

SOLUZIONI: RADICALI

La numerazione è la stessa del file degli esercizi.

Sono svolti i **primi due esercizi di ogni blocco** — così ogni tipologia ha il suo modello — e **tutti quelli di livello ■■■■**. Dove c'è da semplificare, il primo passo è sempre la **scomposizione in fattori primi** del radicando: è il passo che chi salta paga dopo. Nelle disequazioni a coefficienti irrazionali il **segno del coefficiente** si guarda prima di dividere, e non si vede a occhio: si porta allo stesso indice e si confronta.

1. Numeri reali e radici n -esime

Esercizio 1.

→ $\sqrt{16}$ (da calcolare)

→ Cerco il numero che elevato alla 2 dà 16.

→ = **4**

Esercizio 2.

→ $\sqrt{25}$ (da calcolare)

→ Cerco il numero che elevato alla 2 dà 25.

→ = **5**

Esercizio 31.

→ $\sqrt{16}$

→ **sì, esiste.** (il radicando è ≥ 0)

Esercizio 32.

→ $\sqrt{-16}$

→ **no, non esiste nei reali.** (indice pari e radicando negativo: nessun numero reale elevato a una potenza pari dà un negativo)

Esercizio 51.

→ Ogni numero razionale è anche reale. (l'affermazione da giudicare)

→ **Vero**

→ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: i razionali sono un pezzo dei reali. (una risposta senza motivo non vale)

Esercizio 52.

→ Ogni numero reale è razionale. (l'affermazione da giudicare)

→ **Falso**

→ $\sqrt{2}$ è reale e non è razionale. (una risposta senza motivo non vale)

2. Condizioni di esistenza**Esercizio 63.**

→ $\sqrt{x-3}$ (da condizionare)

→ L'indice è **pari**: il radicando dev'essere ≥ 0 .

→ $x - 3 \geq 0$

→ $x \geq 3$

Esercizio 64.

→ $\sqrt[3]{x-3}$ (da condizionare)

→ L'indice è **dispari**: il radicando può essere negativo. (la condizione è dell'indice pari, non del radicale)

→ esiste per ogni x

Esercizio 93.

→ $\sqrt[3]{\frac{5}{2x-4}}$

→ L'indice è dispari: sul **segno** non c'è niente da imporre.

→ Ma dentro c'è una frazione, e un denominatore non si annulla mai: $2x - 4 \neq 0$. (indice dispari vuol dire nessuna condizione di segno, non nessuna condizione)

→ $x \neq 2$

Esercizio 94.

→ $\sqrt[3]{\frac{5}{x-1}}$

→ L'indice è dispari: sul **segno** non c'è niente da imporre.

→ Ma dentro c'è una frazione, e un denominatore non si annulla mai: $x - 1 \neq 0$. (indice dispari vuol dire nessuna condizione di segno, non nessuna condizione)

→ $x \neq 1$

Esercizio 103.

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

→ Due condizioni insieme: il radicando ≥ 0 perché l'indice è pari, e il denominatore $\neq 0$.

→ Le due danno il maggiore **stretto**: lo zero cade. (con il $\geq$ resterebbe dentro il valore che annulla il denominatore)

→ $x > 2$

Esercizio 104.

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+3}}$$

→ Due condizioni insieme: il radicando ≥ 0 perché l'indice è pari, e il denominatore $\neq 0$.

→ Le due danno il maggiore **stretto**: lo zero cade. (con il $\geq$ resterebbe dentro il valore che annulla il denominatore)

→ $x > -3$

Esercizio 113.

→ $\sqrt[8]{2-a}$ (due domande: dove esiste, e che segno ha)

→ Il radicando si annulla in $a = 2$. (ed è l'unico punto in cui cambia segno)

→ Indice **pari**: serve radicando ≥ 0 , cioè $a \leq 2$. (il coefficiente di a è negativo, quindi il verso si rovescia)

→ Sul segno non c'è niente da discutere: una radice di indice pari è ≥ 0 per definizione. (e si annulla solo dove si annulla il radicando)

→ > 0 per $a < 2$, $= 0$ per $a = 2$

Esercizio 114.

→ $\sqrt[7]{b-3}$ (due domande: dove esiste, e che segno ha)

→ Il radicando si annulla in $b = 3$. (ed è l'unico punto in cui cambia segno)

→ Indice **dispari**: C.E. $\forall b \in \mathbb{R}$. (nessuna condizione DI SEGNO)

→ Ma il segno segue il radicando, e i casi sono **tre**. («esiste sempre» non è una risposta sul segno: qui il radicale è negativo su metà dei valori)

→ > 0 per $b > 3$, $= 0$ per $b = 3$, < 0 per $b < 3$

3. Semplificare: forma normale e indice minimo

Esercizio 133.

→ $\sqrt{72}$ (da portare in forma normale)

→ Scompongo il radicando: $72 = 2^3 \cdot 3^2$. (è il passo che sta sotto ogni semplificazione)

→ $\sqrt{2^3 \cdot 3^2}$ (ogni fattore con esponente ≥ 2 esce, con esponente diviso 2)

→ $= 6\sqrt{2}$

Esercizio 134.

→ $\sqrt{50}$ (da portare in forma normale)

→ Scompongo il radicando: $50 = 2 \cdot 5^2$. (è il passo che sta sotto ogni semplificazione)

→ $\sqrt{2 \cdot 5^2}$ (ogni fattore con esponente ≥ 2 esce, con esponente diviso 2)

→ $= 5\sqrt{2}$

Esercizio 157.

→ $\sqrt[3]{128}$ (da portare in forma normale)

→ Scompongo il radicando: $128 = 2^7$. (è il passo che sta sotto ogni semplificazione)

→ $\sqrt[3]{2^7}$ (ogni fattore con esponente ≥ 3 esce, con esponente diviso 3)

→ $= 4\sqrt[3]{2}$

Esercizio 158.

→ $\sqrt[3]{250}$ (da portare in forma normale)

→ Scompongo il radicando: $250 = 2 \cdot 5^3$. (è il passo che sta sotto ogni semplificazione)

→ $\sqrt[3]{2 \cdot 5^3}$ (ogni fattore con esponente ≥ 3 esce, con esponente diviso 3)

→ $= 5\sqrt[3]{2}$

Esercizio 178.

→ $\sqrt[6]{4}$ (qui non c'è niente da portare fuori)

→ Scompongo: $4 = 2^2$.

→ Indice ed esponente si dividono per il loro MCD: è la proprietà invariantiva letta al contrario.

($\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n/t]{a^{p/t}}$ quando t divide tutti e due)

→ $= \sqrt[3]{2}$

Esercizio 179.

→ $\sqrt[9]{8}$ (qui non c'è niente da portare fuori)

→ Scompongo: $8 = 2^3$.

→ Indice ed esponente si dividono per il loro MCD: è la proprietà invariantiva letta al contrario.

($\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n/t]{a^{p/t}}$ quando t divide tutti e due)

→ $= \sqrt[3]{2}$

Esercizio 198.

→ $\sqrt{12}$ (da portare in forma normale)

→ Scompongo il radicando: $12 = 2^2 \cdot 3$. (è il passo che sta sotto ogni semplificazione)

→ $\sqrt{2^2 \cdot 3}$ (ogni fattore con esponente ≥ 2 esce, con esponente diviso 2)

→ $= 2\sqrt{3}$

Esercizio 199.

→ $\sqrt{18}$ (da portare in forma normale)

→ Scompongo il radicando: $18 = 2 \cdot 3^2$. (è il passo che sta sotto ogni semplificazione)

→ $\sqrt{2 \cdot 3^2}$ (ogni fattore con esponente ≥ 2 esce, con esponente diviso 2)

→ $= 3\sqrt{2}$

4. Minimo comune indice e confronto**Esercizio 216.**

→ $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{3}$ (da confrontare, senza decimali)

→ Il minimo comune indice è $\text{m.c.m.}(2, 3) = 6$. (solo a indici uguali si confrontano i radicandi)

→ $\sqrt{2} = \sqrt[6]{8}$ $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}$ (proprietà invariantiva su ciascuno)

→ $8 < 9$, quindi $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

Esercizio 217.

