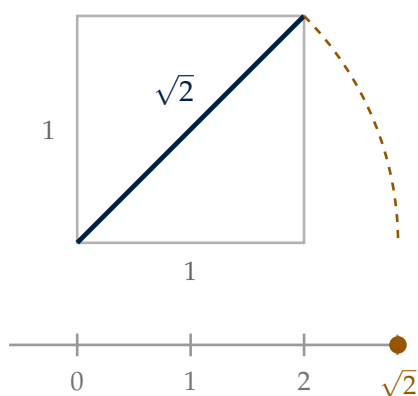


RADICALI

ALGEBRA

Numeri reali, radici n -esime, operazioni,
razionalizzazione, equazioni e disequazioni irrazionali



Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima, e i numeri reali	3
2	Radici quadrate, cubiche, n -esime	5
3	Condizioni di esistenza	7
4	La proprietà invariantiva	9
5	Semplificare un radicale	10
6	Radicali letterali e proprietà invariantiva	12
7	Minimo comune indice e confronto	13
8	Moltiplicazione e divisione	15
9	Trasporto dentro e fuori	15
10	Potenza di un radicale e radice di radice	16
11	Somme di radicali	16
12	Prodotti notevoli e scomposizioni	17
13	Razionalizzazione	18
14	Radicali doppi	19
15	Il radicale cubico doppio	21
16	Equazioni a coefficienti irrazionali	22
17	Disequazioni a coefficienti irrazionali	24
18	Sistemi di disequazioni a coefficienti irrazionali	26
19	Sistemi di equazioni a coefficienti irrazionali	27
20	Domini di funzioni irrazionali	28
21	Potenze con esponente razionale	29
22	Riepilogo: che cosa vuol dire «risultato esatto»	32

1 Cosa serve prima, e i numeri reali

Fino a qui ogni risultato esatto era una frazione. Da questo capitolo non è più vero: $\sqrt{2}$ esiste, si può disegnare — è la diagonale del quadrato di lato 1 — e **non è una frazione**. «Esatto» smette di voler dire «razionale» e comincia a voler dire **forma normale del radicale**.

Cosa devi già sapere

- **Le potenze.** $a^m a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, e $a^0 = 1$ con $a \neq 0$.
- **La scomposizione in fattori primi.** $72 = 2^3 \cdot 3^2$. È il passo che sta sotto ogni semplificazione: chi non lo fa, dopo paga.
- **MCD e m.c.m. fra numeri**, per il minimo comune indice.
- **I prodotti notevoli**, e in particolare $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$: è tutta la razionalizzazione con il binomio.
- **Le disequazioni e gli intervalli.** Le condizioni di esistenza sono disequazioni, e la risposta è un insieme: $x \geq 3$ si scrive anche $[3; +\infty)$.
- **Il valore assoluto.** $|-3| = 3$, e $|A| \geq 0$ sempre. Serve al paragrafo 4, dove salta fuori senza essere stato invitato.

Formula 1.1: I numeri reali: Un numero è **razionale** se si può scrivere come frazione di interi; **irrazionale** se non si può. I due insiemi insieme formano i **numeri reali** $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Un razionale ha sviluppo decimale *finito* o *periodico*; un irrazionale ha sviluppo infinito e non periodico.

Esempio Svolto 1.1: $\sqrt{2}$ non è una frazione:

Si suppone il contrario e si arriva a un'assurdità.

Se $\sqrt{2}$ fosse razionale si potrebbe scrivere $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ con m e n interi **senza fattori comuni**. Elevando al quadrato:

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \implies m^2 = 2n^2$$

Allora m^2 è pari, e quindi anche m è pari (il quadrato di un dispari è dispari). Scrivo $m = 2k$:

$$(2k)^2 = 2n^2 \implies 4k^2 = 2n^2 \implies n^2 = 2k^2$$

Allora anche n^2 è pari, e quindi n è pari. Ma m e n pari *tutti e due* contraddice l'ipotesi che non avessero fattori comuni.

L'assurdo dice che l'ipotesi era falsa: $\sqrt{2}$ non è razionale.

Perché questo conto vale la pena leggerlo

Non è una curiosità. È la prova che i numeri razionali **non bastano**: c'è una lunghezza che si costruisce con riga e compasso — la diagonale del quadrato di lato 1 — e che nessuna frazione descrive.

Da qui in poi, quando un risultato viene $\sqrt{2}$, la risposta è $\sqrt{2}$: scrivere 1,41 non è «più semplice», è *sbagliato*.

Esempio Svolto 1.2: Lo stesso vale per $\sqrt{3}$, e per quasi tutte le altre:

Per $\sqrt{3}$ l'argomento è lo stesso, con un'osservazione al posto della parità. Se si scompone un numero in fattori primi e lo si eleva al quadrato, **ogni esponente raddoppia**, quindi diventa pari:

$$n = 45 = 3^2 \cdot 5 \implies n^2 = 3^4 \cdot 5^2$$

Supponiamo ora $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ ridotta ai minimi termini. Allora $a^2 = 3b^2$. Ma:

- in a^2 il fattore 3 compare con esponente **pari**;
- in $3b^2$ compare con esponente **dispari** (pari, più uno).

Lo stesso numero non può avere due scomposizioni diverse: l'uguaglianza è falsa, e $\sqrt{3}$ non è razionale.

Il ragionamento si ripete parola per parola per ogni radice quadrata di un naturale che non sia un quadrato perfetto:

$$\sqrt{2} = 1,414\dots \quad \sqrt{3} = 1,732\dots \quad \sqrt{5} = 2,236\dots \quad \sqrt{6} = 2,449\dots$$

Gli irrazionali non sono qualche eccezione: sono la regola.

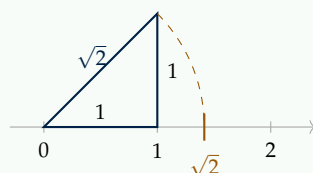
Formula 1.2: $\mathbb{Q}$ è denso, $\mathbb{R}$ è completo:

- $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono **discreti**: fra due interi ce n'è un numero finito.
- $\mathbb{Q}$ è **denso**: fra due razionali ce n'è sempre un altro — la loro media — e quindi ce ne sono infiniti.
- Eppure $\mathbb{Q}$ **non riempie la retta**: nel punto a distanza $\sqrt{2}$ dall'origine non c'è nessun razionale. $\mathbb{R}$ sì, e per questo si dice **completo**: a ogni punto della retta corrisponde

un reale, e viceversa.

Esempio Svolto 1.3: $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ si disegnano:

Un irrazionale non è un numero «approssimato»: è una lunghezza precisa, e si costruisce con riga e compasso.



Il triangolo rettangolo con i cateti lunghi 1 ha l'ipotenusa lunga $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; il compasso la riporta sulla retta. Ripartendo da un triangolo con cateti $\sqrt{2}$ e 1 si ottiene $\sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$, e così via: è la **spirale di Teodoro**, e dà tutte le $\sqrt{n}$ una dopo l'altra.

