

SISTEMI NON LINEARI

03 - ALGEBRA2

Dove dei quattro metodi ne resta uno, e la risposta è una coppia

Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima di partire	3
2	Il salto: dei quattro metodi ne resta uno	3
3	Coppie, e il grado di un sistema	4
4	Il metodo: sostituzione	6
5	Quando le soluzioni sono irrazionali	7
6	Nessuna coppia, una coppia sola	7
7	Sistemi simmetrici	8
8	Sistemi omogenei	10
9	Sistemi che si scompongono	11
10	Sistemi fratti	12
11	Grado superiore al secondo	13
12	Che cosa si sta cercando, sul piano	14
13	Problemi	15
14	Sistemi con un parametro	16
15	Quale strada, e quando	16

1 Cosa serve prima di partire

Cosa devi già sapere

- **Sistema, e sua soluzione.** Un sistema è un insieme di equazioni che devono valere **insieme**. Una soluzione è una **coppia** $(x; y)$ che le verifica tutte: non due numeri qualunque, ma quei due, accoppiati così.
- **Metodo di sostituzione.** Si ricava un'incognita da un'equazione e la si mette nell'altra. Da $y = x - 1$ e $x + y = 5$ viene $x + (x - 1) = 5$, cioè $x = 3$, e poi $y = 2$.
- **Equazione di secondo grado.** $ax^2 + bx + c = 0$ si risolve con $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, dove $\Delta = b^2 - 4ac$: due soluzioni se $\Delta > 0$, una doppia se $\Delta = 0$, nessuna reale se $\Delta < 0$.
- **Somma e prodotto.** Se x_1 e x_2 risolvono $x^2 - sx + p = 0$, allora $x_1 + x_2 = s$ e $x_1 x_2 = p$. Letta al contrario: due numeri di somma 5 e prodotto 6 sono le soluzioni di $t^2 - 5t + 6 = 0$, cioè 2 e 3.
- **Legge di annullamento del prodotto.** Un prodotto è nullo se e solo se lo è uno dei fattori: da $(x - y)(x + y - 4) = 0$ viene $x = y$ oppure $x + y = 4$.
- **C.E. di una frazione.** Il denominatore non si annulla mai: in $\frac{1}{x}$ si scrive $x \neq 0$ prima di tutto.
- **Il piano cartesiano.** Una coppia $(x; y)$ è un **punto**, e un'equazione in x e y è una linea. Questo capitolo, visto da lì, cerca punti di incontro fra linee.

2 Il salto: dei quattro metodi ne resta uno

Nei sistemi lineari i metodi erano quattro — sostituzione, confronto, riduzione, Cramer — e si sceglieva il più comodo. Qui la scelta non c'è più.

Esempio Svolto 2.1: Perché la riduzione non funziona:

Proviamo a risolvere

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

con il metodo di **riduzione**, cioè sommando le due equazioni membro a membro:

$$x + y + x^2 + y^2 = 32$$

È una scrittura *vera* e completamente **inservibile**: non ha eliminato nessuna incognita, che era tutto il motivo per cui si sommava.

Il punto è che la riduzione funziona perché x e x si sommano dando $2x$. Ma x^2 e x non si sommano: sono termini diversi, e restano tutti e due.

Con la **sostituzione**, invece: da $y = 7 - x$,

$$x^2 + (7 - x)^2 = 25 \implies 2x^2 - 14x + 24 = 0 \implies x^2 - 7x + 12 = 0$$

e da qui $x = 3$ oppure $x = 4$, cioè $(3; 4)$ e $(4; 3)$.

Riduzione e Cramer qui non si applicano

Non è che «funzionano male»: non si applicano proprio, e il motivo è strutturale.

La **riduzione** somma le equazioni per far sparire un'incognita, e ci riesce solo se quell'incognita compare allo stesso grado in tutte e due. Con un x^2 da una parte e una x dall'altra non sparisce niente.