→ $\sqrt{3}$ e $\sqrt[4]{5}$ (da confrontare, senza decimali)

→ Il minimo comune indice è $\text{m.c.m.}(2, 4) = 4$. (solo a indici uguali si confrontano i radicandi)

→ $\sqrt{3} = \sqrt[4]{9}$ $\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5}$ (proprietà invariantiva su ciascuno)

→ $9 > 5$, quindi $\sqrt{3} > \sqrt[4]{5}$

Esercizio 236.

→ $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{5}$ (da portare allo stesso indice)

→ $\text{m.c.m.}(2, 3, 4) = 12$

→ $\sqrt[12]{729}$, $\sqrt[12]{16}$, $\sqrt[12]{125}$ (ogni esponente si moltiplica per 12 diviso l'indice vecchio)

→ In ordine crescente: $\sqrt[3]{2} < \sqrt[4]{5} < \sqrt{3}$

Esercizio 237.

→ $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{7}$ (da portare allo stesso indice)

→ $\text{m.c.m.}(2, 3, 6) = 6$

→ $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[6]{9}$, $\sqrt[6]{7}$ (ogni esponente si moltiplica per 6 diviso l'indice vecchio)

→ In ordine crescente: $\sqrt[6]{7} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

5. Moltiplicazione, divisione, trasporto dentro

Esercizio 246.

→ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

→ Stesso indice: i radicandi si moltiplicano. ($\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$)

→ $= \sqrt{16}$

→ $= 4$ (e si semplifica)

Esercizio 247.

$$\rightarrow \sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$$

$\rightarrow$ Stesso indice: i radicandi si moltiplicano. ($\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$)

$$\rightarrow = \sqrt{36}$$

$$\rightarrow = \mathbf{6} \text{ (e si semplifica)}$$

Esercizio 270.

$$\rightarrow \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$$

$\rightarrow$ Si divide come si moltiplica, e alla fine il denominatore si razionalizza. (un risultato con la radice sotto non è in forma normale)

$$\rightarrow = \mathbf{3}$$

Esercizio 271.

$$\rightarrow \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$

$\rightarrow$ Si divide come si moltiplica, e alla fine il denominatore si razionalizza. (un risultato con la radice sotto non è in forma normale)

$$\rightarrow = \sqrt{2}$$

Esercizio 290.

$$\rightarrow 3\sqrt{2} \text{ (da portare tutto sotto radice)}$$

$$\rightarrow = \sqrt{3^2 \cdot 2} \text{ (il fattore entra elevato all'indice)}$$

$$\rightarrow = \sqrt{\mathbf{18}}$$

Esercizio 291.

$$\rightarrow -3\sqrt{2} \text{ (da portare tutto sotto radice)}$$

$\rightarrow$ L'indice è **pari**: il meno **resta fuori**. (una radice di indice pari non è mai negativa, quindi $\sqrt{-18}$ non esisterebbe)

$$\rightarrow = -\sqrt{\mathbf{18}}$$

6. Potenze: del radicale, di radicale, a esponente razionale**Esercizio 314.**

$$\rightarrow (\sqrt[3]{2})^4$$

$$\rightarrow \text{L'esponente entra sul radicando: } (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$\rightarrow = \sqrt[3]{2^4}$$

$$\rightarrow = 2\sqrt[3]{2} \text{ (e si semplifica)}$$

Esercizio 315.

$$\rightarrow (\sqrt{3})^3$$

$$\rightarrow \text{L'esponente entra sul radicando: } (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$\rightarrow = \sqrt{3^3}$$

$$\rightarrow = 3\sqrt{3} \text{ (e si semplifica)}$$

Esercizio 332.

$$\rightarrow \sqrt{\sqrt[3]{7}}$$

$$\rightarrow \text{Gli indici si **moltiplicano**: } 2 \cdot 3 = 6. \text{ (con gli esponenti frazionari è } (a^{1/n})^{1/m} = a^{1/(mn)})$$

$$\rightarrow = \sqrt[6]{7}$$

$$\rightarrow = \sqrt[6]{7}$$

Esercizio 333.

$$\rightarrow \sqrt[3]{\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow \text{Gli indici si **moltiplicano**: } 3 \cdot 2 = 6. \text{ (con gli esponenti frazionari è } (a^{1/n})^{1/m} = a^{1/(mn)})$$

$$\rightarrow = \sqrt[6]{5}$$

$$\rightarrow = \sqrt[6]{5}$$

Esercizio 350.

$$\rightarrow \sqrt[3]{7^2} \text{ (da riscrivere nell'altra lingua)}$$

→ L'indice va a **denominatore**, l'esponente del radicando a **numeratore**: $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$. (e' la definizione, letta da sinistra)

→ $= 7^{\frac{2}{3}}$

Esercizio 351.

→ $\sqrt[4]{5^3}$ (da riscrivere nell'altra lingua)

→ L'indice va a **denominatore**, l'esponente del radicando a **numeratore**: $\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$. (e' la definizione, letta da sinistra)

→ $= 5^{\frac{3}{4}}$

Esercizio 370.

→ $5^{\frac{3}{4}}$ (da riscrivere nell'altra lingua)

→ Il denominatore dell'esponente diventa l'**indice**, il numeratore l'**esponente del radicando**.

→ $= \sqrt[4]{5^3}$

Esercizio 371.

→ $7^{\frac{2}{3}}$ (da riscrivere nell'altra lingua)

→ Il denominatore dell'esponente diventa l'**indice**, il numeratore l'**esponente del radicando**.

→ $= \sqrt[3]{7^2}$

Esercizio 388.

→ $9^{\frac{1}{2}}$ (da calcolare esattamente)

→ Passo al radicale: $= \sqrt{9}$ (il denominatore dell'esponente è l'indice)

→ $= 3$ (e si porta in forma normale: fattori fuori, indice minimo, denominatore razionalizzato)

Esercizio 389.

→ $16^{\frac{1}{2}}$ (da calcolare esattamente)

→ Passo al radicale: $= \sqrt{16}$ (il denominatore dell'esponente è l'indice)

→ $= 4$ (e si porta in forma normale: fattori fuori, indice minimo, denominatore razionalizzato)

Esercizio 442.

$$\rightarrow 3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \text{ (la base è la stessa)}$$

$\rightarrow$ Stessa base: gli esponenti si **sommano** col $\cdot$ e si **sottraggono** col $:$. (non è una regola dei radicali: è la prima proprietà delle potenze)

$$\rightarrow \text{All'esponente: } \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \text{ (una somma di frazioni, niente di più)}$$

$$\rightarrow = 3^2 = 9$$

Esercizio 443.

$$\rightarrow 2^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{4}} \text{ (la base è la stessa)}$$

$\rightarrow$ Stessa base: gli esponenti si **sommano** col $\cdot$ e si **sottraggono** col $:$. (non è una regola dei radicali: è la prima proprietà delle potenze)

$$\rightarrow \text{All'esponente: } \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ (una somma di frazioni, niente di più)}$$

$$\rightarrow = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

Esercizio 462.

$$\rightarrow \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (potenza di potenza)}$$

$\rightarrow$ Gli esponenti si **moltiplicano**, non si sommano. $((a^r)^s = a^{rs}$: è il motivo per cui, nella radice di radice, gli indici si moltiplicano)

$$\rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ (prodotto di frazioni)}$$

$$\rightarrow = 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{5}$$

Esercizio 463.

$$\rightarrow \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \text{ (potenza di potenza)}$$

$\rightarrow$ Gli esponenti si **moltiplicano**, non si sommano. $((a^r)^s = a^{rs}$: è il motivo per cui, nella radice di radice, gli indici si moltiplicano)

$$\rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \text{ (prodotto di frazioni)}$$

$$\rightarrow = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Esercizio 480.

