che **semplifica**.

3.2 Radicando negativo: il meno esce prima

Con indice dispari e radicando negativo si porta **fuori il segno** prima di toccare l'indice: l'enunciato chiede $a \geq 0$.

ESEMPIO

$$\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} = -\sqrt[12]{2^4} = -\sqrt[12]{16}.$$

Scrivere $\sqrt[12]{(-2)^4}$ dà $+\sqrt[12]{16}$: giusto il numero, sbagliato il segno.

4 Semplificare

4.1 Le due regole, con il valore assoluto

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n \text{ pari} \\ a & n \text{ dispari} \end{cases} \quad \sqrt[n \cdot t]{a^{m \cdot t}} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^m} & t \text{ dispari} \\ \sqrt[n]{|a|^m} & t \text{ pari} \end{cases}$$

Decide il **fattore** t per cui si semplifica, non l'indice di partenza.

ESEMPIO

$$\sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5; \quad \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{|x|} \ (t = 2 \text{ pari}); \quad \sqrt[9]{x^3} = \sqrt[3]{x} \ (t = 3 \text{ dispari}).$$

4.2 Il controllo che non sbaglia mai

Prima di scrivere il risultato si prova con un **numero negativo**. Se il radicale di partenza esiste lì e il risultato non torna, mancano le barre.

ESEMPIO

$$\sqrt[6]{x^2} \text{ con } x = -8: \text{ a sinistra } \sqrt[6]{64} = 2; \quad \sqrt[3]{|-8|} = 2 \checkmark, \quad \sqrt[3]{-8} = -2 \text{ no.}$$

4.3 Radicali letterali: i due comportamenti

Indice pari: le C.E. danno già ≥ 0 , si applica diretto.

Indice dispari: se il radicando è < 0 si porta fuori il meno prima di trasformare.

ESEMPIO

$$\sqrt{x+6} \rightarrow \sqrt[6]{(x+6)^3} \text{ con } x \geq -6.$$

$$\sqrt[3]{x-1} \rightarrow -\sqrt[6]{(1-x)^2} \text{ se } x < 1.$$

4.4 $\sqrt[3]{x}$ all'indice 12: due casi

$$x \geq 0 : \sqrt[3]{x} = \sqrt[12]{x^4} \quad x < 0 : \sqrt[3]{x} = -\sqrt[12]{x^4}$$

ESEMPIO

Differiscono per il segno davanti. Alzare l'indice da dispari a pari rende il radicale non negativo per costruzione: se $\sqrt[3]{x}$ era negativo, il meno deve restare fuori.

4.5 Forma normale, in tre mosse

- 1 si scompone il radicando in fattori primi
- 2 ogni fattore con esponente $\geq n$ esce, con esponente $e \div n$
- 3 indice ed esponenti si dividono per il loro MCD

ESEMPIO

$$\sqrt{72} = \sqrt{2^3 3^2} = 6\sqrt{2}; \quad \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}; \quad \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2}.$$

4.6 $\sqrt{x^2} = |x|$

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \sqrt[3]{x^3} = x$$

Con **indice pari** il risultato dev'essere ≥ 0 , e x potrebbe non esserlo. Con indice dispari il problema non c'è.

ESEMPIO

Con $x = -3$: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$, non -3 . E semplificando l'indice: $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{|x|}$.

4.7 Minimo comune indice

Si porta ogni radicale all'indice $N = \text{m.c.m. degli indici}$:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[N]{a^{N/n}}$$

Serve per moltiplicare, dividere e **confrontare**.

ESEMPIO

$\sqrt{2} = \sqrt[6]{8}$ e $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}$, quindi $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$. Esatto, senza decimali.

4.8 Confronto con i coefficienti

Si portano i coefficienti **dentro** e si confrontano i radicandi.

ESEMPIO

$2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ e $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$, quindi $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

5 Le operazioni**5.1 Prodotto e quoziente**

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

Con indici diversi si passa prima al minimo comune indice.

ESEMPIO

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{8}\sqrt[6]{25} = \sqrt[6]{200}$.

