

EQUAZIONI IRRAZIONALI

Esercizi divisi per tipologia e difficoltà.

- indice dispari, radice uguale a un numero
- radice uguale a un binomio, due radicali, somme nulle
- metodo della verifica, doppio elevamento, fratte
- doppio elevamento e fratte difficili, dimostrazioni

L'incognita sta **sotto** il segno di radice, e per toglierla di lì bisogna elevare a potenza. Elevare però non è un principio di equivalenza: con esponente **pari** può aggiungere soluzioni che l'equazione di partenza non aveva — le **soluzioni estranee**. Da qui tutto il resto. Con l'indice **dispari** non c'è nessun problema: nessuna C.E., nessuna concordanza, si eleva e si risolve. Con l'indice **pari** ci sono due strade e portano allo stesso posto: il **sistema** $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^2 \end{cases}$, oppure il **metodo della verifica** — si eleva, si risolve, e ogni candidato si prova nell'equazione di partenza. Due cose da tenere in mente sempre. La verifica si fa **nell'equazione di partenza**: in quella elevata anche la soluzione estranea è vera. E se a secondo membro c'è un numero **negativo**, l'equazione è impossibile senza fare nessun conto. I procedimenti dei primi due esercizi di ogni blocco e di tutti quelli segnati ■□□□ stanno nel file delle soluzioni.

1. Condizioni di esistenza, e perché elevare non basta

Teoria: par. 2

■□□□ **Scrivi le condizioni di esistenza di ciascuna espressione. Guarda prima l'indice: se è dispari non c'è niente da imporre.**

1. $\sqrt{x-5}$ [$x \geq 5$]
2. $\sqrt{2x+8}$ [$x \geq -4$]
3. $\sqrt{3-x}$ [$x \leq 3$]
4. $\sqrt[3]{x-5}$ [nessuna: l'indice è **dispari**, e la radice esiste per ogni x]
5. $\sqrt[4]{x+1}$ [$x \geq -1$]
6. $\sqrt{-x-2}$ [$x \leq -2$]
7. $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ [$x > 1$: a denominatore la radice non può nemmeno valere zero]
8. $\sqrt{x^2+1}$ [nessuna: x^2+1 è positivo per ogni x]
9. $\sqrt[5]{2-x}$ [nessuna: indice dispari]
10. $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ [$x \neq 0$: l'indice è dispari, ma il denominatore resta]
11. $\sqrt{x^2}$ [nessuna: un quadrato non è mai negativo]
12. $\sqrt{4-x^2}$ [$-2 \leq x \leq 2$]

■□□□ **Rispondi senza risolvere: sono domande sul metodo, non conti.**

13. Perché $\sqrt{A(x)} = B(x)$ non equivale a $A(x) = [B(x)]^2$? [perché elevando al quadrato si perde il **segno**: da $B(x) < 0$ l'equazione di partenza non ha soluzione, ma quella elevata sì. Elevare a esponente pari **aggiunge** soluzioni.]
14. Perché con l'indice dispari il problema non c'è? [perché $y \mapsto y^3$ è **crescente su tutto** $\mathbb{R}$: a valori diversi corrispondono cubi diversi, e nessuna soluzione si aggiunge. Il quadrato invece manda 2 e -2 nello stesso posto.]
15. Che cos'è una **soluzione estranea**? [un valore che risolve l'equazione **elevata** ma non quella di **partenza**. Non è un errore di conto: è un effetto dell'elevamento, e va tolto con la concordanza o con la verifica.]
16. In $\sqrt{A(x)} = k$ con $k < 0$, quante soluzioni ci sono? [nessuna: una radice quadrata non è mai negativa. $S = \emptyset$, e non serve nemmeno elevare.]