$$\rightarrow 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \text{ (l'esponente è lo stesso)}$$

$\rightarrow$ **Esponente uguale:** si opera sulle **basi** e l'esponente resta. $(a^r b^r = (ab)^r$. Se gli esponenti fossero diversi questa regola NON si potrebbe usare)

$$\rightarrow = 6^{\frac{1}{3}}$$

$$\rightarrow = \sqrt[3]{6} \text{ (in forma normale)}$$

Esercizio 481.

$$\rightarrow 14^{\frac{3}{5}} : 7^{\frac{3}{5}} \text{ (l'esponente è lo stesso)}$$

$\rightarrow$ **Esponente uguale:** si opera sulle **basi** e l'esponente resta. $(a^r b^r = (ab)^r$. Se gli esponenti fossero diversi questa regola NON si potrebbe usare)

$$\rightarrow = 2^{\frac{3}{5}}$$

$$\rightarrow = \sqrt[5]{8} \text{ (in forma normale)}$$

Esercizio 498.

$$\rightarrow \left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{5}} \text{ (due proprietà in fila, e l'ordine conta)}$$

$$\rightarrow \text{Prima la parentesi: stessa base, gli esponenti si sommano. } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}\right)$$

$$\rightarrow = 2^{\frac{5}{6}} \text{ (adesso c'è una potenza sola)}$$

$$\rightarrow \text{Poi l'esponente di fuori: si moltiplica. } \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} = 1\right)$$

$$\rightarrow = 2^1 = 2 \text{ (sommare prima e moltiplicare dopo non è lo stesso che fare il contrario)}$$

Esercizio 499.

$$\rightarrow \left(3^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{1}{6}}\right)^2 \text{ (due proprietà in fila, e l'ordine conta)}$$

$$\rightarrow \text{Prima la parentesi: stessa base, gli esponenti si sommano. } \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow = 3^{\frac{1}{2}} \text{ (adesso c'è una potenza sola)}$$

$$\rightarrow \text{Poi l'esponente di fuori: si moltiplica. } \left(\frac{1}{2} \cdot 2 = 1\right)$$

$$\rightarrow = 3^1 = 3 \text{ (sommare prima e moltiplicare dopo non è lo stesso che fare il contrario)}$$

Esercizio 500.

$$\rightarrow \left(5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}}\right)^2 \text{ (due proprietà in fila, e l'ordine conta)}$$

→ **Prima** la parentesi: stessa base, gli esponenti si sommano. ($\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$)

→ $= 5^{\frac{1}{2}}$ (adesso c'è una potenza sola)

→ **Poi** l'esponente di fuori: si moltiplica. ($\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$)

→ $= 5^1 = 5$ (sommare prima e moltiplicare dopo non è lo stesso che fare il contrario)

Esercizio 501.

→ $\left(2^{\frac{3}{4}} : 2^{\frac{1}{4}}\right)^3$ (due proprietà in fila, e l'ordine conta)

→ **Prima** la parentesi: stessa base, gli esponenti si sommano. ($\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$)

→ $= 2^{\frac{1}{2}}$ (adesso c'è una potenza sola)

→ **Poi** l'esponente di fuori: si moltiplica. ($\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$)

→ $= 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$ (sommare prima e moltiplicare dopo non è lo stesso che fare il contrario)

Esercizio 502.

→ $\left(7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ (due proprietà in fila, e l'ordine conta)

→ **Prima** la parentesi: stessa base, gli esponenti si sommano. ($\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$)

→ $= 7^1$ (adesso c'è una potenza sola)

→ **Poi** l'esponente di fuori: si moltiplica. ($1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$)

→ $= 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$ (sommare prima e moltiplicare dopo non è lo stesso che fare il contrario)

Esercizio 503.

→ $\left(2^{\frac{5}{6}} : 2^{\frac{1}{3}}\right)^2$ (due proprietà in fila, e l'ordine conta)

→ **Prima** la parentesi: stessa base, gli esponenti si sommano. ($\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$)

→ $= 2^{\frac{1}{2}}$ (adesso c'è una potenza sola)

→ **Poi** l'esponente di fuori: si moltiplica. ($\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$)

→ $= 2^1 = 2$ (sommare prima e moltiplicare dopo non è lo stesso che fare il contrario)

Esercizio 504.

→ $\left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ (due proprietà in fila, e l'ordine conta)

→ **Prima** la parentesi: stessa base, gli esponenti si sommano. ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$)

$$\rightarrow = 3^1 \text{ (adesso c'è una potenza sola)}$$

$$\rightarrow \text{Poi l'esponente di fuori: si moltiplica. } (1 \cdot -1 = -1)$$

$$\rightarrow = 3^{-1} = \frac{1}{3} \text{ (sommare prima e moltiplicare dopo non è lo stesso che fare il contrario)}$$

Esercizio 505.

$$\rightarrow \left(10^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{\frac{1}{6}}\right)^2 \text{ (due proprietà in fila, e l'ordine conta)}$$

$$\rightarrow \text{Prima la parentesi: stessa base, gli esponenti si sommano. } \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow = 10^{\frac{1}{2}} \text{ (adesso c'è una potenza sola)}$$

$$\rightarrow \text{Poi l'esponente di fuori: si moltiplica. } \left(\frac{1}{2} \cdot 2 = 1\right)$$

$$\rightarrow = 10^1 = \mathbf{10} \text{ (sommare prima e moltiplicare dopo non è lo stesso che fare il contrario)}$$

Esercizio 506.

$$\rightarrow \left(2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ (due proprietà in fila, e l'ordine conta)}$$

$$\rightarrow \text{Prima la parentesi: stessa base, gli esponenti si sommano. } \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\right)$$

$$\rightarrow = 2^{\frac{3}{2}} \text{ (adesso c'è una potenza sola)}$$

$$\rightarrow \text{Poi l'esponente di fuori: si moltiplica. } \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1\right)$$

$$\rightarrow = 2^1 = \mathbf{2} \text{ (sommare prima e moltiplicare dopo non è lo stesso che fare il contrario)}$$

Esercizio 507.

$$\rightarrow \left(5^{\frac{3}{2}} : 5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (due proprietà in fila, e l'ordine conta)}$$

$$\rightarrow \text{Prima la parentesi: stessa base, gli esponenti si sommano. } \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1\right)$$

$$\rightarrow = 5^1 \text{ (adesso c'è una potenza sola)}$$

$$\rightarrow \text{Poi l'esponente di fuori: si moltiplica. } \left(1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \text{ (sommare prima e moltiplicare dopo non è lo stesso che fare il contrario)}$$

Esercizio 508.

$$\rightarrow \left(6^{\frac{1}{2}} : 6^{\frac{1}{6}}\right)^3 \text{ (due proprietà in fila, e l'ordine conta)}$$

$$\rightarrow \text{Prima la parentesi: stessa base, gli esponenti si sommano. } \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\right)$$

$$\rightarrow = 6^{\frac{1}{3}} \text{ (adesso c'è una potenza sola)}$$

→ **Poi** l'esponente di fuori: si moltiplica. ($\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$)

→ $= 6^1 = 6$ (sommare prima e moltiplicare dopo non e' lo stesso che fare il contrario)

Esercizio 509.

→ $\left(4^{\frac{1}{4}} \cdot 4^{\frac{1}{4}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}\right)^2$ (due proprieta' in fila, e l'ordine conta)

→ **Prima** la parentesi: stessa base, gli esponenti si sommano. ($\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$)

→ $= 4^1$ (adesso c'e' una potenza sola)

→ **Poi** l'esponente di fuori: si moltiplica. ($1 \cdot 2 = 2$)

→ $= 4^2 = 16$ (sommare prima e moltiplicare dopo non e' lo stesso che fare il contrario)

Esercizio 510.