Cramer vuole una *matrice dei coefficienti*: una tabella in cui ogni incognita ha il suo posto. In $xy = 6$ non c'è nessun coefficiente da scrivere — xy non è né «tanti x » né «tanti y », è un termine nuovo. La matrice non si può nemmeno costruire.

Resta la **sostituzione**, che non chiede niente al grado: mettere $7 - x$ al posto di y è lecito qualunque cosa ci sia intorno.

E il confronto?

Il metodo del confronto — ricavare la *stessa* incognita da tutte e due le equazioni e uguagliare — ogni tanto si può usare, e in un caso è comodissimo: quando tutte e due le equazioni sono già scritte nella forma $y = \dots$

Da $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$ viene subito $x^2 = 2x + 3$. Ma è la sostituzione travestita: si sta mettendo un'espressione di y al posto dell'altra.

3 Coppie, e il grado di un sistema

Due cose da fissare prima di cominciare, e sono quelle che dicono se una risposta è finita.

Formula 3.1: La soluzione è una coppia ordinata: Una soluzione di un sistema in due incognite è una **coppia** $(x; y)$, scritta con il **punto e virgola** — la virgola è già il separatore decimale.

L'ordine conta: $(2; 3)$ e $(3; 2)$ sono due soluzioni *diverse*. L'insieme delle soluzioni si scrive

$$S = \{(2; 3), (3; 2)\}$$

e se non ce ne sono, $S = \emptyset$.

Le soluzioni non sono numeri sciolti

Risolvendo un sistema saltano fuori dei numeri: 2, 3, e magari ancora 2 e 3. Scrivere «le soluzioni sono 2 e 3» non è una risposta: non dice *quale* x va con *quale* y .

E non è una pignoleria. In $\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 6 \end{cases}$ i numeri che escono sono 3, -2, 2, -3; le coppie giuste sono (3; 2) e (-2; -3). Le coppie (3; -3) e (-2; 2) usano gli stessi quattro numeri e **non sono soluzioni**: provale nella seconda equazione e viene -9 e -4, non 6.

Formula 3.2: Il grado di un sistema: Il grado di un sistema è il **prodotto** dei gradi delle sue equazioni.

- Una retta e una conica: $1 \times 2 = 2$.
- Due coniche: $2 \times 2 = 4$.

Il grado dice **quante soluzioni al massimo**: un sistema di grado 2 non può avere tre coppie. Possono essercene meno — anche zero — ma non di più.

A che cosa serve saperlo prima

A capire se hai finito. Se stai risolvendo un sistema di grado 4 e ne hai trovate due, non è detto che sia sbagliato — ma è il momento di chiedersi se non ne hai perse due per strada, che nei sistemi omogenei (par. 8) succede continuamente.

Esempio Svolto 3.1: Il grado di quattro sistemi:

a. $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ Primo grado per secondo: grado **2**, al massimo due coppie.

b. $\begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$ Secondo per secondo: grado **4**.

c. $\begin{cases} y = x \\ y = x^3 \end{cases}$ Primo per terzo: grado **3**. Il grado è il **prodotto**, non la somma — sommando verrebbe 4, ed è sbagliato.

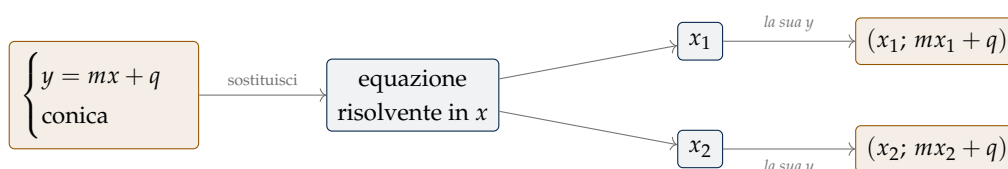
d. $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$ Grado **4**, ma le coppie reali sono **due**: (0;0) e (1;1).