5.2 Trasporto dentro e fuori

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \quad (a \geq 0)$$

Con indice **pari** un segno meno **resta fuori**; con indice dispari entra.

ESEMPIO

$3\sqrt{2} = \sqrt{18}$; $-3\sqrt{2} = -\sqrt{18}$, mai $\sqrt{-18}$; ma $-2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{-40}$.

5.3 Potenza e radice di radice

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Gli indici si **moltiplicano**, non si sommano.

ESEMPIO

$(\sqrt[3]{2})^4 = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[6]{7}$, non $\sqrt[5]{7}$.

5.4 Somme: solo i simili

$$a \sqrt[n]{c} + b \sqrt[n]{c} = (a + b) \sqrt[n]{c}$$

Simili = stesso indice e stesso radicando. Se non lo sono, la somma si lascia indicata: è già la risposta.

ESEMPIO

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - \sqrt{12} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$

$2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ non si semplifica.

5.5 $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

La radice **non** si distribuisce sulle somme. Si distribuisce sui prodotti e sui quozienti, e su niente altro.

ESEMPIO

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5, \quad \text{ma } \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7.$$

6 Prodotti notevoli e razionalizzazione

6.1 Somma per differenza

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

Le radici **spariscono**: è il cuore della razionalizzazione.

ESEMPIO

$(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 3$. Invece $(\sqrt{3} + 1)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$: nel quadrato il doppio prodotto resta.

6.2 Razionalizzare: i tre casi

Sotto c'è	Si moltiplica per	Resta
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	a
$\sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[n]{a^{n-m}}$	a
$\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$	$\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$	$a - b$

ESEMPIO

Sempre sopra e sotto: si moltiplica per una frazione che vale 1, quindi il numero non cambia.

6.3 I tre casi con i numeri

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \quad \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$$

ESEMPIO

Nel secondo: sotto c'è 2^1 e l'indice è 3, quindi manca 2^2 ; si moltiplica per $\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$.

6.4 Il coniugato, non il denominatore

Con $\sqrt{3}-1$ sotto si moltiplica per $\sqrt{3}+1$: il **segno in mezzo cambiato**.

ESEMPIO

Moltiplicare per $\sqrt{3}-1$ dà $(\sqrt{3}-1)^2 = 4-2\sqrt{3}$: la radice c'è ancora, e in più è comparso un doppio prodotto.

6.5 Radicali doppi

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+d}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-d}{2}} \quad d = \sqrt{a^2 - b}$$

Vale **solo** se $a^2 - b$ è un quadrato perfetto; il controllo si fa prima.

ESEMPIO

$\sqrt{5+2\sqrt{6}}$: $2\sqrt{6} = \sqrt{24}$, $25-24=1$, quindi $= \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

$\sqrt{3+\sqrt{7}}$: $9-7=2$, non è un quadrato: **non si semplifica**.

6.6 Le metà non devono essere intere

La condizione è **solo** su $a^2 - b$. Se $\frac{a \pm d}{2}$ vengono frazioni, si razionalizza e si scrive meglio.

ESEMPIO

$\sqrt{5+\sqrt{21}}$: $25-21=4$, $d=2$, quindi $\sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{14} + \sqrt{6}}{2}$.

6.7 Il coefficiente va portato dentro

La formula vuole $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ con la radice **nuda**.

ESEMPIO

In $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ non è $b=6$: si porta dentro, $2\sqrt{6} = \sqrt{24}$, e $b=24$. Con $b=6$ verrebbe $25-6=19$, e si concluderebbe «non si semplifica» su un radicale che si semplifica.