→ $\left(2^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{6}}\right)^3$ (due proprieta' in fila, e l'ordine conta)

→ **Prima** la parentesi: stessa base, gli esponenti si sommano. ($-\frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$)

→ $= 2^{\frac{1}{3}}$ (adesso c'e' una potenza sola)

→ **Poi** l'esponente di fuori: si moltiplica. ($\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$)

→ $= 2^1 = 2$ (sommare prima e moltiplicare dopo non e' lo stesso che fare il contrario)

Esercizio 511.

→ $\left(9^{\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{1}{3}}\right)^2$ (due proprieta' in fila, e l'ordine conta)

→ **Prima** la parentesi: stessa base, gli esponenti si sommano. ($\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$)

→ $= 9^{\frac{1}{2}}$ (adesso c'e' una potenza sola)

→ **Poi** l'esponente di fuori: si moltiplica. ($\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$)

→ $= 9^1 = 9$ (sommare prima e moltiplicare dopo non e' lo stesso che fare il contrario)

7. Somme di radicali

Esercizio 512.

→ $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - \sqrt{12}$ (da ridurre)

→ Prima si porta ogni radicale in **forma normale**: $2\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$, $-2\sqrt{3}$. (farlo dopo fa perdere metà delle semplificazioni)

→ Poi si sommano i **simili**, cioè quelli con stesso indice e stesso radicando.

$$\rightarrow = 5\sqrt{3}$$

Esercizio 513.

$$\rightarrow \sqrt{8} + \sqrt{18} \text{ (da ridurre)}$$

→ Prima si porta ogni radicale in **forma normale**: $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$. (farlo dopo fa perdere metà delle semplificazioni)

→ Poi si sommano i **simili**, cioè quelli con stesso indice e stesso radicando.

$$\rightarrow = 5\sqrt{2}$$

Esercizio 524.

$$\rightarrow \sqrt{63} + \sqrt{28} \text{ (da ridurre)}$$

→ Prima si porta ogni radicale in **forma normale**: $3\sqrt{7}$, $2\sqrt{7}$. (farlo dopo fa perdere metà delle semplificazioni)

→ Poi si sommano i **simili**, cioè quelli con stesso indice e stesso radicando.

$$\rightarrow = 5\sqrt{7}$$

Esercizio 525.

$$\rightarrow \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} \text{ (da ridurre)}$$

→ Prima si porta ogni radicale in **forma normale**: $2\sqrt[3]{3}$, $3\sqrt[3]{3}$. (farlo dopo fa perdere metà delle semplificazioni)

→ Poi si sommano i **simili**, cioè quelli con stesso indice e stesso radicando.

$$\rightarrow = 5\sqrt[3]{3}$$

8. Prodotti notevoli e scomposizioni

Esercizio 536.

$$\rightarrow (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$$

→ È una somma per differenza: il risultato è la differenza dei quadrati. $((\sqrt{a})^2 = a \text{ per } a \geq 0)$

$$\rightarrow = 5 - 2 = 3 \text{ (le radici spariscono: è il motivo per cui questo prodotto serve alla razionalizzazione)}$$

Esercizio 537.

$$\rightarrow (\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})$$

$\rightarrow$ È una somma per differenza: il risultato è la differenza dei quadrati. $((\sqrt{a})^2 = a \text{ per } a \geq 0)$

$$\rightarrow = 7 - 3 = \mathbf{4} \text{ (le radici spariscono: è il motivo per cui questo prodotto serve alla razionalizzazione)}$$

Esercizio 551.

$$\rightarrow (\sqrt{3} + 1)^2$$

$\rightarrow$ Quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo. (il doppio prodotto *resta* irrazionale: sparisce solo nella somma per differenza)

$$\rightarrow = \mathbf{4 + 2\sqrt{3}}$$

Esercizio 552.

$$\rightarrow (\sqrt{7} - \sqrt{3})^2$$

$\rightarrow$ Quadrato del primo, doppio prodotto, quadrato del secondo. (il doppio prodotto *resta* irrazionale: sparisce solo nella somma per differenza)

$$\rightarrow = \mathbf{10 - 2\sqrt{21}}$$

Esercizio 567.

$$\rightarrow x^2 - 5 \text{ (da scomporre)}$$

$\rightarrow$ Nei razionali è irriducibile; nei reali no, perché si può scrivere come differenza di quadrati con una radice.

$$\rightarrow (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

Esercizio 568.

$$\rightarrow x^2 - 7 \text{ (da scomporre)}$$

$\rightarrow$ Nei razionali è irriducibile; nei reali no, perché si può scrivere come differenza di quadrati con una radice.

$$\rightarrow (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$$

9. Razionalizzazione

Esercizio 579.

$$\rightarrow \frac{6}{\sqrt{3}}$$

→ Si moltiplica per una frazione che vale 1: il numero non cambia, cambia la scrittura. (si moltiplica sopra e sotto per $\sqrt{3}$)

$$\rightarrow = 2\sqrt{3}$$

Esercizio 580.

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$$

→ Si moltiplica per una frazione che vale 1: il numero non cambia, cambia la scrittura. (si moltiplica sopra e sotto per $\sqrt{2}$)

$$\rightarrow = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esercizio 591.

$$\rightarrow \frac{5}{\sqrt[3]{2}}$$

→ Si moltiplica per una frazione che vale 1: il numero non cambia, cambia la scrittura. (sotto c'è $\sqrt[3]{2}$ e l'indice è 3: manca 2^2 per completare)

$$\rightarrow = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$$

Esercizio 592.

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

→ Si moltiplica per una frazione che vale 1: il numero non cambia, cambia la scrittura. (sotto c'è $\sqrt[3]{2}$ e l'indice è 3: manca 2^2 per completare)

$$\rightarrow = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

Esercizio 603.

$$\rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}-1}$$

→ Sotto c'è un binomio: si moltiplica sopra e sotto per il **coniugato** $-1 - \sqrt{3}$. (il coniugato è lo stesso binomio con il segno in mezzo cambiato)

→ Sotto viene una somma per differenza, e le radici spariscono.

$$\rightarrow = 1 + \sqrt{3}$$

Esercizio 604.

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

→ Sotto c'è un binomio: si moltiplica sopra e sotto per il **coniugato** $-\sqrt{2} - \sqrt{5}$. (il coniugato è lo stesso binomio con il segno in mezzo cambiato)

→ Sotto viene una somma per differenza, e le radici spariscono.

$$\rightarrow = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}$$

10. Radicali doppi

Esercizio 620.

$$\rightarrow \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \text{ (radicale doppio)}$$

→ Prima porto dentro il coefficiente: $2\sqrt{6} = \sqrt{24}$. (la formula vuole la radice nuda, e b è quello che c'è sotto)

$$\rightarrow a^2 - b = 25 - 24 = 1 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

→ È un quadrato perfetto: $d = 1$.

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}}$$

$$\rightarrow = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

Esercizio 621.

$$\rightarrow \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} \text{ (radicale doppio)}$$

→ Prima porto dentro il coefficiente: $4\sqrt{3} = \sqrt{48}$. (la formula vuole la radice nuda, e b è quello che c'è sotto)

$$\rightarrow a^2 - b = 49 - 48 = 1 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

→ È un quadrato perfetto: $d = 1$.