Non serve sempre partire da capo. Per $\sqrt{19}$ conviene notare che $\sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$ e che $19 = 18 + 1$: bastano *due* triangoli invece di diciotto.

2 Radici quadrate, cubiche, n -esime

Formula 2.1: Radice n -esima:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

n si chiama **indice**, a **radicando**. Con $n = 2$ l'indice non si scrive: $\sqrt{a}$.

	indice pari	indice dispari
$a > 0$	una radice, positiva	una radice, positiva
$a = 0$	0	0
$a < 0$	non esiste nei reali	una radice, negativa

Esempio Svolto 2.1: Indice pari e indice dispari:

$$\sqrt{16} = 4 \quad \sqrt[3]{27} = 3 \quad \sqrt[4]{81} = 3 \quad \sqrt[5]{32} = 2$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \text{ perché } (-3)^3 = -27 \quad \text{ma} \quad \sqrt{-16} \text{ non esiste}$$

Nessun numero reale elevato al quadrato dà -16 : i quadrati sono tutti ≥ 0 .

« $\sqrt{16} = \pm 4$ »

No. $\sqrt{16} = 4$ e basta: il simbolo di radice, con indice pari, indica la radice **non negativa**. Se ne esiste una sola, il risultato è un numero solo.

I due segni compaiono quando si risolve un'equazione: $x^2 = 16$ ha due soluzioni, $x = \pm 4$. Ma quella è un'equazione, non un simbolo di radice — e la differenza è tutta qui.

Formula 2.2: Radicale come potenza a esponente frazionario:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (a \geq 0)$$

È la scrittura che spiega *perché* le regole dei radicali sono quelle che sono: sono le regole delle potenze, lette al contrario. Torna per esteso nel paragrafo *Potenze con esponente razionale*, in fondo.

Le regole dei radicali sono le regole delle potenze

Ogni formula di questo capitolo si può ricavare così:

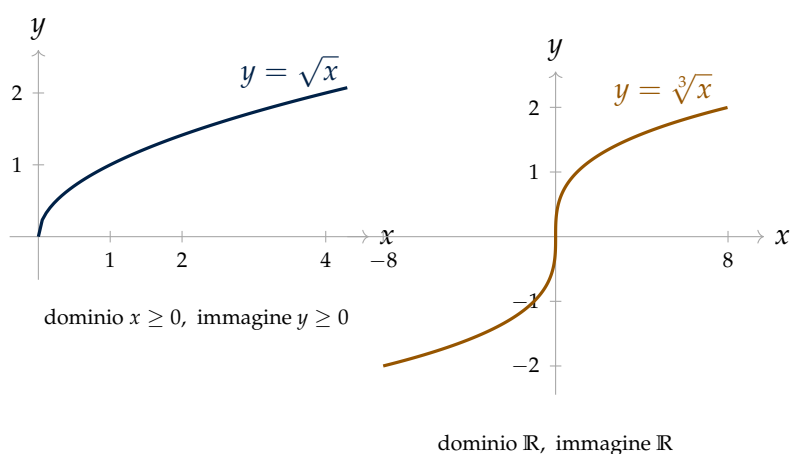
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

Chi si ricorda le potenze non deve imparare niente a memoria. La condizione $a \geq 0$ però non si può saltare: con $a < 0$ la scrittura $a^{1/n}$ non funziona più.

Le due funzioni $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt[3]{x}$

La differenza fra indice pari e indice dispari si vede tutta in un disegno.



Che cosa dicono i due disegni

A sinistra la curva **non esiste** a sinistra dello zero e non scende mai sotto l'asse: sono le due facce della stessa regola, radicando ≥ 0 e risultato ≥ 0 .

A destra la curva attraversa l'origine e continua: $\sqrt[3]{-8} = -2$ esiste, ed è negativo perché lo è il radicando. Il grafico è **simmetrico rispetto all'origine**, ed è il disegno della regola $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$.

Ogni radice di indice *pari* ha il grafico di sinistra, ogni radice di indice *dispari* quello di destra: cambia la pendenza, non la forma.

3 Condizioni di esistenza

Formula 3.1: C.E. di un radicale:

$$\sqrt[n]{A(x)} \text{ esiste } \begin{cases} \text{se } A(x) \geq 0 & \text{con } n \text{ pari} \\ \text{sempre} & \text{con } n \text{ dispari} \end{cases}$$

La condizione non è del radicale: è dell'**indice pari**. Scriverla dove non serve è un errore di ragionamento, non di forma.

Esempio Svolto 3.1: Tre radicali, tre risposte diverse:

$$\sqrt{x-3} \Rightarrow x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

$$\sqrt[3]{x-3} \Rightarrow \text{esiste per ogni } x$$

$$\sqrt{3-x} \Rightarrow 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

Il terzo caso è il primo con il radicando scritto al contrario: il verso della disequazione si rovescia perché il coefficiente della x è negativo.

Esempio Svolto 3.2: Un radicale a denominatore:

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

Qui le condizioni sono **due**, e si intersecano: il radicando ≥ 0 perché l'indice è pari, e il denominatore $\neq 0$ perché sta sotto una barra.

$$x-2 \geq 0 \wedge \sqrt{x-2} \neq 0 \implies x > 2$$

Le due insieme danno il maggiore **stretto**: lo zero cade.

Il radicale a denominatore con il $\geq$

Scrivere $x \geq 2$ per $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ lascia dentro $x = 2$, dove il denominatore vale zero. La radice esiste, la frazione no.

Regola: radicale *da solo* $\rightarrow \geq 0$; radicale *sotto una barra* $\rightarrow > 0$.

Esempio Svolto 3.3: Indice dispari, ma una frazione dentro:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{2x-4}}$$

L'indice è dispari, quindi il radicando può essere negativo: sul segno non c'è niente da imporre. Ma dentro c'è una **frazione**, e un denominatore non si annulla mai:

$$2x - 4 \neq 0 \implies x \neq 2$$

Indice dispari non vuol dire «nessuna condizione»: vuol dire nessuna condizione *di segno*. Tutto quello che il radicando si porta dietro — denominatori, altri radicali — continua a valere.

Formula 3.2: Le C.E. si raccolgono da tutto quello che c'è:

Da dove viene	Che condizione dà
radicando di indice pari	≥ 0
radicando di indice dispari	nessuna, sul segno
denominatore (ovunque sia)	$\neq 0$
radicale <i>a</i> denominatore	radicando > 0

Si scrivono tutte e si **intersecano**.

Il segno di un radicale

Le C.E. dicono *quando* un radicale esiste. Il segno dice *che cosa vale* dove esiste, e sono due domande diverse: $\sqrt[3]{b-3}$ esiste sempre, ma non è sempre positivo.

Formula 3.3: Il segno dipende solo dall'indice:

Per i valori che soddisfano le C.E., $\sqrt[n]{A}$:

- con n **pari** è sempre ≥ 0 , qualunque sia A ;
- con n **dispari** ha lo **stesso segno** di A .