6.8 Radicale cubico doppio

- 1 $c = \sqrt[3]{a^2 - b}$, e dev'essere **razionale**
- 2 si risolve $4x^3 - 3cx - a = 0$ (Ruffini)
- 3 $y = x^2 - c$
- 4 $\sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}} = x \pm \sqrt{y}$

ESEMPIO

$\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}: 5\sqrt{2} = \sqrt{50}, c = \sqrt[3]{-1} = -1, 4x^3 + 3x - 7 = 0$ dà $x = 1, y = 1 + 1 = 2. \quad = 1 + \sqrt{2}$.
Verifica: $(1 + \sqrt{2})^3 = 7 + 5\sqrt{2} \checkmark$

7 Coefficienti irrazionali

7.1 Che cosa vuol dire

La radice sta sui **numeri**, l'incognita resta **fuori**.

$$Ax + B = Cx + D \quad A, B, C, D \text{ radicali}$$

È un'equazione di primo grado come tutte le altre.

ESEMPIO

$\sqrt{2}x + 3 = \sqrt{8}$ è di questo capitolo.

$\sqrt{x+1} = 3$ **no**: lì la x è sotto, si eleva a potenza e servono le condizioni. È un altro argomento.

7.2 Il metodo

- 1 si **semplifica** ogni radicale
- 2 x a sinistra, numeri a destra
- 3 si **raccoglie** la x
- 4 si divide e si **razionalizza**

ESEMPIO

$\sqrt{3}x + \sqrt{12} = \sqrt{27}$ diventa $\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$, cioè $\sqrt{3}x = \sqrt{3}$, quindi $x = 1$.

7.3 Il coefficiente può essere nullo senza sembrarlo

Se dopo aver raccolto resta $0 \cdot x = 0$ vale ogni x ; se resta $0 \cdot x = k \neq 0, S = \emptyset$.

ESEMPIO

$\sqrt{8} - 2\sqrt{2} = 0$: semplificare per primo (passo 1) serve anche a non farsi ingannare.

7.4 Coefficiente binomio: torna il coniugato

Quando davanti alla x c'è un binomio, la divisione finale è una razionalizzazione col coniugato.

ESEMPIO

$$(1 + \sqrt{2})x = 1 \text{ dà } x = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

7.5 Disequazioni: guarda il segno del coefficiente

$$ax > b \implies \begin{cases} x > \frac{b}{a} & a > 0 \\ x < \frac{b}{a} & a < 0 \end{cases}$$

Non è una regola nuova. La novità è che **con i radicali il segno non si vede a occhio**.

ESEMPIO

$$\sqrt{2}x > 4 \implies x > 2\sqrt{2}. \quad -\sqrt{3}x > 6 \implies x < -2\sqrt{3}: \text{ il verso si rovescia.}$$

7.6 Il caso in cui si sbaglia di più

$\sqrt{2} - \sqrt{3}$ è **negativo** ($2 < 3$): il verso si rovescia, e poi si razionalizza col coniugato.

ESEMPIO

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3})x < 1 \text{ dà } x > \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

Due segni da girare, uno dopo l'altro.

7.7 Sistemi di disequazioni

Si risolve ciascuna e si **interseca**. Per intersecare bisogna **ordinare estremi irrazionali**, e si ordinano portandoli allo stesso indice.

ESEMPIO

$$\begin{cases} \sqrt{2}x > 2 \\ x \leq \sqrt{5} \end{cases} \text{ dà } x > \sqrt{2} \text{ e } x \leq \sqrt{5}; \text{ poiché } 2 < 5, S : \sqrt{2} < x \leq \sqrt{5}.$$

7.8 Sistemi di equazioni

Stessi metodi di sempre. Con Cramer i determinanti sono prodotti e differenze fra radicali, e le divisioni finali si razionalizzano.

ESEMPIO

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 3 \\ x - y = \sqrt{2} \end{cases} \text{ dà } x = 2\sqrt{2} - 1, y = \sqrt{2} - 1.$$

La verifica qui conta doppio: $2\sqrt{2} - 1$ e $1 - 2\sqrt{2}$ si somigliano.

8 Potenze con esponente razionale

8.1 La definizione

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \geq 0) \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a > 0)$$

Denominatore dell'esponente → **indice**; numeratore → **esponente del radicando**.