L'ultimo dice la cosa che conta: il grado è un **massimo**, non una promessa. Serve a sapere quando fermarsi a cercare, non a sapere quante risposte scrivere.

4 Il metodo: sostituzione

Metodo 4.1: Quattro passi:

1. **Ricava** un'incognita dall'equazione di **primo grado** — quella più semplice, di solito quella con un coefficiente 1.
2. **Sostituisci** nell'altra equazione: resta un'equazione in una sola incognita, che si chiama **equazione risolvente**.
3. **Risolvi** la risolvente: le sue soluzioni sono le *prime* coordinate.
4. Per ogni soluzione trovata, **torna** alla relazione del passo 1 e ricava la seconda coordinata.



Il disegno dice la cosa che conta: ogni x torna nella **stessa** relazione e si porta dietro la *sua* y . È lì che nasce l'accoppiamento, e chi salta quella freccia accoppia a caso.

Esempio Svolto 4.1: $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 - 1 \end{cases} :$

1-2. Sostituzione. La prima è già risolta in y : la metto nella seconda.

$$x - 1 = x^2 - 1$$

3. Risolvente. $x^2 - x = 0$, cioè $x(x - 1) = 0$:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

4. Le seconde coordinate, ognuna da $y = x - 1$:

$$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = -1 \quad x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 0$$

$$\mathbf{S} = \{(0; -1), (1; 0)\}$$

Controllo. $(0; -1)$: la prima dà $-1 = -1 \checkmark$, la seconda $-1 = -1 \checkmark$. $(1; 0)$: $0 = 0 \checkmark$ e $0 = 0 \checkmark$. Si sostituisce in **tutte e due**: una coppia che verifica solo la prima non è una soluzione del sistema.

Ricava dalla lineare, non dalla conica

Nel sistema $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ si può essere tentati di ricavare y dalla seconda: $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$.

Si può, ma ci si mette una radice in mano — e con lei un $\pm$ da trascinare, un radicando di cui discutere il segno e un'elevazione al quadrato che rischia di aggiungere soluzioni false. Ricavando dalla **prima**, $y = 7 - x$, non c'è niente di tutto questo.

La regola: si ricava sempre dall'equazione di **grado più basso**, e fra due incognite si sceglie quella col coefficiente più semplice.

5 Quando le soluzioni sono irrazionali

Il metodo non cambia; cambia come si scrive la risposta.

Esempio Svolto 5.1: $\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$:

Sostituendo: $x^2 + x^2 = 4$, cioè $x^2 = 2$ e $x = \pm\sqrt{2}$. Ognuna si porta dietro la sua y , che qui è uguale a x :

$$S = \{(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (\sqrt{2}; \sqrt{2})\}$$

Controllo. $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$: la prima dà $\sqrt{2} = \sqrt{2} \checkmark$; la seconda $2 + 2 = 4 \checkmark$.

Gli estremi non si arrotondano

Scrivere $(1,41; 1,41)$ è una risposta **sbagliata**: quella coppia, sostituita, dà $1,9881 + 1,9881 = 3,9762$, che non è 4.

Una soluzione approssimata *non* è una soluzione: il controllo la rifiuta. Il radicale si tiene fino alla fine, e l'approssimazione si scrive accanto con il simbolo $\approx$ solo se serve a capire dove cade il punto.

6 Nessuna coppia, una coppia sola

Il discriminante dell'equazione risolvente dice **quante** soluzioni ha il sistema, e lo dice prima di finire i conti.

Formula 6.1: Il discriminante della risolvente: Per un sistema fra una retta e una conica, detta Δ il discriminante dell'equazione risolvente:

- $\Delta > 0$: **due** coppie distinte;
- $\Delta = 0$: **una** coppia sola (il caso di **tangenza**);
- $\Delta < 0$: **nessuna** coppia reale, $S = \emptyset$.

Esempio Svolto 6.1: I tre casi, sulla stessa parabola:

Prendiamo $y = x^2$ e tre rette orizzontali diverse.