Con indice pari il segno non è una domanda: è già deciso dalla definizione di radice.

Esempio Svolto 3.4: $\sqrt[8]{2-a}$ e $\sqrt[7]{b-3}$: $\sqrt[8]{2-a}$, indice pari. C.E.: $2-a \geq 0 \Rightarrow a \leq 2$.

Dove esiste è positivo o nullo, e si annulla solo dove si annulla il radicando:

$$\text{per } a < 2 : \sqrt[8]{2-a} > 0 \quad \text{per } a = 2 : \sqrt[8]{2-a} = 0$$

 $\sqrt[7]{b-3}$, indice dispari. C.E.: $\forall b \in \mathbb{R}$.Qui il segno segue il radicando, e ci sono *tre* casi:

$$b > 3 : \sqrt[7]{b-3} > 0 \quad b = 3 : \sqrt[7]{b-3} = 0 \quad b < 3 : \sqrt[7]{b-3} < 0$$

«Esiste» scambiato per «è positivo»

Con indice dispari le C.E. non danno nessuna condizione, e la tentazione è di non scrivere niente e passare oltre. Ma se l'esercizio chiede il *segno*, la risposta «esiste sempre» non risponde: $\sqrt[7]{b-3}$ è negativo per ogni $b < 3$, cioè su metà dei valori.

Le due domande vanno tenute separate anche nella scrittura: prima le C.E., poi il segno. Chi le mescola, con indice pari finisce per discutere un segno già deciso, e con indice dispari per non discuterlo affatto.

4 La proprietà invariantiva

È il teorema da cui discendono la semplificazione, il minimo comune indice e metà delle operazioni. Vale la pena impararlo per primo, perché tutto il resto è lui applicato in un verso o nell'altro.

Formula 4.1: Proprietà invariantiva: Moltiplicando l'**indice** del radicale e l'**esponente** del radicando per uno stesso numero naturale $m \neq 0$ si ottiene un radicale **equivalente**, cioè che vale lo stesso numero:

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n \cdot m]{a^{p \cdot m}} \quad \text{con } a \geq 0 \text{ e } m, n, p \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Letta al contrario — dividendo invece che moltiplicando — è la regola che **semplifica** un radicale.

Perché è vera

Con gli esponenti frazionari è una riga:

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{p \cdot m}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{p \cdot m}}$$

Moltiplicare sopra e sotto la stessa frazione non la cambia: è la stessa cosa che si fa con $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, e infatti «radicali equivalenti» è la stessa idea di «frazioni equivalenti».

Esempio Svolto 4.1: Alzare l'indice:

$$\sqrt[5]{2} = \sqrt[5 \cdot 3]{2^{1 \cdot 3}} = \sqrt[15]{8}$$

$$\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3 \cdot 2]{5^{2 \cdot 2}} = \sqrt[6]{5^4} = \sqrt[6]{625}$$

Serve per portare due radicali allo stesso indice (paragrafo 7), e per moltiplicarli.

Esempio Svolto 4.2: Radicando negativo: prima si porta fuori il meno:

Con l'indice **dispari** il radicando può essere negativo, ma la proprietà invariante pretende $a \geq 0$: se si applica lo stesso, si arriva a un radicale di indice *pari* con radicando negativo, che non esiste.

Il meno si porta **fuori prima**:

$$\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} = -\sqrt[3 \cdot 4]{2^{1 \cdot 4}} = -\sqrt[12]{16}$$

Scrivere direttamente $\sqrt[12]{(-2)^4} = \sqrt[12]{16}$ dà lo stesso numero *sbagliato di segno*: $+\sqrt[12]{16}$ invece di $-\sqrt[12]{16}$.

Applicare l'invariantiva senza guardare il segno

La condizione $a \geq 0$ nell'enunciato non è un dettaglio formale: è quello che impedisce di trasformare un numero negativo in uno positivo senza accorgersene.

Regola pratica: se il radicando è (o può essere) negativo e l'indice è dispari, si porta fuori il meno **prima** di toccare l'indice.

5 Semplificare un radicale

Metodo 5.1: Portare un radicale in forma normale:

1. Si **scompone il radicando in fattori primi**.
2. Ogni fattore con esponente $\geq n$ **esce**, con esponente diviso n ; dentro resta il resto della divisione.
3. Se indice ed esponenti rimasti hanno un divisore comune, si **divide tutto** per quel divisore: l'indice cala.

Un radicale è in **forma normale** quando non si può più fare nessuna delle tre cose.

Esempio Svolto 5.1: $\sqrt{72}$ e $\sqrt[3]{54}$:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 \implies \sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$54 = 2 \cdot 3^3 \implies \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$$

Il 2 resta dentro perché il suo esponente (1) è minore dell'indice.

Esempio Svolto 5.2: Ridurre l'indice:

$$\sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = 2^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

Indice ed esponente si dividono per il loro MCD, che qui è 2.

$$\sqrt[9]{8} = \sqrt[9]{2^3} = 2^{\frac{3}{9}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

Formula 5.1: Le due regole di semplificazione, con il valore assoluto: Caso 1 — indice ed esponente uguali.

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{se } n \text{ è pari} \\ a & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Caso 2 — si semplifica per un fattore t .

$$\sqrt[n \cdot t]{a^{m \cdot t}} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^m} & \text{se } t \text{ è dispari} \\ \sqrt[n]{|a|^m} & \text{se } t \text{ è pari} \end{cases}$$

Quello che decide non è l'indice di partenza: è il **fattore per cui si semplifica**. Se t è pari, dividendo per t si perde l'informazione che il radicando era stato reso positivo da un esponente pari, e il valore assoluto la rimette.

Esempio Svolto 5.3: Caso 1: indice pari:

$$\sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5$$

Senza le barre verrebbe -5 , che è assurdo: una radice quarta non è mai negativa. Con l'indice dispari invece il segno passa:

$$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$$

Esempio Svolto 5.4: Caso 2: il fattore t pari:

$$\sqrt[t]{x^2}$$

Indice 6, esponente 2: il fattore comune è $t = 2$, che è **pari**. Quindi

$$\sqrt[t]{x^2} = \sqrt[3]{|x|}$$

e non $\sqrt[3]{x}$. Si controlla con $x = -8$: a sinistra $\sqrt[6]{64} = 2$; a destra $\sqrt[3]{|-8|} = \sqrt[3]{8} = 2 \checkmark$, mentre $\sqrt[3]{-8} = -2$ no.

Esempio Svolto 5.5: Caso 2: il fattore t dispari:

$$\sqrt[t]{x^3} = \sqrt[3]{x}$$

Qui $t = 3$ è dispari, e il valore assoluto non serve: dividendo per un numero dispari il segno si conserva. Con $x = -8$: a sinistra $\sqrt[9]{-512} = -2$, a destra $\sqrt[3]{-8} = -2 \checkmark$

$$\sqrt{x^2} = x$$

È falso per ogni x negativo. Con $x = -3$:

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$$

La scrittura giusta è $|x|$, e le barre non sono una decorazione: sono quello che tiene il risultato ≥ 0 , com'è obbligato a essere.