17. Perché nel sistema $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^2 \end{cases}$ non si scrive anche $A(x) \geq 0$? [perché la seconda riga la contiene già: se $A = B^2$ allora A è un quadrato, e un quadrato non è mai negativo.]
18. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = 0$: perché non conviene elevare? [perché sono due quantità mai negative, e la loro somma è zero solo se sono **nulle tutte e due**. Un sistema di due equazioni risolve in due righe quello che due elevamenti farebbero in dieci.]
19. Elevare al quadrato può *togliere* soluzioni? [no, mai: se due numeri sono uguali lo sono anche i loro quadrati. Può solo **aggiungerne**, ed è per questo che alla fine si scarta, non si cerca.]
20. Perché la verifica si fa nell'equazione **di partenza**? [perché è quella che il testo chiede di risolvere. Sostituire nell'equazione elevata confermerebbe l'errore invece di scoprirlo: lì dentro la soluzione estranea è vera.]
21. $\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}$: basta scrivere $A(x) = B(x)$? [no: serve anche che i radicandi siano ≥ 0 . Basta imporlo a uno dei due, perché l'uguaglianza porta l'altro con sé.]
22. Dopo aver elevato, l'equazione ottenuta è di secondo grado. Le sue due radici sono sempre due soluzioni? [no: sono due **candidati**. Quante ne restano lo dice la concordanza, e possono restarne due, una o nessuna.]

2. Indice dispari: si eleva e basta

Teoria: par. 3

■□□□ L'indice è dispari: nessuna C.E., nessuna concordanza. Si eleva e si risolve.

- | | |
|---|--|
| 23. $\sqrt[3]{x-1} = 2$ [$x = 9$] | 39. $\sqrt[3]{6+3x-x^3} = -x$ [$x = -2$] |
| 24. $\sqrt[3]{x+4} = -3$ [$x = -31$] | 40. $\sqrt[3]{-9+3x-x^3} = -x$ [$x = 3$] |
| 25. $\sqrt[3]{2x} = 3$ [$x = \frac{27}{2}$] | 41. $\sqrt[3]{x-3} = 2$ [$x = 11$] |
| 26. $\sqrt[3]{x} = -2$ [$x = -8$] | 42. $\sqrt[3]{x+3} = -3$ [$x = -30$] |
| 27. $\sqrt[3]{x+5} = 1$ [$x = -4$] | 43. $\sqrt[5]{2x} = 3$ [$x = \frac{243}{2}$] |
| 28. $\sqrt[3]{3x-2} = -1$ [$x = \frac{1}{3}$] | 44. $\sqrt[3]{x+1} = -2$ [$x = -9$] |
| 29. $\sqrt[3]{x-8} = 0$ [$x = 8$] | 45. $\sqrt[3]{x+7} = 1$ [$x = -6$] |
| 30. $\sqrt[5]{x+2} = 2$ [$x = 30$] | 46. $\sqrt[7]{3x-4} = -1$ [$x = 1$] |
| 31. $\sqrt[5]{2x+3} = -1$ [$x = -2$] | 47. $\sqrt[3]{x-9} = 0$ [$x = 9$] |
| 32. $\sqrt[3]{x+1} = -1$ [$x = -2$] | 48. $\sqrt[3]{2x+3} = -1$ [$x = -2$] |
| 33. $\sqrt[3]{4x+4} = 2$ [$x = 1$] | 49. $\sqrt[5]{x+2} = -1$ [$x = -3$] |
| 34. $\sqrt[3]{x-3} = 3$ [$x = 30$] | 50. $\sqrt[3]{4x+6} = 2$ [$x = \frac{1}{2}$] |
| 35. $\sqrt[3]{4+x-x^3} = -x$ [$x = -4$] | 51. $\sqrt[3]{x-5} = 3$ [$x = 32$] |
| 36. $\sqrt[3]{1+x-x^3} = -x$ [$x = -1$] | 52. $\sqrt[7]{5x} = 2$ [$x = \frac{128}{5}$] |
| 37. $\sqrt[3]{8+2x-x^3} = -x$ [$x = -4$] | 53. $\sqrt[3]{x+6} = -2$ [$x = -14$] |
| 38. $\sqrt[3]{-2+x-x^3} = -x$ [$x = 2$] | 54. $\sqrt[3]{2x-6} = 1$ [$x = \frac{7}{2}$] |