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{7+1}{2}} - \sqrt{\frac{7-1}{2}}$$

$$\rightarrow = 2 - \sqrt{3}$$

Esercizio 622.

$$\rightarrow \sqrt{5 + \sqrt{21}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 25 - 21 = 4 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$$\rightarrow \text{È un quadrato perfetto: } d = 2.$$

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{5+2}{2}} + \sqrt{\frac{5-2}{2}}$$

$$\rightarrow = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Esercizio 623.

$$\rightarrow \sqrt{7 - \sqrt{40}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 49 - 40 = 9 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$$\rightarrow \text{È un quadrato perfetto: } d = 3.$$

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{7+3}{2}} - \sqrt{\frac{7-3}{2}}$$

$$\rightarrow = -\sqrt{2} + \sqrt{5}$$

Esercizio 624.

$$\rightarrow \sqrt{3 + \sqrt{5}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 9 - 5 = 4 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$$\rightarrow \text{È un quadrato perfetto: } d = 2.$$

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{3+2}{2}} + \sqrt{\frac{3-2}{2}}$$

$$\rightarrow = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Esercizio 625.

$$\rightarrow \sqrt{3 - \sqrt{5}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 9 - 5 = 4 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$$\rightarrow \text{È un quadrato perfetto: } d = 2.$$

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{3+2}{2}} - \sqrt{\frac{3-2}{2}}$$

$$\rightarrow = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Esercizio 626.

$$\rightarrow \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow \text{Prima porto dentro il coefficiente: } 4\sqrt{5} = \sqrt{80}. \text{ (la formula vuole la radice nuda, e } b \text{ è quello che c'è sotto)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 81 - 80 = 1 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$$\rightarrow \text{È un quadrato perfetto: } d = 1.$$

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{9+1}{2}} + \sqrt{\frac{9-1}{2}}$$

$$\rightarrow = 2 + \sqrt{5}$$

Esercizio 627.

$$\rightarrow \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow \text{Prima porto dentro il coefficiente: } 6\sqrt{2} = \sqrt{72}. \text{ (la formula vuole la radice nuda, e } b \text{ è quello che c'è sotto)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 121 - 72 = 49 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$$\rightarrow \text{È un quadrato perfetto: } d = 7.$$

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{11+7}{2}} - \sqrt{\frac{11-7}{2}}$$

$$\rightarrow = 3 - \sqrt{2}$$

Esercizio 628.

$$\rightarrow \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow \text{Prima porto dentro il coefficiente: } 2\sqrt{15} = \sqrt{60}. \text{ (la formula vuole la radice nuda, e } b \text{ è quello che c'è sotto)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 64 - 60 = 4 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$$\rightarrow \text{È un quadrato perfetto: } d = 2.$$

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{8+2}{2}} + \sqrt{\frac{8-2}{2}}$$

$$\rightarrow = \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

Esercizio 629.

$$\rightarrow \sqrt{6 - 2\sqrt{8}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow \text{Prima porto dentro il coefficiente: } 2\sqrt{8} = \sqrt{32}. \text{ (la formula vuole la radice nuda, e } b \text{ è quello che c'è sotto)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 36 - 32 = 4 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$$\rightarrow \text{È un quadrato perfetto: } d = 2.$$

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{6+2}{2}} - \sqrt{\frac{6-2}{2}}$$

$$\rightarrow = 2 - \sqrt{2}$$

Esercizio 630.

$$\rightarrow \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow \text{Prima porto dentro il coefficiente: } 2\sqrt{3} = \sqrt{12}. \text{ (la formula vuole la radice nuda, e } b \text{ è quello che c'è sotto)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 16 - 12 = 4 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$$\rightarrow \text{È un quadrato perfetto: } d = 2.$$

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{4+2}{2}} + \sqrt{\frac{4-2}{2}}$$

$$\rightarrow = 1 + \sqrt{3}$$

Esercizio 631.

$$\rightarrow \sqrt{10 - 2\sqrt{21}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow \text{Prima porto dentro il coefficiente: } 2\sqrt{21} = \sqrt{84}. \text{ (la formula vuole la radice nuda, e } b \text{ è quello che c'è sotto)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 100 - 84 = 16 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$$\rightarrow \text{È un quadrato perfetto: } d = 4.$$

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{10+4}{2}} - \sqrt{\frac{10-4}{2}}$$

$$\rightarrow = -\sqrt{3} + \sqrt{7}$$

Esercizio 632.

$$\rightarrow \sqrt{13 + 4\sqrt{10}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow \text{Prima porto dentro il coefficiente: } 4\sqrt{10} = \sqrt{160}. \text{ (la formula vuole la radice nuda, e } b \text{ è quello che c'è sotto)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 169 - 160 = 9 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$$\rightarrow \text{È un quadrato perfetto: } d = 3.$$

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{13+3}{2}} + \sqrt{\frac{13-3}{2}}$$

$$\rightarrow = 2\sqrt{2} + \sqrt{5}$$

Esercizio 633.

$$\rightarrow \sqrt{12 - 6\sqrt{3}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow \text{Prima porto dentro il coefficiente: } 6\sqrt{3} = \sqrt{108}. \text{ (la formula vuole la radice nuda, e } b \text{ è quello che c'è sotto)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 144 - 108 = 36 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$$\rightarrow \text{È un quadrato perfetto: } d = 6.$$

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{12+6}{2}} - \sqrt{\frac{12-6}{2}}$$

$$\rightarrow = 3 - \sqrt{3}$$

Esercizio 634.

$$\rightarrow \sqrt{9 + 2\sqrt{14}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow \text{Prima porto dentro il coefficiente: } 2\sqrt{14} = \sqrt{56}. \text{ (la formula vuole la radice nuda, e } b \text{ è quello che c'è sotto)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 81 - 56 = 25 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$$\rightarrow \text{È un quadrato perfetto: } d = 5.$$

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{9+5}{2}} + \sqrt{\frac{9-5}{2}}$$

$$\rightarrow = \sqrt{2} + \sqrt{7}$$

Esercizio 635.

$$\rightarrow \sqrt{14 - 4\sqrt{6}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow \text{Prima porto dentro il coefficiente: } 4\sqrt{6} = \sqrt{96}. \text{ (la formula vuole la radice nuda, e } b \text{ è quello che c'è sotto)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 196 - 96 = 100 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$$\rightarrow \text{È un quadrato perfetto: } d = 10.$$

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{14+10}{2}} - \sqrt{\frac{14-10}{2}}$$

$$\rightarrow = -\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

Esercizio 636.

$$\rightarrow \sqrt{3 + \sqrt{7}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 9 - 7 = 2 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$\rightarrow$ Non è un quadrato perfetto: la formula darebbe un radicale doppio dentro un altro. (la risposta è che non si semplifica)

Esercizio 637.

$$\rightarrow \sqrt{5 + \sqrt{11}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 25 - 11 = 14 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$\rightarrow$ Non è un quadrato perfetto: la formula darebbe un radicale doppio dentro un altro. (la risposta è che non si semplifica)

Esercizio 638.

$$\rightarrow \sqrt{6 - \sqrt{13}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 36 - 13 = 23 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$\rightarrow$ Non è un quadrato perfetto: la formula darebbe un radicale doppio dentro un altro. (la risposta è che non si semplifica)

Esercizio 639.

$$\rightarrow \sqrt{8 + \sqrt{17}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 64 - 17 = 47 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$\rightarrow$ Non è un quadrato perfetto: la formula darebbe un radicale doppio dentro un altro. (la risposta è che non si semplifica)

Esercizio 640.

$$\rightarrow \sqrt{11 + 2\sqrt{30}} \text{ (radicale doppio)}$$

$\rightarrow$ Prima porto dentro il coefficiente: $2\sqrt{30} = \sqrt{120}$. (la formula vuole la radice nuda, e b è quello che c'è sotto)

$$\rightarrow a^2 - b = 121 - 120 = 1 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$\rightarrow$ È un quadrato perfetto: $d = 1$.