Lo stesso vale semplificando l'indice: $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{|x|}$, non $\sqrt{x}$, perché il fattore $t = 2$ è pari.

Un modo di non sbagliare mai

Prima di scrivere il risultato, si prova con **un numero negativo**. Se il radicale di partenza esiste per quel numero e il risultato non torna, mancano le barre.

Costa dieci secondi ed è l'unico controllo che funziona a colpo sicuro: la regola su t pari o dispari si dimentica, un conto sbagliato con $x = -8$ no.

6 Radicali letterali e proprietà invariantiva

Con le lettere la proprietà invariantiva chiede $a \geq 0$, e una lettera il segno non lo dichiara. Bisogna guardare l'**indice** e poi, se serve, distinguere i casi.

Formula 6.1: I due comportamenti: Indice pari. Le C.E. impongono già che il radicando sia ≥ 0 : la proprietà si applica *direttamente*, senza dire altro.

$$\sqrt{x+6} \xrightarrow{\text{C.E. } x \geq -6} \sqrt[2 \cdot 3]{(x+6)^3} = \sqrt[6]{(x+6)^3}$$

Indice dispari. Il radicando può essere negativo, e allora si distingue:

- se il radicando è ≥ 0 , si procede normalmente;
- se è < 0 , si porta **fuori il segno meno** prima di trasformare.

$$\sqrt[3]{x-1} \xrightarrow{\text{se } x < 1} -\sqrt[3]{1-x} = -\sqrt[6]{(1-x)^2}$$

Esempio Svolto 6.1: $\sqrt[3]{x}$ portata all'indice 12:

L'indice è dispari, quindi si distinguono i due casi.

Se $x \geq 0$: la proprietà si applica com'è.

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt[3 \cdot 4]{x^4} = \sqrt[12]{x^4}$$

Se $x < 0$: si porta fuori il meno per rendere il radicando positivo, e solo dopo si trasforma.

$$\sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[12]{(-x)^4} = -\sqrt[12]{x^4}$$

L'ultimo passaggio usa $(-x)^4 = x^4$, perché l'esponente è pari.

I due risultati sono diversi, e per un solo segno: quello davanti. Chi non distingue i casi ne scrive uno solo e sbaglia metà dei valori di x .

Portare una lettera a indice pari senza pensarci

Da $\sqrt[3]{x}$ si arriva a $\sqrt[12]{x^4}$, che ha indice *pari*: quel radicale, per costruzione, non è mai negativo. Ma $\sqrt[3]{x}$ per $x < 0$ è negativo.

Alzare l'indice da dispari a pari cambia il segno di quello che si scrive, se non si sta attenti. È il motivo per cui la proprietà invariante porta scritto $a \geq 0$ nell'enunciato.

7 Minimo comune indice e confronto

Metodo 7.1: Ridurre allo stesso indice:

1. Si **semplifica** ogni radicale: partire da forme non ridotte fa venire indici più grandi del necessario.
2. Si calcola il **m.c.m. degli indici**: è il minimo comune indice (m.c.i.).

3. Si applica la **proprietà invariante** a ciascuno: l'esponente del radicando si moltiplica per il quoziente fra il nuovo indice e quello vecchio.

Serve per moltiplicare, dividere e **confrontare**.

Esempio Svolto 7.1: Tre radicali allo stesso indice:

Ridurre allo stesso indice $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{5}$.

1. Il **m.c.i.** Gli indici sono 2, 3, 4:

$$\text{m.c.m.}(2, 3, 4) = 12$$

2. La **trasformazione**. Ogni esponente si moltiplica per $12 \div (\text{indice vecchio})$:

$$\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729} \quad \sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16} \quad \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$

3. Il **confronto**. Stesso indice, vince il radicando più grande:

$$\sqrt[12]{16} < \sqrt[12]{125} < \sqrt[12]{729}$$

$$\sqrt[3]{2} < \sqrt[4]{5} < \sqrt{3}$$

Esatto, e senza aver mai scritto un decimale.

Esempio Svolto 7.2: $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{3}$: quale è più grande?:

Il m.c.m. fra 2 e 3 è 6:

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8} \quad \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$$

Stesso indice: vince il radicando più grande.

$$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$$

Senza decimali, e senza calcolatrice: è un confronto *esatto*.

Esempio Svolto 7.3: Con i coefficienti davanti:

$2\sqrt{3}$ o $3\sqrt{2}$? Si portano dentro e si confrontano i radicandi:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12} \quad 3\sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$

$$2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$$

8 Moltiplicazione e divisione

Formula 8.1: Prodotto e quoziente:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

Con indici **diversi** si passa prima al minimo comune indice.

Le condizioni: $a, b \geq 0$ se l'indice è pari.

Esempio Svolto 8.1: Stesso indice, e indici diversi:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} &= \sqrt{16} = 4 \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} &= \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{8 \cdot 25} = \sqrt[6]{200} \\ \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} &= \sqrt[3]{27} = 3 \end{aligned}$$

9 Trasporto dentro e fuori

Formula 9.1: Portare un fattore dentro la radice:

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \quad (a \geq 0)$$

Se $a < 0$ il segno **resta fuori**:

$$-a \sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^n b} \quad (a > 0)$$

perché una radice di indice pari non è mai negativa.

Esempio Svolto 9.1: Dentro e fuori:

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2} &= \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18} \\ 2\sqrt[3]{5} &= \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{40} \\ -3\sqrt{2} &= -\sqrt{18} \quad \text{non} \quad \sqrt{-18} \end{aligned}$$

L'ultima riga è il punto: $\sqrt{-18}$ non esiste, mentre $-3\sqrt{2}$ è un numero perfettamente normale, circa $-4,24$.

Trasportare dentro un segno meno

Con indice **pari** il segno non entra mai: $-2\sqrt{3} = -\sqrt{12}$, e il meno resta davanti alla radice.

Con indice **dispari** invece entra: $-2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{-40}$, perché la radice cubica di un negativo esiste. Sono due regole diverse, e si distinguono guardando l'indice.

10 Potenza di un radicale e radice di radice

Formula 10.1: Le due regole:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

La prima: l'esponente entra sul radicando. La seconda: gli indici si **moltiplicano**, non si sommano.

Esempio Svolto 10.1: Le due regole in azione:

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{2})^4 &= \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2} \\ \sqrt{\sqrt[3]{7}} &= \sqrt[2 \cdot 3]{7} = \sqrt[6]{7} \\ \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{5}}} &= \sqrt[3 \cdot 2 \cdot 2]{5} = \sqrt[12]{5} \end{aligned}$$

Indici che si sommano

$\sqrt{\sqrt[3]{7}}$ non è $\sqrt[5]{7}$. Con gli esponenti frazionari si vede subito perché:

$$\left(7^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{6}}$$

Le potenze di potenze moltiplicano gli esponenti, quindi gli indici si moltiplicano.