55. $\sqrt[5]{3x+2} = -1$ [$x = -1$]

56. $\sqrt[3]{x} = 3$ [$x = 27$]

57. $\sqrt[3]{4x-2} = -2$ [$x = -\frac{3}{2}$]

58. $\sqrt[7]{2x+5} = 0$ [$x = -\frac{5}{2}$]

59. $\sqrt[3]{x} = 2$ [$x = 8$]

60. $\sqrt[3]{x+6} = -3$ [$x = -33$]

61. $\sqrt[5]{2x-2} = 3$ [$x = \frac{245}{2}$]

62. $\sqrt[3]{x-1} = -2$ [$x = -7$]

63. $\sqrt[7]{3x-1} = -1$ [$x = 0$]

64. $\sqrt[3]{x-6} = 0$ [$x = 6$]

65. $\sqrt[3]{2x+1} = -1$ [$x = -1$]

66. $\sqrt[5]{x} = -1$ [$x = -1$]

■□□ Ancora indice dispari, con radicandi e indici più vari. Attenzione: la radice cubica di un numero negativo esiste, e la risposta può essere negativa.

67. $\sqrt[3]{x-2} = 3$ [$x = 29$]

68. $\sqrt[7]{5x+3} = 2$ [$x = 25$]

69. $\sqrt[3]{x+4} = -2$ [$x = -12$]

70. $\sqrt[3]{2x-8} = 1$ [$x = \frac{9}{2}$]

71. $\sqrt[5]{3x} = -1$ [$x = -\frac{1}{3}$]

72. $\sqrt[3]{x+3} = 3$ [$x = 24$]

73. $\sqrt[3]{4x+1} = -2$ [$x = -\frac{9}{4}$]

74. $\sqrt[7]{2x+3} = 0$ [$x = -\frac{3}{2}$]

75. $\sqrt[3]{x-2} = 2$ [$x = 10$]

76. $\sqrt[5]{2x+1} = 3$ [$x = 121$]

77. $\sqrt[3]{x+2} = -2$ [$x = -10$]

78. $\sqrt[3]{x+3} = 1$ [$x = -2$]

79. $\sqrt[7]{3x-3} = -1$ [$x = \frac{2}{3}$]

80. $\sqrt[3]{2x+4} = -1$ [$x = -\frac{5}{2}$]

81. $\sqrt[5]{x+3} = -1$ [$x = -4$]

82. $\sqrt[3]{4x+2} = 2$ [$x = \frac{3}{2}$]

83. $\sqrt[3]{x-4} = 3$ [$x = 31$]

84. $\sqrt[7]{5x+1} = 2$ [$x = \frac{127}{5}$]

85. $\sqrt[3]{x+7} = -2$ [$x = -15$]

86. $\sqrt[3]{2x-5} = 1$ [$x = 3$]

87. $\sqrt[5]{3x-2} = -1$ [$x = \frac{1}{3}$]

88. $\sqrt[3]{x+1} = 3$ [$x = 26$]

89. $\sqrt[3]{4x-1} = -2$ [$x = -\frac{7}{4}$]

90. $\sqrt[7]{2x+6} = 0$ [$x = -3$]

91. $\sqrt[3]{x+1} = 2$ [$x = 7$]

92. $\sqrt[3]{x+2} = -3$ [$x = -29$]

93. $\sqrt[3]{2+x-x^3} = -x$ [$x = -2$]

94. $\sqrt[3]{-3+x-x^3} = -x$ [$x = 3$]

95. $\sqrt[3]{5+5x-x^3} = -x$ [$x = -1$]

96. $\sqrt[3]{-6+2x-x^3} = -x$ [$x = 3$]

97. $\sqrt[3]{7+x-x^3} = -x$ [$x = -7$]

98. $\sqrt[3]{10+2x-x^3} = -x$ [$x = -5$]

99. $\sqrt[3]{-12+3x-x^3} = -x$ [$x = 4$]

3. Radice uguale a un numero

Teoria: par. 5

■□□□ Guarda prima il segno del numero a secondo membro: se è negativo e l'indice è pari, l'equazione è impossibile e non si eleva nemmeno.