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{11+1}{2}} + \sqrt{\frac{11-1}{2}}$$

$$\rightarrow = \sqrt{5} + \sqrt{6}$$

Esercizio 641.

$$\rightarrow \sqrt{15 - 6\sqrt{6}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow \text{Prima porto dentro il coefficiente: } 6\sqrt{6} = \sqrt{216}. \text{ (la formula vuole la radice nuda, e } b \text{ è quello che c'è sotto)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 225 - 216 = 9 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$$\rightarrow \text{È un quadrato perfetto: } d = 3.$$

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{15+3}{2}} - \sqrt{\frac{15-3}{2}}$$

$$\rightarrow = 3 - \sqrt{6}$$

Esercizio 642.

$$\rightarrow \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow \text{Prima porto dentro il coefficiente: } 2\sqrt{10} = \sqrt{40}. \text{ (la formula vuole la radice nuda, e } b \text{ è quello che c'è sotto)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 49 - 40 = 9 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$$\rightarrow \text{È un quadrato perfetto: } d = 3.$$

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{7+3}{2}} + \sqrt{\frac{7-3}{2}}$$

$$\rightarrow = \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

Esercizio 643.

$$\rightarrow \sqrt{17 - 8\sqrt{2}} \text{ (radicale doppio)}$$

$$\rightarrow \text{Prima porto dentro il coefficiente: } 8\sqrt{2} = \sqrt{128}. \text{ (la formula vuole la radice nuda, e } b \text{ è quello che c'è sotto)}$$

$$\rightarrow a^2 - b = 289 - 128 = 161 \text{ (il controllo si fa PRIMA di applicare la formula)}$$

$\rightarrow$ Non è un quadrato perfetto: la formula darebbe un radicale doppio dentro un altro. (la risposta è che non si semplifica)

Esercizio 644.

$$\rightarrow \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} \text{ (radicale cubico doppio)}$$

$$\rightarrow \text{Porto dentro il coefficiente: } b = 50.$$

$$\rightarrow c = \sqrt[3]{a^2 - b} = \sqrt[3]{-1} = -1 \text{ (dev'essere razionale, se no il metodo non serve)}$$

$$\rightarrow 4x^3 - 3cx - a = 0, \text{ cioè } 4x^3 + 3x - 7 = 0 \text{ (si cerca una radice razionale con Ruffini)}$$

$$\rightarrow x = 1$$

$$\rightarrow y = x^2 - c = 2$$

$$\rightarrow = 1 + \sqrt{2}$$

Esercizio 645.

$$\rightarrow \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \text{ (radicale cubico doppio)}$$

$$\rightarrow \text{Porto dentro il coefficiente: } b = 108.$$

$$\rightarrow c = \sqrt[3]{a^2 - b} = \sqrt[3]{-8} = -2 \text{ (dev'essere razionale, se no il metodo non serve)}$$

$$\rightarrow 4x^3 - 3cx - a = 0, \text{ cioè } 4x^3 + 6x - 10 = 0 \text{ (si cerca una radice razionale con Ruffini)}$$

$$\rightarrow x = 1$$

$$\rightarrow y = x^2 - c = 3$$

$$\rightarrow = 1 + \sqrt{3}$$

Esercizio 646.

$$\rightarrow \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} \text{ (radicale cubico doppio)}$$

$$\rightarrow c = \sqrt[3]{a^2 - b} = \sqrt[3]{-1} = -1 \text{ (dev'essere razionale, se no il metodo non serve)}$$

$$\rightarrow 4x^3 - 3cx - a = 0, \text{ cioè } 4x^3 + 3x - 2 = 0 \text{ (si cerca una radice razionale con Ruffini)}$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow y = x^2 - c = \frac{5}{4}$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Esercizio 647.

$$\rightarrow \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} \text{ (radicale cubico doppio)}$$

$$\rightarrow \text{Porto dentro il coefficiente: } b = 675.$$

$$\rightarrow c = \sqrt[3]{a^2 - b} = \sqrt[3]{1} = 1 \text{ (dev'essere razionale, se no il metodo non serve)}$$

$$\rightarrow 4x^3 - 3cx - a = 0, \text{ cioè } 4x^3 - 3x - 26 = 0 \text{ (si cerca una radice razionale con Ruffini)}$$

$$\rightarrow x = 2$$

$$\rightarrow y = x^2 - c = 3$$

$$\rightarrow = 2 + \sqrt{3}$$

Esercizio 648.

$$\rightarrow \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} \text{ (radicale cubico doppio)}$$

$$\rightarrow \text{Porto dentro il coefficiente: } b = 50.$$

$$\rightarrow c = \sqrt[3]{a^2 - b} = \sqrt[3]{-1} = -1 \text{ (dev'essere razionale, se no il metodo non serve)}$$

$$\rightarrow 4x^3 - 3cx - a = 0, \text{ cioè } 4x^3 + 3x - 7 = 0 \text{ (si cerca una radice razionale con Ruffini)}$$

$$\rightarrow x = 1$$

$$\rightarrow y = x^2 - c = 2$$

$$\rightarrow = 1 - \sqrt{2}$$

Esercizio 649.

$$\rightarrow \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} \text{ (radicale cubico doppio)}$$

$$\rightarrow \text{Porto dentro il coefficiente: } b = 108.$$

$$\rightarrow c = \sqrt[3]{a^2 - b} = \sqrt[3]{-8} = -2 \text{ (dev'essere razionale, se no il metodo non serve)}$$

$$\rightarrow 4x^3 - 3cx - a = 0, \text{ cioè } 4x^3 + 6x - 10 = 0 \text{ (si cerca una radice razionale con Ruffini)}$$

$$\rightarrow x = 1$$

$$\rightarrow y = x^2 - c = 3$$

$$\rightarrow = 1 - \sqrt{3}$$

Esercizio 650.

$$\rightarrow \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} \text{ (radicale cubico doppio)}$$

$$\rightarrow \text{Porto dentro il coefficiente: } b = 392.$$

$$\rightarrow c = \sqrt[3]{a^2 - b} = \sqrt[3]{8} = 2 \text{ (dev'essere razionale, se no il metodo non serve)}$$

$$\rightarrow 4x^3 - 3cx - a = 0, \text{ cioè } 4x^3 - 6x - 20 = 0 \text{ (si cerca una radice razionale con Ruffini)}$$

$$\rightarrow x = 2$$

$$\rightarrow y = x^2 - c = 2$$

$$\rightarrow = 2 + \sqrt{2}$$

Esercizio 651.

→ $\sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}}$ (radicale cubico doppio)

→ Porto dentro il coefficiente: $b = 52$.

→ $c = \sqrt[3]{a^2 - b} = \sqrt[3]{-27} = -3$ (dev'essere razionale, se no il metodo non serve)

→ $4x^3 - 3cx - a = 0$, cioè $4x^3 + 9x - 5 = 0$ (si cerca una radice razionale con Ruffini)

→ $x = \frac{1}{2}$

→ $y = x^2 - c = \frac{13}{4}$

→ $= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$

11. Coefficienti irrazionali: equazioni, disequazioni e sistemi**Esercizio 652.**

→ $\sqrt{2}x + 3 = 2\sqrt{2}$ (la radice sta sui numeri, non sull'incognita: e' un'equazione di primo grado)

→ Porto le x a sinistra e i numeri a destra, e raccolgo: $\sqrt{2}x = -3 + 2\sqrt{2}$ (prima conviene semplificare i radicali, che spesso diventano simili)

→ Divido per il coefficiente e **razionalizzo**: (un risultato con la radice a denominatore non e' in forma normale)

→ $x = 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$

→ Verifica: $2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (con i radicali un errore di segno non salta all'occhio: $2\sqrt{2} - 1$ e $1 - 2\sqrt{2}$ si somigliano)

Esercizio 653.

→ $\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ (la radice sta sui numeri, non sull'incognita: e' un'equazione di primo grado)

→ Porto le x a sinistra e i numeri a destra, e raccolgo: $\sqrt{3}x = \sqrt{3}$ (prima conviene semplificare i radicali, che spesso diventano simili)

→ Divido per il coefficiente e **razionalizzo**: (un risultato con la radice a denominatore non e' in forma normale)

→ $x = 1$

→ Verifica: $3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ (con i radicali un errore di segno non salta all'occhio: $2\sqrt{2} - 1$ e $1 - 2\sqrt{2}$ si somigliano)

Esercizio 670.