ESEMPIO

$$7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{49}; \quad 9^{\frac{1}{2}} = 3; \quad \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}; \quad 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

8.2 Le cinque proprietà

$$\begin{array}{ll} a^r \cdot a^s = a^{r+s} & 3^{\frac{3}{2}} 3^{\frac{1}{2}} = 3^2 = 9 \\ a^r : a^s = a^{r-s} & 2^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} \\ (a^r)^s = a^{rs} & \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[6]{5} \\ a^r b^r = (ab)^r & 3^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6} \\ a^r : b^r = (a : b)^r & 14^{\frac{3}{5}} : 7^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{8} \end{array}$$

ESEMPIO

Sono le proprietà delle potenze di sempre: all'esponente si sommano e si moltiplicano **frazioni**.

8.3 A che serve tradurre

La proprietà invariantiva diventa la riduzione ai minimi termini:

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[nm]{a^{pm}} \iff a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{pm}{nm}}$$

ESEMPIO

$$\sqrt[3]{\sqrt{x^4}} : \sqrt[6]{x^5} = x^{\frac{2}{3} - \frac{5}{6}} = x^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}, \text{ con } x > 0. \text{ Senza ricordare una sola regola sui radicali.}$$

8.4 La base deve essere positiva, e non è pignoleria

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}, \text{ ma}$$

$$(-2)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{-8} < 0 \quad (-2)^{\frac{6}{10}} = \sqrt[10]{64} > 0$$

ESEMPIO

Due valori diversi per lo stesso esponente: per questo si richiede $a \geq 0$, e $(-5)^{\frac{1}{8}}$ non esiste.

$\sqrt[5]{-8}$ invece esiste: il **radicale** di indice dispari accetta radicandi negativi, la scrittura a esponente

frazionario no.

9 Domini e forma finale

9.1 Dominio di una funzione irrazionale

- 1 ogni radicando di indice pari ≥ 0
- 2 ogni denominatore $\neq 0$
- 3 radicale a denominatore: radicando > 0
- 4 si **intersecano** tutte

ESEMPIO

$$y = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{4-x}}: x \geq 1 \text{ e } x < 4, \text{ quindi } D = [1; 4).$$

9.2 Con una frazione sotto la radice

Serve la **regola dei segni**: il quoziente è ≥ 0 dove numeratore e denominatore hanno lo stesso segno, e il denominatore non si annulla mai.

ESEMPIO

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}: D = (-\infty; -2) \cup [1; +\infty).$$

Il -2 è escluso (annulla il denominatore), l' 1 è incluso (lì la frazione vale 0 , e $\sqrt{0}$ esiste).

9.3 Forma normale: le quattro condizioni

- 1 niente da portare fuori dal radicando
- 2 indice il più piccolo possibile
- 3 denominatore razionalizzato
- 4 radicali simili già sommati

ESEMPIO

Finché una delle quattro non è a posto, l'esercizio non è finito.

A colpo d'occhio

Come si presenta	Cosa si fa
$\sqrt{72}$	si scompone il radicando
$\sqrt[6]{4}$	si riduce l'indice col MCD
$\sqrt{x^2}$	viene $ x $, non x
indici diversi	minimo comune indice
$a\sqrt{b}$ da confrontare	si porta dentro
$(\sqrt[n]{a})^m$	l'esponente entra sul radicando
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$	gli indici si moltiplicano
somma di radicali	solo i simili, dopo aver semplificato
radice a denominatore	si razionalizza
$\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ sotto	si moltiplica per il coniugato
$\sqrt{a \pm b}$	si controlla se $a^2 - b$ è un quadrato
incognita sotto radice	si eleva, poi si controlla
$\sqrt{A} < B$	un sistema, tre condizioni
$\sqrt{A} > B$	due sistemi, in unione

Errore tipico

Il numero con la virgola non è una risposta. $\sqrt{2} \approx 1,414$ è utile come controllo di buon senso — se un conto dà $-3\sqrt{2}$ e il risultato doveva essere positivo, l'errore si vede subito — ma la risposta è $\sqrt{2}$: da 1,414 non si torna indietro, da $\sqrt{2}$ sì.