11 Somme di radicali

Formula 11.1: Radicali simili: Due radicali sono **simili** se hanno lo **stesso indice** e lo **stesso radicando**. Solo quelli si sommano, e si sommano i coefficienti:

$$a\sqrt[n]{c} + b\sqrt[n]{c} = (a + b)\sqrt[n]{c}$$

Se non sono simili, la somma **si lascia indicata**: è già la risposta.

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

È l'errore più diffuso del capitolo, e si smonta con due numeri:

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{ma} \quad \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

La radice **non** si distribuisce sulle somme. Si distribuisce sui prodotti e sui quozienti, e su niente altro.

Esempio Svolto 11.1: Prima si semplifica, poi si somma:

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - \sqrt{12}$$

I primi due sono simili; il terzo sembra diverso, ma non lo è:

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Adesso sono tutti e tre simili:

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

La morale: prima si porta ogni radicale in forma normale, poi si guarda chi è simile a chi. Farlo nell'ordine opposto fa perdere metà delle semplificazioni.

Esempio Svolto 11.2: Una somma che non si semplifica:

$$2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$$

Indici uguali, radicandi diversi: **non sono simili** e la scrittura è già la risposta. Non c'è niente da fare, e «non c'è niente da fare» è una risposta legittima.

12 Prodotti notevoli e scomposizioni

Formula 12.1: Somma per differenza, con i radicali:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

Le radici **spariscono**. È il motivo per cui questo prodotto è il cuore della razionalizzazione del paragrafo dopo.

Esempio Svolto 12.1: Tre prodotti notevoli:

$$(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 5 - 2 = 3$$

$$(\sqrt{3} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 = 7 - 2\sqrt{21} + 3 = 10 - 2\sqrt{21}$$

Nel secondo e nel terzo il doppio prodotto *resta* irrazionale: è solo nella somma per differenza che sparisce tutto.

Esempio Svolto 12.2: Scomporre usando i radicali:

Con i radicali si scompongono anche polinomi che nei razionali sono irriducibili:

$$x^2 - 5 = x^2 - (\sqrt{5})^2 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = (x - \sqrt{3})^2$$

13 Razionalizzazione

Razionalizzare vuol dire togliere le radici dal *denominatore*. Non è una semplificazione — il numero non cambia — ma è la forma in cui il risultato si scrive, e c'è un motivo pratico: due frazioni razionalizzate si confrontano a occhio, due non razionalizzate no.

Formula 13.1: I tre casi:

Denominatore	Si moltiplica per	Sotto resta
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	a
$\sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[n]{a^{n-m}}$	a
$\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$	$\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ (il coniugato)	$a - b$

Sempre sopra e sotto: si moltiplica per una frazione che vale 1, quindi il numero non cambia.

Esempio Svolto 13.1: Caso 1: un solo radicale di indice 2:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

Esempio Svolto 13.2: Caso 2: indice qualsiasi:

Sotto c'è $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^1}$: manca 2^2 per completare l'indice.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

La regola: si moltiplica per la radice del **complemento a n** dell'esponente.

Esempio Svolto 13.3: Caso 3: il coniugato:

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = \sqrt{3}+1$$

Sotto è sparita la radice grazie alla somma per differenza.

Moltiplicare per il denominatore invece che per il coniugato

Con $\sqrt{3}-1$ sotto, moltiplicare sopra e sotto per $\sqrt{3}-1$ dà $(\sqrt{3}-1)^2 = 4-2\sqrt{3}$: la radice c'è ancora, e in più adesso c'è un doppio prodotto.

Il coniugato è quello con il **segno in mezzo cambiato**, e serve proprio perché è l'unico che fa sparire tutto.

14 Radicali doppi

Formula 14.1: La formula del radicale doppio:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+d}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-d}{2}} \quad \text{con } d = \sqrt{a^2 - b}$$

Si può usare **solo se $a^2 - b$ è un quadrato perfetto**: altrimenti i due radicali che escono sono più complicati di quello di partenza, e tanto vale lasciarlo com'è.

Esempio Svolto 14.1: $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$:

Prima si porta il 2 dentro: $2\sqrt{6} = \sqrt{24}$, quindi $a = 5$ e $b = 24$.

$$a^2 - b = 25 - 24 = 1 \implies d = 1 \quad (\text{quadrato perfetto: si può})$$

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

Verifica, elevando al quadrato:

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6} \quad \checkmark$$

Esempio Svolto 14.2: $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$:

$4\sqrt{3} = \sqrt{48}$, quindi $a = 7$, $b = 48$ e $a^2 - b = 1$.

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7+1}{2}} - \sqrt{\frac{7-1}{2}} = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$

Controllo di buon senso: $2 - \sqrt{3} \approx 0,27$, ed è positivo — come dev'essere, perché è una radice quadrata.

Esempio Svolto 14.3: $\sqrt{5 + \sqrt{21}}$: **le due metà non sono intere:**

Qui il radicale è già scritto con la radice dentro, quindi $a = 5$ e $b = 21$ si leggono direttamente.

$$a^2 - b = 25 - 21 = 4 \implies d = 2 \quad \checkmark$$

$$\sqrt{5 + \sqrt{21}} = \sqrt{\frac{5+2}{2}} + \sqrt{\frac{5-2}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Le due metà sono **frazioni**, e va benissimo: la condizione è su $a^2 - b$, non sulla parità di $a \pm d$. Razionalizzando si scrive meglio:

$$\sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2} \quad \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\sqrt{5 + \sqrt{21}} = \frac{\sqrt{14} + \sqrt{6}}{2}$$

Usare la formula quando non si può

Con $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$: $a^2 - b = 9 - 5 = 4$, quadrato perfetto, si può. Con $\sqrt{3 + \sqrt{7}}$: $9 - 7 = 2$, che **non** è un quadrato perfetto, e la formula darebbe $\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}} + \dots$, cioè un radicale

doppio dentro un altro.

Il controllo su $a^2 - b$ si fa *prima*, e se non passa la risposta è «non si semplifica».

Dimenticare di portare dentro il coefficiente

La formula vuole $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, con la radice **nuda**. In $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ il 2 non è al posto giusto: va portato dentro, $2\sqrt{6} = \sqrt{24}$, e solo allora $b = 24$.

Chi legge $b = 6$ calcola $25 - 6 = 19$, che non è un quadrato, e conclude «non si semplifica» su un radicale che invece si semplifica benissimo.

15 Il radicale cubico doppio

Esiste anche per l'indice 3, ed è la versione avanzata: si riconduce $\sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}}$ alla forma $x \pm \sqrt{y}$.

Metodo 15.1: $\sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}}$ in quattro passi:

1. Si calcola $c = \sqrt[3]{a^2 - b}$.

Condizione: il metodo serve solo se c viene **razionale** — di solito intero.

2. Si cerca una radice razionale x dell'equazione cubica

$$4x^3 - 3cx - a = 0$$

con il teorema delle radici razionali (Ruffini).

