

FORMULARIO: SISTEMI NON LINEARI

In ogni riquadro: il metodo, la riga **QUANDO** che dice a quale sistema si applica, e un esempio con i numeri. La risposta è sempre un insieme di **coppie**.

1 Prima di cominciare

1.1 La risposta è una coppia

$$S = \{(x_1; y_1), (x_2; y_2)\}$$

Punto e virgola dentro la coppia (la virgola è il separatore decimale), e l'**ordine conta**: (2;3) e (3;2) sono due soluzioni diverse.

QUANDO sempre. Trovare i numeri non basta: bisogna dire quale x va con quale y , e ogni y si ricava dalla *stessa* sostituzione che ha dato la sua x .

ESEMPIO

Da $\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 6 \end{cases}$ escono i numeri 3, -2, 2, -3; le coppie giuste sono **(3;2)** e **(-2;-3)**.
(3;-3) usa gli stessi numeri e **non** è soluzione: nella seconda darebbe -9, non 6.

1.2 Il grado del sistema

$$\text{grado} = (\text{grado } 1^{\text{a}} \text{ eq.}) \times (\text{grado } 2^{\text{a}} \text{ eq.})$$

- retta e conica: $1 \times 2 = 2$;
- due coniche: $2 \times 2 = 4$.

Dice quante coppie **al massimo**: possono essere meno, mai di più.

QUANDO prima di risolvere, per sapere che cosa aspettarsi — e alla fine, per capire se ne hai perse per strada. È il controllo che prende il ramo dimenticato negli omogenei.

ESEMPIO

Un sistema di grado 4 da cui escono due coppie non è per forza sbagliato, ma è il momento di chiedersi se hai seguito tutti i rami.

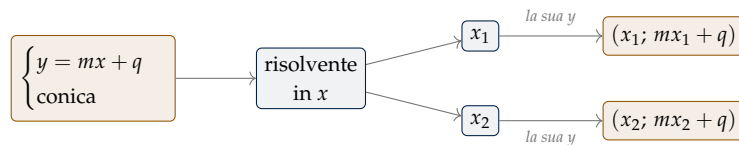
Dei quattro metodi ne resta uno

Metodo		Perché
sostituzione	sì	mettere $7 - x$ al posto di y è lecito qualunque cosa ci sia intorno: non chiede niente al grado
confronto	a volte	comodo se tutte e due sono già $y = \dots$; ma è la sostituzione travestita
riduzione	no	somma le equazioni per far sparire un'incognita, e x^2 con x non si sommano: non sparisce niente
Cramer	no	vuole una matrice dei coefficienti, e in $xy = 6$ non c'è nessun coefficiente da scrivere

Non è che riduzione e Cramer «funzionano male»: non si applicano proprio, e il motivo è che sono costruiti sulla linearità.

2 Il metodo

2.1 Sostituzione, in quattro passi



QUANDO c'è almeno un'equazione di primo grado. Si ricava **da quella**, non dalla conica: ricavare $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ mette in mano una radice, un $\pm$ e un radicando di cui discutere il segno.

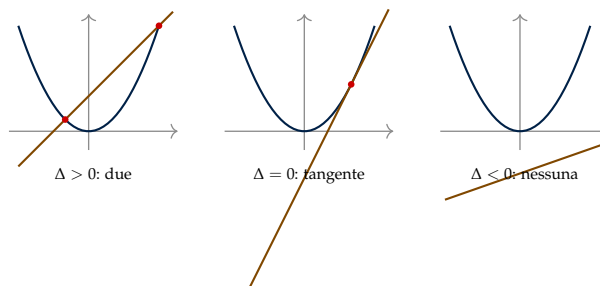
ESEMPIO

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 - 1 \end{cases} : x - 1 = x^2 - 1 \text{ dà } x(x - 1) = 0, \text{ cioè } x = 0 \text{ e } x = 1; \text{ le } y \text{ vengono da } y = x - 1:$$

$$S = \{(0; -1), (1; 0)\}.$$

Ogni x torna nella **stessa** relazione: è lì che nasce l'accoppiamento.

2.2 Quante coppie: il Δ della risolvente



QUANDO «per quali k la retta è tangente», «quante soluzioni ha», e ogni volta che vuoi sapere l'esito senza finire i conti.

ESEMPIO

Una radice doppia dà **una** coppia, non due uguali: S è un insieme, e un insieme non contiene due volte lo stesso elemento. Che la radice fosse doppia si racconta dicendo che la retta è *tangente*.