- $y = 4$: $x^2 = 4$, $\Delta > 0$, due coppie $(-2; 4)$ e $(2; 4)$.
- $y = 0$: $x^2 = 0$, $\Delta = 0$, una coppia sola $(0; 0)$: la retta è **tangente**.
- $y = -1$: $x^2 = -1$, $\Delta < 0$: un quadrato non è mai negativo, $S = \emptyset$.

Controllo del caso b: la coppia $(0; 0)$ verifica tutte e due le equazioni ✓, e non ce n'è una seconda perché la risolvente ha una radice doppia — non perché ne abbiamo persa una.

Una radice doppia dà una coppia sola, non due uguali

Con $\Delta = 0$ la risolvente ha «due soluzioni coincidenti», e la tentazione è scrivere $S = \{(1; 1), (1; 1)\}$.

Un insieme non contiene due volte lo stesso elemento: la risposta è $S = \{(1; 1)\}$, **una** coppia. Che la radice fosse doppia è un'informazione sull'*equazione*, e si racconta dicendo che la retta è tangente — non raddoppiando la risposta.

7 Sistemi simmetrici

Un sistema è **simmetrico** se scambiando x con y resta lo stesso. Sono i sistemi in cui compaiono solo la somma e il prodotto delle due incognite, e hanno un metodo tutto loro — più rapido della sostituzione.

Formula 7.1: Somma e prodotto: Se il sistema si può scrivere

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$$

allora x e y sono le **due soluzioni** dell'equazione

$$t^2 - st + p = 0$$

e le coppie sono $(t_1; t_2)$ e $(t_2; t_1)$: **scambiate**.

Metodo 7.1: Perché funziona: È il teorema di somma e prodotto letto al contrario. Se x e y hanno somma s e prodotto p , allora sono due numeri la cui somma è s e il cui prodotto è p — cioè esattamente le radici di $t^2 - st + p = 0$.

E siccome l'equazione non distingue quale radice sia x e quale y , tutte e due gli abbinamenti vanno bene: da lì le **due** coppie scambiate. ■

Esempio Svolto 7.1: $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$:

Qui $s = 5$ e $p = 6$, quindi

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \implies \Delta = 25 - 24 = 1 \implies t_1 = 2, t_2 = 3$$

$$\mathbf{S} = \{(2; 3), (3; 2)\}$$

Controllo. $(2; 3)$: $2 + 3 = 5 \checkmark$, $2 \cdot 3 = 6 \checkmark$. E $(3; 2)$ funziona per lo stesso motivo — è il sistema a essere simmetrico.

Se ne trovi una, ce n'è un'altra

In un sistema simmetrico le soluzioni vanno **a coppie scambiate**: se $(2; 3)$ è soluzione, lo è anche $(3; 2)$. Chi ne scrive una sola ha risolto metà esercizio.

L'unica eccezione è quando le due coordinate coincidono: se $t_1 = t_2 = 2$, la coppia $(2; 2)$ scambiata è ancora $(2; 2)$, e la risposta è una sola. Succede quando l'equazione in t ha $\Delta = 0$.

Esempio Svolto 7.2: Quando compare $x^2 + y^2$:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

La seconda non è né s né p , ma ci si riporta con un'identità che vale sempre:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = s^2 - 2p$$

Quindi $25 = 49 - 2p$, da cui $p = 12$. Con $s = 7$ e $p = 12$:

$$t^2 - 7t + 12 = 0 \implies t_1 = 3, t_2 = 4 \implies \mathbf{S} = \{(3; 4), (4; 3)\}$$

Controllo. $3 + 4 = 7 \checkmark$, $9 + 16 = 25 \checkmark$.

Le identità che tornano utili

Tutte si ricavano dai prodotti notevoli, e servono a riportare un sistema simmetrico alla forma $s-p$:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= s^2 - 2p \\(x - y)^2 &= s^2 - 4p \\x^3 + y^3 &= s^3 - 3ps \\\frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{s}{p} \quad (p \neq 0)\end{aligned}$$

L'ultima è quella che rende simmetrici tanti sistemi fratti.