3. Si ricava y dalla relazione

$$y = x^2 - c$$

4. Si scrive il risultato:

$$\sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}} = x \pm \sqrt{y}$$

Se al passo 1 o al passo 2 non si trova niente di razionale, il radicale non si semplifica e si lascia com'è.

Esempio Svolto 15.1: $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$:

Prima si porta dentro il coefficiente: $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$, quindi $a = 7$ e $b = 50$.

1. $c = \sqrt[3]{49 - 50} = \sqrt[3]{-1} = -1$, razionale ✓

2. L'equazione è

$$4x^3 - 3(-1)x - 7 = 0 \implies 4x^3 + 3x - 7 = 0$$

Le radici razionali si cercano fra i divisori di 7 diviso quelli di 4. Con $x = 1$: $4 + 3 - 7 = 0$

✓

$$3. y = x^2 - c = 1 - (-1) = 2$$

4.

$$\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

Verifica, elevando al cubo:

$$(1 + \sqrt{2})^3 = 1 + 3\sqrt{2} + 3 \cdot 2 + 2\sqrt{2} = 7 + 5\sqrt{2} \quad \checkmark$$

Esempio Svolto 15.2: $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}$:

$6\sqrt{3} = \sqrt{108}$, quindi $a = 10$, $b = 108$.

$$c = \sqrt[3]{100 - 108} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$4x^3 + 6x - 10 = 0 \implies x = 1 \quad \checkmark$$

$$y = 1 - (-2) = 3$$

$$\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$$

Perché la formula funziona

Si parte dalla risposta e si va all'indietro. Se $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = x + \sqrt{y}$, elevando al cubo:

$$a + \sqrt{b} = x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3xy + y\sqrt{y} = \underbrace{(x^3 + 3xy)}_{\text{parte razionale}} + \underbrace{(3x^2 + y)\sqrt{y}}_{\text{parte irrazionale}}$$

Uguagliando le due parti si ottiene un sistema in x e y , e sostituendo $y = x^2 - c$ ne esce proprio $4x^3 - 3cx - a = 0$.

Non serve rifare il conto ogni volta: serve sapere che la formula non viene dal nulla, e che il passo 2 è un'equazione di terzo grado risolta con Ruffini — uno strumento che si ha già.

16 Equazioni a coefficienti irrazionali

Un'equazione ha **coefficienti irrazionali** quando davanti all'incognita, o come termine noto, compare un radicale. L'incognita resta **fuori** dalla radice.

Formula 16.1: Non cambia niente, tranne i conti:

$$Ax + B = Cx + D \quad \text{con } A, B, C, D \text{ radicali}$$

È un'equazione di **primo grado** come tutte le altre: si portano le x da una parte e i numeri dall'altra, si raccoglie, si divide.

Le uniche due differenze: i conti si fanno con i radicali, e il risultato va **razionalizzato**.

Confonderla con un'equazione irrazionale

Sono due cose diverse, e si distinguono guardando **dov'è la x** :

$$\begin{array}{ll} \sqrt{2}x + 3 = \sqrt{8} & \text{coefficienti irrazionali: la } x \text{ è } \mathbf{fuori} \\ \sqrt{x+1} = 3 & \text{equazione } \mathbf{irrazionale}: \text{ la } x \text{ è } \mathbf{sotto} \end{array}$$

La prima si risolve come una qualunque di primo grado. La seconda si risolve elevando a potenza, e allora servono le condizioni e il controllo finale: è un altro capitolo, e in questo non si tocca.

Metodo 16.1: Equazione a coefficienti irrazionali, in quattro passi:

1. Si **semplifica** ogni radicale che compare: spesso i coefficienti diventano simili e il conto si accorcia.
2. Si portano i termini con la x a sinistra e i noti a destra.
3. Si **raccoglie** la x : resta $(\dots)x = (\dots)$.
4. Si divide, e si **razionalizza** il risultato.

Esempio Svolto 16.1: $\sqrt{3}x + \sqrt{12} = \sqrt{27}$:

1. **Semplifico i radicali.** $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ e $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

2. e 3. **Porto e raccolgo.**

$$\sqrt{3}x = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

4. **Divido.**

$$x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \mathbf{1}$$

Il risultato è *razionale*, e non è un caso raro: semplificando prima, i radicali spesso si cancellano.

Esempio Svolto 16.2: $\sqrt{2}x + 3 = 2\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2}x = 2\sqrt{2} - 3$$

$$x = \frac{2\sqrt{2} - 3}{\sqrt{2}}$$

Adesso si **razionalizza**, moltiplicando sopra e sotto per $\sqrt{2}$:

$$x = \frac{(2\sqrt{2} - 3)\sqrt{2}}{2} = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2} = 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Verifica: $\sqrt{2}\left(2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + 3 = 2\sqrt{2} - 3 + 3 = 2\sqrt{2} \checkmark$

Esempio Svolto 16.3: $(1 + \sqrt{2})x = 1$: il coniugato serve anche qui:

$$x = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1$$

Quando il coefficiente della x è un **binomio**, la divisione finale è una razionalizzazione col coniugato: è il paragrafo 13 che torna.

Quando l'equazione non ha soluzione, o ne ha infinite

Vale quello che vale sempre in primo grado, e si riconosce allo stesso modo: se dopo aver raccolto resta

$$0 \cdot x = 0 \rightarrow \text{ogni } x \quad 0 \cdot x = k \neq 0 \rightarrow S = \emptyset$$

Con i radicali il coefficiente può *sembrare* non nullo e invece esserlo: $\sqrt{8} - 2\sqrt{2} = 0$. Semplificare per primo (passo 1) serve anche a questo.

17 Disequazioni a coefficienti irrazionali

Il metodo è identico a quello delle equazioni, con **una** attenzione in più — la stessa di tutte le disequazioni, ma qui più insidiosa.

Formula 17.1: Dividendo per un negativo il verso si rovescia:

$$ax > b \implies \begin{cases} x > \frac{b}{a} & \text{se } a > 0 \\ x < \frac{b}{a} & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Non è una regola nuova. La novità è che con i radicali **il segno del coefficiente non si vede a occhio**.

Dare per positivo un coefficiente irrazionale

$\sqrt{2} - \sqrt{3}$ è **negativo**: $\sqrt{2} \approx 1,41$ e $\sqrt{3} \approx 1,73$. Chi non lo controlla divide senza rovesciare il verso e scrive l'insieme *esattamente complementare* a quello giusto.

Il modo esatto di controllarlo è quello del paragrafo 7: si portano i due radicali allo stesso indice e si confrontano i radicandi. $\sqrt{2}$ contro $\sqrt{3}$ è immediato; su $2\sqrt{3}$ contro $3\sqrt{2}$ già non lo è — $\sqrt{12}$ contro $\sqrt{18}$ sì.