→ $x + \sqrt{2} = 4$ (la radice sta sui numeri, non sull'incognita: e' un'equazione di primo grado)

→ Porto le x a sinistra e i numeri a destra, e raccolgo: $x = 4 - \sqrt{2}$ (prima conviene semplificare i radicali, che spesso diventano simili)

→ Divido per il coefficiente e **razionalizzo**: (un risultato con la radice a denominatore non e' in forma normale)

→ $x = 4 - \sqrt{2}$

→ Verifica: $4 = 4$ (con i radicali un errore di segno non salta all'occhio: $2\sqrt{2} - 1$ e $1 - 2\sqrt{2}$ si somigliano)

Esercizio 671.

→ $\sqrt[3]{2}x = 2$ (la radice sta sui numeri, non sull'incognita: e' un'equazione di primo grado)

→ Porto le x a sinistra e i numeri a destra, e raccolgo: $\sqrt[3]{2}x = 2$ (prima conviene semplificare i radicali, che spesso diventano simili)

→ Divido per il coefficiente e **razionalizzo**: (un risultato con la radice a denominatore non e' in forma normale)

→ $x = \sqrt[3]{4}$

→ Verifica: $2 = 2$ (con i radicali un errore di segno non salta all'occhio: $2\sqrt{2} - 1$ e $1 - 2\sqrt{2}$ si somigliano)

Esercizio 682.

→ $\sqrt{2}x > 4$ (la x e' fuori dalla radice)

→ Raccolgo: il coefficiente della x e' $\sqrt{2}$. (prima di dividere si guarda il suo SEGNO)

→ E' **positivo**: il verso resta.

→ $x > 2\sqrt{2}$ (razionalizzando il risultato)

Esercizio 683.

→ $-\sqrt{3}x > 6$ (la x e' fuori dalla radice)

→ Raccolgo: il coefficiente della x e' $-\sqrt{3}$. (prima di dividere si guarda il suo SEGNO)

→ E' **negativo**: dividendo il verso si **rovescia**. (e non si vede a occhio: si portano i radicali allo stesso indice e si confrontano)

→ $x < -2\sqrt{3}$ (razionalizzando il risultato)

Esercizio 706.

$$\rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x > 2 \\ x \leq \sqrt{5} \end{cases} \quad (\text{sistema di disequazioni})$$

→ La prima da' $x > \sqrt{2}$.

→ La seconda da' $x \leq \sqrt{5}$.

→ Si **intersecano**: $S : \sqrt{2} < x \leq \sqrt{5}$ (per intersecare bisogna ordinare estremi irrazionali, e si ordinano portandoli allo stesso indice)

Esercizio 707.

$$\rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{2} \\ x < \sqrt{5} \end{cases} \quad (\text{sistema di disequazioni})$$

→ La prima da' $x > \sqrt{2}$.

→ La seconda da' $x < \sqrt{5}$.

→ Si **intersecano**: $S : \sqrt{2} < x < \sqrt{5}$ (per intersecare bisogna ordinare estremi irrazionali, e si ordinano portandoli allo stesso indice)

Esercizio 708.

$$\rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x \geq 3 \\ x < 4 \end{cases} \quad (\text{sistema di disequazioni})$$

→ La prima da' $x \geq \sqrt{3}$.

→ La seconda da' $x < 4$.

→ Si **intersecano**: $S : \sqrt{3} \leq x < 4$ (per intersecare bisogna ordinare estremi irrazionali, e si ordinano portandoli allo stesso indice)

Esercizio 709.

$$\rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{2}x \leq 4 \end{cases} \quad (\text{sistema di disequazioni})$$

→ La prima da' $x > 0$.

→ La seconda da' $x \leq 2\sqrt{2}$.

→ Si **intersecano**: $S : 0 < x \leq 2\sqrt{2}$ (per intersecare bisogna ordinare estremi irrazionali, e si ordinano portandoli allo stesso indice)

Esercizio 710.

$$\rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}x < 2 \\ x \leq 5 \end{cases} \quad (\text{sistema di disequazioni})$$

→ La prima da' $x > -\sqrt{2}$. (attenzione al segno del coefficiente)

→ La seconda da' $x \leq 5$.

→ Si intersecano: $S : -\sqrt{2} < x \leq 5$ (per intersecare bisogna ordinare estremi irrazionali, e si ordinano portandoli allo stesso indice)

Esercizio 711.

$$\rightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{3} \\ x \leq \sqrt{7} \end{cases} \quad (\text{sistema di disequazioni})$$

→ La prima da' $x \geq \sqrt{3}$.

→ La seconda da' $x \leq \sqrt{7}$.

→ Si intersecano: $S : \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{7}$ (per intersecare bisogna ordinare estremi irrazionali, e si ordinano portandoli allo stesso indice)

Esercizio 712.

$$\rightarrow \begin{cases} \sqrt{5}x > 5 \\ x < 3 \end{cases} \quad (\text{sistema di disequazioni})$$

→ La prima da' $x > \sqrt{5}$.

→ La seconda da' $x < 3$.

→ Si intersecano: $S : \sqrt{5} < x < 3$ (per intersecare bisogna ordinare estremi irrazionali, e si ordinano portandoli allo stesso indice)

Esercizio 713.

$$\rightarrow \begin{cases} 2x > 2\sqrt{2} \\ x < 2 \end{cases} \quad (\text{sistema di disequazioni})$$

→ La prima da' $x > \sqrt{2}$.

→ La seconda da' $x < 2$.

→ Si intersecano: $S : \sqrt{2} < x < 2$ (per intersecare bisogna ordinare estremi irrazionali, e si ordinano portandoli allo stesso indice)

Esercizio 714.

$$\rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{2} \\ x > \sqrt{3} \end{cases} \quad (\text{sistema di disequazioni})$$

→ La prima da' $x > \sqrt{2}$.

→ La seconda da' $x > \sqrt{3}$.

→ Si **intersecano**: $S : x > \sqrt{3}$ (per intersecare bisogna ordinare estremi irrazionali, e si ordinano portandoli allo stesso indice)

Esercizio 715.

$$\rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{5} \\ x < \sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{sistema di disequazioni})$$

→ La prima da' $x > \sqrt{5}$.

→ La seconda da' $x < \sqrt{2}$.

→ Si **intersecano**: $S : \emptyset$ (per intersecare bisogna ordinare estremi irrazionali, e si ordinano portandoli allo stesso indice)

Esercizio 716.

$$\rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x + 1 > 1 \\ x \leq 6 \end{cases} \quad (\text{sistema di disequazioni})$$

→ La prima da' $x > 0$.

→ La seconda da' $x \leq 6$.

→ Si **intersecano**: $S : 0 < x \leq 6$ (per intersecare bisogna ordinare estremi irrazionali, e si ordinano portandoli allo stesso indice)

Esercizio 717.

$$\rightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt[3]{3} \\ x < \sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{sistema di disequazioni})$$

→ La prima da' $x \geq \sqrt[3]{3}$.

→ La seconda da' $x < \sqrt{2}$.

→ Si **intersecano**: $S : \emptyset$ (per intersecare bisogna ordinare estremi irrazionali, e si ordinano portandoli allo stesso indice)

Esercizio 718.

$$\rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 3 \\ x - y = \sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{sistema a coefficienti irrazionali})$$

→ Con Cramer: $\Delta = -1 - \sqrt{2}$, $\Delta_x = -3 - \sqrt{2}$, $\Delta_y = -1$. (i determinanti sono prodotti e differenze fra radicali)

→ $x = -1 + 2\sqrt{2}$, $y = -1 + \sqrt{2}$ (le divisioni finali si razionalizzano)

→ Verifica: $3 = 3$, $\sqrt{2} = \sqrt{2}$ (si sostituisce in tutte e due le equazioni)

Esercizio 719.

$$\rightarrow \begin{cases} x + \sqrt{3}y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad (\text{sistema a coefficienti irrazionali})$$

→ Con Cramer: $\Delta = -1 - \sqrt{3}$, $\Delta_x = -4$, $\Delta_y = -4$. (i determinanti sono prodotti e differenze fra radicali)

→ $x = -2 + 2\sqrt{3}$, $y = -2 + 2\sqrt{3}$ (le divisioni finali si razionalizzano)

→ Verifica: $4 = 4$, $0 = 0$ (si sostituisce in tutte e due le equazioni)

12. Domini, vero o falso, trova l'errore, a ritroso**Esercizio 730.**

$$\rightarrow y = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{4-x}} \quad (\text{di cui trovare il dominio})$$

→ $x - 1 \geq 0$ (radicando di indice pari)

→ $-x + 4 > 0$ (il radicale sta a denominatore: la condizione è stretta)

→ Si intersecano: $D = 1 \leq x < 4$

Esercizio 731.

$$\rightarrow y = \sqrt{x+3} \quad (\text{di cui trovare il dominio})$$

→ $x + 3 \geq 0$ (radicando di indice pari)

→ Si intersecano: $D = x \geq -3$

Esercizio 750.