8 Sistemi omogenei

Un'equazione è **omogenea** se tutti i suoi termini hanno lo stesso grado: $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ lo è (tutti di grado due), $x^2 + y = 0$ no.

Metodo 8.1: Si scompone e si seguono tutti i rami:

1. L'equazione omogenea si **scompone** in fattori di primo grado: $x^2 - 3xy + 2y^2 = (x - y)(x - 2y)$.
2. Per la legge di annullamento del prodotto, si apre in **due rami**: $x = y$ oppure $x = 2y$.
3. **Ogni ramo** si sostituisce nell'altra equazione, e dà le sue coppie.
4. Le soluzioni del sistema sono l'**unione** di quelle dei rami.

Esempio Svolto 8.1: $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$:

Grado del sistema: $2 \times 2 = 4$, quindi possono esserci fino a **quattro** coppie. Teniamolo a mente.

1-2. Scomposizione. $x^2 - 3xy + 2y^2 = (x - y)(x - 2y) = 0$, quindi $x = y$ oppure $x = 2y$.

3a. Ramo $x = y$: $y^2 + y^2 = 20$, cioè $y^2 = 10$ e $y = \pm\sqrt{10}$. Due coppie:

$$(\sqrt{10}; \sqrt{10}), \quad (-\sqrt{10}; -\sqrt{10})$$

3b. Ramo $x = 2y$: $4y^2 + y^2 = 20$, cioè $y^2 = 4$ e $y = \pm 2$, con $x = 2y$. Altre due coppie:

$$(4; 2), \quad (-4; -2)$$

4. Unione.

$$S = \{(-4; -2), (-\sqrt{10}; -\sqrt{10}), (\sqrt{10}; \sqrt{10}), (4; 2)\}$$

Sono **quattro**, esattamente il grado del sistema.

Controllo di $(4; 2)$: $16 - 24 + 8 = 0 \checkmark$, $16 + 4 = 20 \checkmark$.

Non si divide per y^2

Per scomporre l'omogenea viene comodo dividere tutto per y^2 e studiare $t = \frac{x}{y}$:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \implies t = 1 \text{ oppure } t = 2$$

Funziona, e **perde il caso** $y = 0$: dividere per y^2 vuol dire dare per scontato che y non sia nullo, e nessuno l'ha detto.

Nell'esempio qui sopra non cambia niente ($y = 0$ non è soluzione), ma in $\begin{cases} xy + y^2 = 0 \\ x^2 = 9 \end{cases}$

sì: raccogliendo, $y(x + y) = 0$ dà $y = 0$ oppure $y = -x$, e il primo ramo porta le coppie $(3; 0)$ e $(-3; 0)$, che dividendo per y^2 sarebbero sparite.

La regola è la stessa delle equazioni spurie: **si raccoglie, non si divide**.

9 Sistemi che si scompongono

A volte un'equazione del sistema è già — o diventa — un **prodotto uguale a zero**. Allora il sistema si spezza in due sistemi più semplici.

Metodo 9.1: Un sistema, due sottosistemi: Se un'equazione è $A \cdot B = 0$, allora

$$\begin{cases} A \cdot B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \quad \text{diventa} \quad \begin{cases} A = 0 \\ C = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

e le soluzioni del sistema di partenza sono l'**unione** delle soluzioni dei due.

Esempio Svolto 9.1: $\begin{cases} (x - y)(x + y - 4) = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$:

Primo sottosistema, $x = y$: $2x^2 = 8$, cioè $x = \pm 2$, e le coppie sono $(2; 2)$ e $(-2; -2)$.

Secondo sottosistema, $x + y = 4$: $x^2 + (4 - x)^2 = 8$, cioè $2x^2 - 8x + 8 = 0$ e $(x - 2)^2 = 0$: una coppia sola, $(2; 2)$.