Esempio Svolto 17.1: $\sqrt{2}x > 4$:

Il coefficiente $\sqrt{2}$ è **positivo**: il verso resta.

$$x > \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$S = x > 2\sqrt{2}$$

Esempio Svolto 17.2: $-\sqrt{3}x > 6$:

Il coefficiente $-\sqrt{3}$ è **negativo**: il verso si rovescia.

$$x < \frac{6}{-\sqrt{3}} = -\frac{6\sqrt{3}}{3} = -2\sqrt{3}$$

$$S = x < -2\sqrt{3}$$

Il segno meno davanti alla radice è la cosa da guardare per prima, prima ancora di fare il conto.

Esempio Svolto 17.3: $(\sqrt{2} - \sqrt{3})x < 1$:

Prima il segno del coefficiente. $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ perché $2 < 3$, quindi $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ è **negativo**: il verso si rovescia.

$$x > \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

Si razionalizza col coniugato $\sqrt{2} + \sqrt{3}$:

$$x > \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2 - 3} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{-1}$$

$$S = x > -\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

Due segni da girare, uno dopo l'altro: quello del verso e quello del denominatore. È l'esercizio in cui si sbaglia di più di tutto il capitolo.

Un controllo che costa dieci secondi

Trovata la risposta, si prende un numero che ci sta dentro e si sostituisce nella disequazione di partenza. Per $x > 2\sqrt{2} \approx 2,83$ si prova con $x = 3$: $\sqrt{2} \cdot 3 \approx 4,24 > 4 \checkmark$
Se il verso fosse stato rovesciato per sbaglio, questa prova lo trova subito — e trova anche l'errore di segno nel denominatore.

18 Sistemi di disequazioni a coefficienti irrazionali

Metodo 18.1: Come tutti i sistemi di disequazioni:

1. Si risolve **ciascuna** disequazione per conto suo, con l'attenzione al segno del coefficiente.
2. Si scrivono le soluzioni sulla **retta**, una riga per disequazione.
3. La soluzione del sistema è l'**intersezione**: dove valgono *tutte insieme*.

L'unica cosa nuova è il passo 3: per intersecare bisogna sapere quale fra due estremi *irrazionali* è il maggiore.

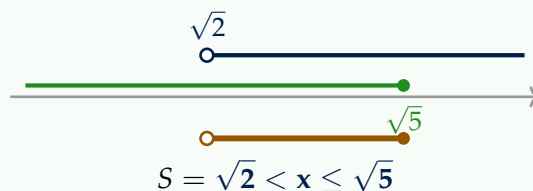
Esempio Svolto 18.1: $\begin{cases} \sqrt{2}x > 2 \\ x \leq \sqrt{5} \end{cases} :$

Prima disequazione. Coefficiente positivo, verso invariato:

$$x > \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Seconda. È già risolta: $x \leq \sqrt{5}$.

Intersezione. Serve sapere se $\sqrt{2} < \sqrt{5}$: sì, perché $2 < 5$ e gli indici sono uguali.



Confrontare gli estremi a occhio

Per intersecare bisogna ordinare gli estremi, e $\sqrt{2}$ contro $\sqrt[3]{3}$ non si ordina guardandoli: si portano allo stesso indice.

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{8} \quad \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9} \quad \implies \quad \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$$

Sbagliare quest'ordine dà un intervallo vuoto dove ce n'era uno pieno, o viceversa — e la risposta sembra ragionevole lo stesso.

Esempio Svolto 18.2: Un sistema che non ha soluzioni:

$$\begin{cases} x > \sqrt{5} \\ x < \sqrt{2} \end{cases}$$

Il primo chiede x maggiore di $\approx 2,24$, il secondo minore di $\approx 1,41$: non c'è nessun numero che faccia tutte e due.

$$S = \emptyset$$

La conclusione si scrive dopo aver *ordinato* gli estremi, non dopo averli guardati: qui è facile, ma con $\sqrt[3]{10}$ e $\sqrt{5}$ già no.

19 Sistemi di equazioni a coefficienti irrazionali

Un sistema lineare non cambia natura se i coefficienti sono irrazionali: si risolve con gli stessi metodi. Cambia solo che i conti si fanno con i radicali, e che alla fine il risultato va **razionalizzato**.

Esempio Svolto 19.1: $\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 3 \\ x - y = \sqrt{2} \end{cases} :$

Sommando membro a membro sparisce y :

$$(\sqrt{2} + 1)x = 3 + \sqrt{2} \implies x = \frac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$$

Si razionalizza col coniugato $\sqrt{2} - 1$:

$$x = \frac{(3 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)}{2 - 1} = 3\sqrt{2} - 3 + 2 - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 1$$

e dalla seconda equazione $y = x - \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$.

Verifica nella prima: $\sqrt{2}(2\sqrt{2} - 1) + \sqrt{2} - 1 = 4 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = 3 \checkmark$

Perché la verifica qui conta doppio

Con i radicali un errore di segno non salta all'occhio come con gli interi: $2\sqrt{2} - 1$ e $1 - 2\sqrt{2}$ si somigliano. Sostituire e vedere tornare 3 è l'unico controllo che non si può ingannare.

20 Domini di funzioni irrazionali

Questo è l'unico paragrafo del capitolo in cui l'incognita torna **sotto** la radice — e non per risolvere un'equazione, ma per dire dove la scrittura ha senso. È il paragrafo 3 applicato a una funzione intera.

Metodo 20.1: Il dominio di una funzione irrazionale:

1. Ogni radicando di **indice pari** ≥ 0 .
2. Ogni denominatore $\neq 0$.
3. Un radicale **a denominatore**: radicando > 0 , non ≥ 0 .
4. Si **intersecano** tutte le condizioni: il dominio è dove valgono *tutte insieme*.

Esempio Svolto 20.1: $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$:

Una condizione sola, ma su una frazione: serve la **regola dei segni**.

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0 \quad \text{con } x \neq -2$$

	-2	1	
$x-1$	-	-	0 +
$x+2$	-	0 +	+
quoziente	+	$\neq$	- 0 +

$$D = (-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$$

Il -2 è escluso perché annulla il denominatore; l' 1 è incluso perché lì la frazione vale zero, e $\sqrt{0}$ esiste.

Esempio Svolto 20.2: $y = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{4-x}}$:

Due condizioni, e la seconda è **stretta** perché la radice sta sotto una barra:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 4 \end{cases} \quad D = [1; 4)$$

21 Potenze con esponente razionale

Fin qui l'esponente di una potenza è stato un numero *intero*: a^3 vuol dire $a \cdot a \cdot a$, e a^{-3} vuol dire $1/a^3$. Che senso può avere $2^{\frac{3}{5}}$? «Due moltiplicato per sé stesso tre quinti di volta» non vuol dire niente.

La risposta non si inventa: si **sceglie** l'unica definizione che lascia in piedi le proprietà delle potenze. Se $2^{\frac{3}{5}}$ deve comportarsi come una potenza, deve valere

$$\left(2^{\frac{3}{5}}\right)^5 = 2^{\frac{3}{5} \cdot 5} = 2^3$$

cioè $2^{\frac{3}{5}}$ è quel numero che elevato alla quinta dà 2^3 . Ma quel numero ha già un nome: è $\sqrt[5]{2^3}$.