3 Le famiglie con un metodo proprio

3.1 Simmetrici: somma e prodotto

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases} \implies \boxed{t^2 - st + p = 0}$$

Le due radici sono le due coordinate, e le coppie sono $(t_1; t_2)$ e $(t_2; t_1)$: **scambiate**.

QUANDO scambiando x con y il sistema resta lo stesso. Succede quasi sempre nei problemi su rettangoli e su coppie di numeri, perché lì le due incognite hanno lo stesso ruolo.

ESEMPIO

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} : t^2 - 5t + 6 = 0 \text{ dà } 2 \text{ e } 3, \text{ quindi } S = \{(2; 3), (3; 2)\}.$$

Se ne trovi una, ce n'è un'altra. L'unica eccezione è $t_1 = t_2$: lì la coppia scambiata è sé stessa.

3.2 Le identità che riportano a s e p

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= s^2 - 2p & (x - y)^2 &= s^2 - 4p \\ x^3 + y^3 &= s^3 - 3ps & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{s}{p} \quad (p \neq 0) \end{aligned}$$

QUANDO il sistema è simmetrico ma non è già scritto con $x + y$ e xy . Queste quattro lo riportano lì — l'ultima è quella che rende simmetrici tanti sistemi fratti.

ESEMPIO

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} : \text{ da } 25 = 49 - 2p \text{ viene } p = 12, \text{ e } t^2 - 7t + 12 = 0 \text{ dà } S = \{(3; 4), (4; 3)\}.$$

3.3 Omogenei: si scompone e si seguono tutti i rami

Un'equazione è **omogenea** se tutti i termini hanno lo stesso grado. Si scompone in fattori di primo grado e si apre in rami:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = (x - y)(x - 2y) = 0 \implies x = y \text{ oppure } x = 2y$$

Ogni ramo si sostituisce nell'altra equazione; le soluzioni sono l'**unione**.

QUANDO nessuna equazione è di primo grado e una ha tutti i termini dello stesso grado.

ESEMPIO

Con $x^2 + y^2 = 20$: il ramo $x = y$ dà $(\pm\sqrt{10}; \pm\sqrt{10})$, il ramo $x = 2y$ dà $(4; 2)$ e $(-4; -2)$. Sono quattro coppie, cioè il grado del sistema.

3.4 Non si divide per y^2

Per scomporre l'omogenea viene comodo dividere per y^2 e studiare $t = \frac{x}{y}$. Funziona, e **perde il caso** $y = 0$: dividere vuol dire dare per scontato che y non sia nullo, e nessuno l'ha detto.

QUANDO ogni volta che stai per «semplificare» un'omogenea. Si **raccoglie**, non si divide — è la stessa regola delle equazioni spurie.

ESEMPIO

$$\begin{cases} xy + y^2 = 0 \\ x^2 = 9 \end{cases} : \text{raccogliendo, } y(x + y) = 0 \text{ dà } y = 0 \text{ oppure } y = -x. \text{ Il primo ramo porta } (3; 0) \text{ e } (-3; 0), \text{ che dividendo per } y^2 \text{ sarebbero sparite.}$$

3.5 Sistemi che si scompongono

$$\begin{cases} A \cdot B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 0 \\ C = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono l'**unione** di quelle dei due sottosistemi.

QUANDO un'equazione è (o diventa) un prodotto uguale a zero. È la legge di annullamento del prodotto applicata a un sistema.

ESEMPIO

$$\begin{cases} (x - y)(x + y - 4) = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} : \text{il ramo } x = y \text{ dà } (2; 2) \text{ e } (-2; -2), \text{ il ramo } x + y = 4 \text{ dà ancora } (2; 2).$$

Unione, senza ripetere: $S = \{(-2; -2), (2; 2)\}$.

4 Fratti, problemi, parametri**4.1 Sistemi fratti: tre passi**

1. **C.E.**: annulla i denominatori ed escludi quei valori;
2. porta in **forma intera** e risolvi;
3. **confronta**: le coppie che annullano un denominatore **non sono accettabili** e si scartano.

QUANDO compare l'incognita a denominatore. Non c'è un metodo nuovo: c'è un passo in più alla fine.

ESEMPIO

$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$ con C.E. $x \neq 0, y \neq 0$: diventa $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ e dà $S = \{(2;3), (3;2)\}$, tutte e due accettabili.