Unione, senza ripetere quello che compare due volte:

$$S = \{(-2; -2), (2; 2)\}$$

Controllo di $(-2; -2)$: il primo fattore $x - y$ vale 0, quindi il prodotto è nullo ✓; $4 + 4 = 8$ ✓.

Un ramo solo è mezza risposta

Vale per gli omogenei e per gli scomponibili, ed è lo stesso errore: si trova $x = y$, si risolve quel sottosistema, si scrive la risposta e si dimentica l'altro fattore.

Il modo di accorgersene è il **grado**: se il sistema è di grado 4 e hai due coppie, guarda se hai seguito tutti i rami prima di consegnare.

10 Sistemi fratti

Non c'è un metodo nuovo: si scrivono le C.E., si porta il sistema in forma intera e si risolve come sempre. Quello che cambia è la fine.

Metodo 10.1: Tre passi, e il terzo non si salta:

1. **C.E.:** si annullano i denominatori e si escludono quei valori. Prima di tutto.
2. Si porta il sistema in **forma intera** e si risolve.
3. Si **confrontano** le coppie trovate con le C.E.: quelle che annullano un denominatore **non sono accettabili** e si scartano.

Esempio Svolto 10.1:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ x + y = 5 \end{cases} :$$

1. **C.E.** $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

2. **Forma intera.** Moltiplicando la prima per $6xy$:

$$6y + 6x = 5xy \implies 6(x + y) = 5xy$$

e siccome $x + y = 5$, resta $30 = 5xy$, cioè $xy = 6$. Il sistema è diventato

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

che è il simmetrico del paragrafo 7: $t^2 - 5t + 6 = 0$ dà 2 e 3.

3. Confronto. Né 2 né 3 annullano x o y : tutte e due le coppie sono accettabili.

$$S = \{(2; 3), (3; 2)\}$$

Controllo. $(2; 3)$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \checkmark$, e $2 + 3 = 5 \checkmark$.

Una coppia giusta può essere non accettabile

È lo stesso caso delle equazioni fratte: il conto è corretto, il risultato dell'equazione intera è giusto, e la risposta è sbagliata se ci si ferma lì.

Se una coppia annulla un denominatore, quella coppia **nel sistema di partenza non ha senso**: là dentro c'è una frazione che non esiste. Va scartata, e va detto che è stata scartata — perché la differenza fra «non c'era» e «l'ho scartata» non si legge dal foglio.

11 Grado superiore al secondo

Quando le equazioni sono di grado tre o quattro il metodo resta la sostituzione, e la risolvente diventa un'equazione di grado superiore: si scompone, con raccoglimento o con Ruffini.

Esempio Svolto 11.1: $\begin{cases} y = x \\ x^3 = 4x \end{cases} :$

La seconda è già in una incognita sola:

$$x^3 - 4x = 0 \implies x(x^2 - 4) = 0 \implies x(x - 2)(x + 2) = 0$$

da cui $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$, e ognuna si porta dietro $y = x$:

$$S = \{(-2; -2), (0; 0), (2; 2)\}$$

Il grado del sistema è $1 \times 3 = 3$, e le coppie sono tre: torna.

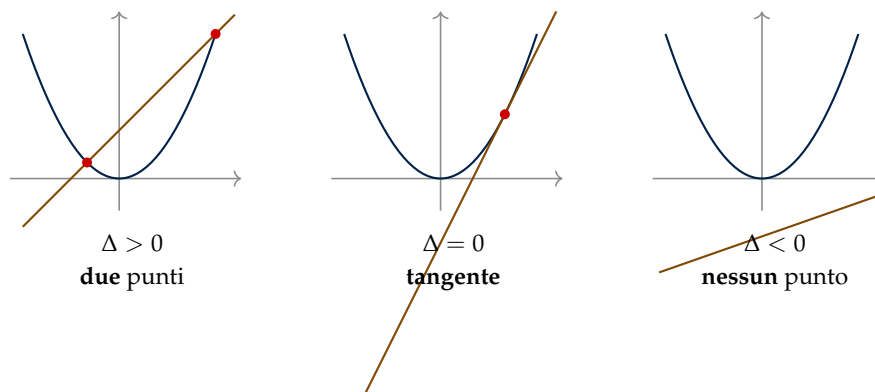
Controllo di $(-2; -2)$: la prima dà $-2 = -2 \checkmark$; la seconda $-8 = -8 \checkmark$.