Formula 21.1: Esponente razionale positivo:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad a \geq 0, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad n \neq 0$$

Il **denominatore** dell'esponente diventa l'**indice**, il **numeratore** l'esponente del **radicando**.

Esempio Svolto 21.1: Avanti e indietro:

$$7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49} \quad 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3 \quad \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$$

Le due scritture sono la stessa cosa detta in due lingue. Si passa dall'una all'altra ogni volta che conviene: la lingua delle potenze ha regole più corte.

Formula 21.2: Esponente razionale negativo:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^m} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad a > 0$$

Il meno all'esponente **ribalta la frazione**, esattamente come con gli esponenti interi. Qui però serve $a > 0$ stretto, e non $a \geq 0$: con $a = 0$ ci sarebbe uno zero a denominatore.

Esempio Svolto 21.2: Con l'esponente negativo:

$$5^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = \sqrt[4]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{\sqrt[4]{125}} \quad 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

E con una frazione dentro, il meno la rovescia:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{b}{a}\right)^m} \quad \frac{a}{b} > 0$$

Metodo 21.1: Le cinque proprietà, che sono le stesse di sempre:

Proprietà	Esempio
$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$	$3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^2 = 9$
$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$	$2^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$
$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$	$\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{5}$
$a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (ab)^{\frac{m}{n}}$	$3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6}$
$a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = (a : b)^{\frac{m}{n}}$	$14^{\frac{3}{5}} : 7^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{8}$

Non c'è niente di nuovo da imparare: sono le proprietà delle potenze già note, con esponenti che ora sono frazioni. Le somme e i prodotti all'esponente sono **somme e prodotti di frazioni**.

Esempio Svolto 21.3: Perché la proprietà invariantiva è una regola sulle frazioni:

La proprietà invariantiva dei radicali, riletta con gli esponenti, è la proprietà invariantiva delle frazioni:

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n \cdot m]{a^{p \cdot m}} \iff a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{p \cdot m}{n \cdot m}}$$

A destra si sta solo dicendo che $\frac{p}{n}$ e $\frac{p \cdot m}{n \cdot m}$ sono la stessa frazione. Semplificare un radicale è **ridurre ai minimi termini** l'esponente.

Formula 21.3: Il dizionario completo:

Con i radicali	Con le potenze
$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n \cdot m]{a^{p \cdot m}}$	$a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{p \cdot m}{n \cdot m}}$
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$	$a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} = (a : b)^{\frac{1}{n}}$
$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = a^{\frac{p}{n}}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}}$

Ogni riga di sinistra è un teorema che si è dovuto dimostrare; ogni riga di destra è una proprietà delle potenze già nota. Per questo, quando un'espressione con i radicali si

ingarbuglia, conviene tradurla.

Esempio Svolto 21.4: La stessa espressione nei due modi:

Semplifichiamo $\sqrt[3]{\sqrt{x^4}} : \sqrt[6]{x^5}$, con $x > 0$.

Con i radicali. Prima la radice di radice, poi il minimo comune indice:

$$\sqrt[3]{\sqrt{x^4}} = \sqrt[6]{x^4} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[6]{x^4} : \sqrt[6]{x^5} = \sqrt[6]{x^{-1}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$$

Con le potenze. Si sommano e si sottraggono frazioni, e basta:

$$\left(x^{\frac{4}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{5}{6}} = x^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{5}{6}} = x^{\frac{2}{3} - \frac{5}{6}} = x^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$$

Stesso risultato. La seconda strada è più corta perché non serve ricordare nessuna regola sui radicali: serve saper sommare frazioni.

La base negativa manda tutto a monte

Nella definizione c'è scritto $a \geq 0$, e non è una prudenza da manuale: con $a < 0$ le proprietà **smettono di valere**. Basta un esempio. Le frazioni $\frac{3}{5}$ e $\frac{6}{10}$ sono la stessa, quindi $(-2)^{\frac{3}{5}}$ e $(-2)^{\frac{6}{10}}$ dovrebbero essere lo stesso numero. Invece:

$$(-2)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-2)^3} = \sqrt[5]{-8} < 0 \quad (-2)^{\frac{6}{10}} = \sqrt[10]{(-2)^6} = \sqrt[10]{64} > 0$$

Uno negativo e uno positivo. Non c'è modo di aggiustarlo: per questo la potenza a esponente razionale si definisce **solo** per base positiva o nulla, e $(-5)^{\frac{1}{8}}$ semplicemente non esiste.

Attenzione: $\sqrt[5]{-8}$ invece esiste benissimo. Non è la stessa cosa — il radicale con indice dispari accetta radicandi negativi, la scrittura con l'esponente frazionario no.

0 elevato a un esponente negativo

$0^{-\frac{2}{3}}$ non esiste: ribaltando si otterrebbe $\frac{1}{\sqrt[3]{0}}$, cioè uno zero a denominatore. Con l'esponente *positivo* invece $0^{\frac{2}{3}} = 0$ va bene. È la stessa differenza fra $a \geq 0$ e $a > 0$ nelle due definizioni: si legge in due secondi e si dimentica in uno.

22 Riepilogo: che cosa vuol dire «risultato esatto»

Formula 22.1: Forma normale di un radicale: Un risultato è scritto bene quando:

1. il radicando **non ha fattori** che si possano portare fuori;
2. l'**indice è il più piccolo possibile**;
3. il **denominatore è razionalizzato**;
4. i radicali **simili sono stati sommati**.

Finché una delle quattro non è a posto, l'esercizio non è finito.

Il numero con la virgola non è una risposta

$\sqrt{2} \approx 1,414$ è un'*approssimazione*: è utile per capire l'ordine di grandezza, e va benissimo come controllo di buon senso — se un conto dà $-3\sqrt{2}$ e il risultato dovrebbe essere positivo, l'errore si vede subito.

Ma la risposta di un esercizio di algebra è $\sqrt{2}$. Scrivere 1,414 butta via informazione: da 1,414 non si torna indietro, da $\sqrt{2}$ sì.

Dove si va da qui

Il capitolo successivo sono le **equazioni di secondo grado**, e la loro formula risolutiva ha una radice dentro:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tutto quello che si è imparato qui — semplificare, razionalizzare, riconoscere quando una radice non esiste — serve lì a ogni riga. Il segno del radicando prende un nome nuovo, *discriminante*, e diventa la domanda che decide quante soluzioni ci sono.

Indice analitico

coefficienti irrazionali, 22
condizioni di esistenza, 7
coniugato, 17

dominio, 28

esponente razionale, 29

forma normale, 10

indice del radicale, 5

minimo comune indice, 13

numeri reali, 3
numero irrazionale, 3

proprietà invariantiva, 9

radicale cubico doppio, 21
radicale doppio, 19
radicale letterale, 12
radicali simili, 16
radicando, 5
radice di un radicale, 16
radice n -esima, 5
razionalizzazione, 18

segno di un radicale, 8
sistema di disequazioni, 26

trasporto di un fattore, 15