Una coppia scartata **va detta**: la differenza fra «non c'era» e «l'ho scartata» non si legge dal foglio.

4.2 Problemi

1. due incognite, e si dice **che cosa** sono;
2. **condizioni** subito ($x > 0, x \in \mathbb{N}$);
3. **due relazioni** dal testo, una per equazione — se ne trovi una sola non è un sistema;
4. risolvi e **scarta** le coppie non accettabili.

QUANDO il testo è in italiano. Perimetro e area, somma e prodotto, due numeri di cui si sa qualcosa: quasi sempre viene un simmetrico.

ESEMPIO

Rettangolo di perimetro 34 e area 60: $\begin{cases} x + y = 17 \\ xy = 60 \end{cases}$ dà 5 e 12, cioè lati **5 e 12**.

(5;12) e (12;5) sono due soluzioni del *sistema* e lo *stesso* rettangolo: la risposta al problema è una sola.

4.3 Grado superiore al secondo

Il metodo resta la **sostituzione**; quello che cambia è la risolvente, che diventa di grado tre o quattro e va **scomposta**: prima si raccoglie, poi si provano i divisori del termine noto.

QUANDO una delle equazioni è di grado maggiore del secondo. Non esiste una formula: la strada è sempre la scomposizione, come nelle disequazioni di grado superiore.

ESEMPIO

$\begin{cases} y = x \\ x^3 = 4x \end{cases} : x^3 - 4x = x(x-2)(x+2) = 0$ dà $x = 0, \pm 2$, e con $y = x$ le coppie sono **(-2;-2), (0;0), (2;2)**.

Tre coppie, cioè il grado del sistema (1×3). Su $x^3 - 4x$ nessuno userebbe Ruffini: si raccoglie x e resta una differenza di quadrati.

4.4 Quale strada, e quando

Se il sistema ha...	allora...
un'equazione di primo grado	sostituzione , ricavando da quella
solo $x + y$ e xy (o $x^2 + y^2$)	simmetrico : $t^2 - st + p = 0$, coppie scambiate
termini tutti dello stesso grado	omogeneo : scomponi e segui tutti i rami
un prodotto uguale a zero	si spezza in due sottosistemi
denominatori con l'incognita	C.E. per prime, poi forma intera
un parametro	si discute il segno di Δ della risolvente

QUANDO davanti a un sistema che non sai da dove prendere. La domanda che decide è sempre la prima: c'è un'equazione di primo grado?

ESEMPIO

Se una equazione è **sia** omogenea sia simmetrica — per esempio $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$ — si prova la strada dell'**omogeneo**: funziona sempre quando c'è un'omogenea, mentre quella dei simmetrici non sa che farsene di $x^2 + y^2$ e xy nella stessa equazione.

4.5 Sistemi con un parametro

Si sostituisce tenendo il parametro, si scrive il Δ della risolvente e si **discute il suo segno** con una disequazione:

$$\Delta > 0 \rightarrow \text{due} \quad \Delta = 0 \rightarrow \text{una (tangente)} \quad \Delta < 0 \rightarrow \text{nessuna}$$

QUANDO «per quali k il sistema ha due soluzioni», «per quali k la retta è tangente». Il passo finale è una disequazione di secondo grado: è il capitolo precedente, usato come strumento.

ESEMPIO

$$\begin{cases} y = x + k \\ y = x^2 \end{cases} : \text{la risolvente è } x^2 - x - k = 0 \text{ con } \Delta = 1 + 4k. \text{ Tangente per } k = -\frac{1}{4}, \text{ secante per } k > -\frac{1}{4}, \text{ esterna per } k < -\frac{1}{4}.$$

4.6 I controlli che costano dieci secondi

- **sostituisci ogni coppia in TUTTE le equazioni**: una che verifica solo la prima non è una soluzione;
- **conta** le coppie e confrontale col grado del sistema;
- se è **simmetrico**, controlla che ci siano tutte e due le scambiate;
- se è **omogeneo** o si scompone, controlla di aver seguito **tutti** i rami;
- se è **fratto**, nessuna coppia accettata annulla un denominatore.

QUANDO sempre, prima di consegnare. L'errore di accoppiamento non si vede rileggendo: si vede solo sostituendo.

ESEMPIO

Il primo controllo è quello che vale di più, perché prende l'errore in cui il **conto è giusto e la risposta è sbagliata** — ed è l'unico di questo capitolo che non si nota rifacendo i passaggi.