Il raccoglimento prima di Ruffini

Su $x^3 - 4x$ nessuno userebbe Ruffini: si raccoglie x e resta una differenza di quadrati. Ruffini serve quando il raccoglimento non basta e i prodotti notevoli non si vedono — e si prova con i divisori del termine noto, come nelle disequazioni di grado superiore.

12 Che cosa si sta cercando, sul piano

Fin qui il capitolo è algebra. Ma un'equazione in x e y è una **linea** sul piano cartesiano, e una coppia è un **punto**: risolvere un sistema vuol dire trovare i punti che stanno su tutte e due le linee, cioè le loro **intersezioni**.



Il discriminante, visto

I tre disegni sono i tre casi del paragrafo 6, e adesso si vedono: Δ dell'equazione risolvente conta **quante volte le due linee si incontrano**.

«Tangente» smette di essere una parola strana: è la retta che tocca la curva in un punto solo, e algebricamente è il caso in cui la risolvente ha una radice doppia. Le due cose sono la stessa cosa, guardata da due parti.

Esempio Svolto 12.1: Retta e circonferenza:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

La seconda equazione è la circonferenza di centro l'origine e raggio 5. Sostituendo:

$$x^2 + (x + 1)^2 = 25 \implies 2x^2 + 2x - 24 = 0 \implies x^2 + x - 12 = 0$$

con $\Delta = 1 + 48 = 49 > 0$: la retta è **secante**, e i punti sono due.

$$x_1 = -4, x_2 = 3 \implies \mathbf{S} = \{(-4; -3), (3; 4)\}$$

Controllo di (3;4): $4 = 3 + 1 \checkmark$, $9 + 16 = 25 \checkmark$. (È la terna pitagorica 3-4-5: il punto sta sulla circonferenza di raggio 5.)

13 Problemi

Metodo 13.1: Dal testo al sistema:

1. **Due incognite**, e si dice *che cosa* sono.
2. **Condizioni** subito: lunghezze positive, numeri interi.
3. **Due relazioni** dal testo, una per equazione. Se ne trovi una sola, non è un sistema.
4. Risolvi, e **scarta** le coppie non accettabili.

Esempio Svolto 13.1: Il rettangolo:

Un rettangolo ha il perimetro di 34 cm e l'area di 60 cm². Quanto misurano i lati?

Incognite. x e y le due dimensioni, con $x > 0$ e $y > 0$.

Relazioni. Il perimetro è $2(x + y) = 34$, l'area è $xy = 60$:

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ xy = 60 \end{cases}$$

È simmetrico — e non è un caso: scambiare base e altezza dà lo stesso rettangolo.

Risoluzione. $t^2 - 17t + 60 = 0$, con $\Delta = 289 - 240 = 49$:

$$t = \frac{17 \pm 7}{2} \implies t_1 = 5, t_2 = 12$$

Ritorno al problema. Tutte e due positive, quindi accettabili; e le due coppie (5; 12) e (12; 5) descrivono lo *stesso* rettangolo, guardato per il verso lungo o per quello corto.

i lati misurano **5 cm e 12 cm**

Controllo. Perimetro $2(5 + 12) = 34 \checkmark$, area $5 \cdot 12 = 60 \checkmark$.

Quando le due coppie sono la stessa cosa

In matematica (5; 12) e (12; 5) sono due soluzioni diverse del sistema, e vanno scritte tutte e due. Nel *problema* sono lo stesso rettangolo, e la risposta è una sola.