→ $\sqrt{16} = \pm 4$. (l'affermazione da giudicare)

→ **Falso**

→ Il simbolo di radice con indice pari indica la radice **non negativa**: $\sqrt{16} = 4$. I due segni vengono dalle equazioni. (una risposta senza motivo non vale)

Esercizio 751.

→ $\sqrt{x^2} = x$ per ogni x . (l'affermazione da giudicare)

→ **Falso**

→ È $|x|$: con $x = -3$ verrebbe $\sqrt{9} = -3$, falso. (una risposta senza motivo non vale)

Esercizio 774.

→ $\sqrt{72} = \sqrt{8 \cdot 9} = 8\sqrt{9} = 24$. (lo svolgimento da controllare)

→ Sono usciti tutti e due i fattori invece della radice: $\sqrt{8 \cdot 9} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{9} = 2\sqrt{2} \cdot 3 = 6\sqrt{2}$. (l'errore, e come si corregge)

Esercizio 775.

→ $\sqrt{x^2} = x$, quindi $\sqrt{(-4)^2} = -4$. (lo svolgimento da controllare)

→ $\sqrt{16} = 4$: la scrittura giusta è $|x|$. (l'errore, e come si corregge)

Esercizio 788.

→ Trova n perché $\sqrt[n]{64} = 2$. (il risultato è dato, manca un dato)

→ Si impone la condizione richiesta e si risolve rispetto alla lettera che manca.

→ $n = 6$

Esercizio 789.

→ Trova a perché $\sqrt{a} = 3\sqrt{5}$. (il risultato è dato, manca un dato)

→ Si impone la condizione richiesta e si risolve rispetto alla lettera che manca.

→ $a = 45$

Esercizio 800.

→ Dimostra che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale. (quello che c'è da dimostrare)

→ Per assurdo: se $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ con m, n senza fattori comuni, elevando al quadrato si ha $m^2 = 2n^2$. Allora m^2 è pari, e quindi m è pari (il quadrato di un dispari è dispari). Posto $m = 2k$: $4k^2 = 2n^2$, cioè $n^2 = 2k^2$, e anche n è pari. Ma m e n pari contraddice l'ipotesi che non avessero fattori comuni. L'assurdo dice che $\sqrt{2}$ non è razionale. (una dimostrazione è un ragionamento, non un conto: si scrive per esteso)

Esercizio 801.

→ Dimostra la proprietà invariantiva $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[nm]{a^{pm}}$ con $a \geq 0$. (quello che c'è da dimostrare)

→ Con gli esponenti frazionari: $\sqrt[n]{a^p} = a^{p/n}$. Moltiplicando numeratore e denominatore dell'esponente per $m \neq 0$ la frazione non cambia: $\frac{p}{n} = \frac{pm}{nm}$. Quindi $a^{p/n} = a^{pm/(nm)} = \sqrt[nm]{a^{pm}}$. La condizione $a \geq 0$ serve perché la scrittura $a^{p/n}$ è definita solo lì. (una dimostrazione è un ragionamento, non un conto: si scrive per esteso)

Esercizio 802.

→ Dimostra che $\sqrt{a^2} = |a|$ per ogni numero reale a . (quello che c'è da dimostrare)

→ Per definizione $\sqrt{a^2}$ è il numero *non negativo* il cui quadrato è a^2 . Ora $|a| \geq 0$ e $|a|^2 = a^2$, quindi $|a|$ soddisfa la definizione. E il numero con quelle due proprietà è unico, quindi $\sqrt{a^2} = |a|$. Per $a \geq 0$ questo coincide con a ; per $a < 0$ no, ed è tutta la differenza. (una dimostrazione è un ragionamento, non un conto: si scrive per esteso)

Esercizio 803.

→ Dimostra che $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ per $a, b \geq 0$. (quello che c'è da dimostrare)

→ Sia $x = \sqrt[n]{a}$ e $y = \sqrt[n]{b}$: allora $x^n = a$ e $y^n = b$, con $x, y \geq 0$. Il prodotto $xy \geq 0$ e $(xy)^n = x^n y^n = ab$. Quindi xy è il numero non negativo la cui potenza n -esima vale ab , cioè $\sqrt[n]{ab}$. (una dimostrazione è un ragionamento, non un conto: si scrive per esteso)

Esercizio 804.

→ Giustifica perché nella disequazione $\sqrt{A} > B$ servono due sistemi, mentre in $\sqrt{A} < B$ ne basta uno. (quello che c'è da dimostrare)

→ Perché una radice di indice pari non è mai negativa. Se $B < 0$, « $\sqrt{A} < B$ » chiede a un numero ≥ 0 di essere minore di un negativo: impossibile, quindi quel caso non dà niente e si può imporre $B > 0$ una volta per tutte. Ma « $\sqrt{A} > B$ » con $B < 0$ è *automaticamente vera* ovunque la radice esista: quel

caso dà tutto il dominio e va tenuto. Da qui il primo dei due sistemi. (una dimostrazione è un ragionamento, non un conto: si scrive per esteso)

Esercizio 805.

→ Dimostra che elevare al quadrato può aggiungere soluzioni, e spiega perché questo obbliga al controllo finale. (quello che c'è da dimostrare)

→ Da $A = B$ segue sempre $A^2 = B^2$, perché numeri uguali hanno quadrati uguali. Il viceversa è falso: da $A^2 = B^2$ segue $A = B$ oppure $A = -B$. Elevando si passa quindi a un'equazione che ha le soluzioni di quella di partenza *più* quelle dell'equazione con il segno cambiato. Le seconde vanno tolte, e il solo modo di riconoscerle è confrontarle con le condizioni — che per questo si scrivono prima. (una dimostrazione è un ragionamento, non un conto: si scrive per esteso)

Esercizio 806.

→ Dimostra che $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ per $a, b \geq 0$, e spiega a che cosa serve. (quello che c'è da dimostrare)

→ È la somma per differenza: il prodotto vale $(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$, perché $(\sqrt{x})^2 = x$ per $x \geq 0$. Serve alla razionalizzazione: moltiplicando un denominatore $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ per il suo coniugato le radici spariscono tutte insieme, e sotto resta un numero razionale. (una dimostrazione è un ragionamento, non un conto: si scrive per esteso)

Esercizio 807.

→ Giustifica perché $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{|x|}$ e non $\sqrt[3]{x}$. (quello che c'è da dimostrare)

→ Il radicale di partenza ha indice pari, quindi esiste per ogni x (il radicando x^2 è sempre ≥ 0) ed è sempre ≥ 0 . Se semplificando si arrivasse a $\sqrt[3]{x}$, per $x < 0$ quel valore sarebbe negativo: due scritture che dovrebbero essere uguali darebbero segni opposti. Il valore assoluto rimette l'informazione che l'esponente pari aveva reso il radicando non negativo. In generale il valore assoluto serve quando il fattore t per cui si semplifica è pari. (una dimostrazione è un ragionamento, non un conto: si scrive per esteso)