Non è una contraddizione: il sistema e il problema fanno due domande diverse. La risposta al problema si scrive in italiano, e dice «i lati misurano 5 e 12» — non «le soluzioni sono due».

14 Sistemi con un parametro

Metodo 14.1: Discutere quante soluzioni ci sono:

1. Si sostituisce come sempre, tenendo il parametro nei conti.
2. Si scrive il **discriminante** dell'equazione risolvente: viene un'espressione nel parametro.
3. Si **discute il suo segno** con una disequazione: $\Delta > 0$ due soluzioni, $\Delta = 0$ una, $\Delta < 0$ nessuna.

Il passo 3 è una disequazione di secondo grado: è il capitolo precedente, usato come strumento.

Esempio Svolto 14.1: Per quali k la retta è tangente:

$$\begin{cases} y = x + k \\ y = x^2 \end{cases}$$

Sostituendo: $x^2 = x + k$, cioè $x^2 - x - k = 0$, con

$$\Delta = 1 + 4k$$

- $\Delta > 0$, cioè $k > -\frac{1}{4}$: due punti, retta **secante**;
- $\Delta = 0$, cioè $k = -\frac{1}{4}$: un punto, retta **tangente**;
- $\Delta < 0$, cioè $k < -\frac{1}{4}$: nessun punto, retta **esterna**.

Controllo del caso tangente. Con $k = -\frac{1}{4}$ la risolvente è $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$, cioè $(x - \frac{1}{2})^2 = 0$: una radice doppia, $x = \frac{1}{2}$, e la coppia è $(\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$. Sostituendo: $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \checkmark$ e $\frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2 \checkmark$.

15 Quale strada, e quando

Formula 15.1: La mappa del capitolo:

Se il sistema ha...	allora...
un'equazione di primo grado solo $x + y$ e xy (o $x^2 + y^2$)	sostituzione : ricava da quella, non dalla conica è simmetrico : $t^2 - st + p = 0$, e le coppie sono scambiate
un'equazione con tutti i termini dello stesso grado	è omogeneo : scomponi e segui tutti i rami
un prodotto uguale a zero	si spezza in due sottosistemi, e le soluzioni si uniscono
denominatori con l'incognita	C.E. per prime , poi forma intera, poi si scartano le non accettabili
un parametro	si discute il segno di Δ della risolvente

Esempio Svolto 15.1: Riconoscere la strada, senza risolvere:

Quattro sistemi, e per ognuno la prima mossa.

a. $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ C'è un'equazione di primo grado: **sostituzione**, ricavando da quella.

b. $\begin{cases} x + y = 9 \\ xy = 20 \end{cases}$ Solo somma e prodotto: **simmetrico**, con $t^2 - 9t + 20 = 0$.

c. $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ La prima ha tutti i termini di grado due: **omogeneo**, si scompone in due rami. (È anche simmetrica, ma la strada da provare è quella dell'omogeneo: funziona sempre, e quella dei simmetrici qui non saprebbe che farsene di $x^2 + y^2$ e xy insieme.)

d. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ x + y = 5 \end{cases}$ Denominatori con l'incognita: **C.E. per prime**, e poi diventa un simmetrico.

Controllo del riconoscimento: in tutti e quattro i casi la domanda che decide è la stessa — c'è un'equazione di primo grado? Se sì, sostituzione; se no, si guarda che forma hanno.

Dove si va da qui

Questo capitolo è, senza dirlo, il primo pezzo di geometria analitica delle coniche.

Trovare le intersezioni fra una retta e una parabola è quello che si fa per determinare le **tangenti** a una conica; la condizione $\Delta = 0$ della risolvente è la *condizione di tangenza*, e tornerà identica con la parabola (argomento 29) e con la circonferenza (argomento 30).

Quello che qui è un sistema da risolvere, lì diventa una domanda di geometria: quante volte questa retta incontra questa curva, e dove.