100. $\sqrt{x+1} = 4$ [$x = 15$]
 101. $\sqrt{x+3} = -2$ [$S = \emptyset$]
 102. $\sqrt{x-2} = 3$ [$x = 11$]
 103. $\sqrt{2x+1} = 5$ [$x = 12$]
 104. $\sqrt{x} = 7$ [$x = 49$]
 105. $\sqrt{3x-5} = -1$ [$S = \emptyset$]
 106. $\sqrt{x+6} = 0$ [$x = -6$]
 107. $\sqrt{x-4} = 6$ [$x = 40$]
 108. $\sqrt{2x-3} = 2$ [$x = \frac{7}{2}$]
 109. $\sqrt{x+9} = -4$ [$S = \emptyset$]
 110. $\sqrt{4x+1} = 3$ [$x = 2$]
 111. $\sqrt{x-7} = 5$ [$x = 32$]
 112. $\sqrt[4]{x+2} = 1$ [$x = -1$]
 113. $\sqrt[4]{x-1} = 2$ [$x = 17$]
 114. $\sqrt[4]{x+5} = -2$ [$S = \emptyset$]
 115. $\sqrt{-x+8} = 2$ [$x = 4$]
 116. $\sqrt{-2x+6} = 4$ [$x = -5$]
 117. $\sqrt{-x+3} = -1$ [$S = \emptyset$]
 118. $\sqrt{x+1} = -3$ [$S = \emptyset$]
 119. $\sqrt{x-2} = -2$ [$S = \emptyset$]
 120. $\sqrt[4]{3x-3} = -3$ [$S = \emptyset$]
 121. $\sqrt{2x+3} = -1$ [$S = \emptyset$]
 122. $\sqrt{4x+5} = -3$ [$S = \emptyset$]
 123. $\sqrt[6]{5x+3} = 2$ [$x = \frac{61}{5}$]
 124. $\sqrt{2x-4} = -1$ [$S = \emptyset$]
 125. $\sqrt{x-1} = 3$ [$x = 10$]
 126. $\sqrt[4]{2x+3} = -2$ [$S = \emptyset$]
 127. $\sqrt{x+3} = -3$ [$S = \emptyset$]
 128. $\sqrt{x} = -3$ [$S = \emptyset$]
 129. $\sqrt[6]{3x-1} = -1$ [$S = \emptyset$]
 130. $\sqrt{2x+5} = -1$ [$S = \emptyset$]
 131. $\sqrt{4x+7} = 2$ [$x = -\frac{3}{4}$]
 132. $\sqrt[4]{5x-2} = -4$ [$S = \emptyset$]
 133. $\sqrt{2x-9} = 1$ [$x = 5$]
 134. $\sqrt{x+1} = -4$ [$S = \emptyset$]
 135. $\sqrt[6]{2x+5} = 0$ [$x = -\frac{5}{2}$]
 136. $\sqrt{x+5} = -3$ [$S = \emptyset$]
 137. $\sqrt{x+2} = -2$ [$S = \emptyset$]
 138. $\sqrt[4]{3x+1} = -3$ [$S = \emptyset$]
 139. $\sqrt{2x} = -1$ [$S = \emptyset$]
 140. $\sqrt{4x+2} = -3$ [$S = \emptyset$]
 141. $\sqrt[6]{5x} = 2$ [$x = \frac{64}{5}$]
 142. $\sqrt{2x-7} = -1$ [$S = \emptyset$]
 143. $\sqrt{x+3} = 3$ [$x = 6$]
 144. $\sqrt[4]{2x+7} = -2$ [$S = \emptyset$]
 145. $\sqrt{x+7} = -3$ [$S = \emptyset$]
 146. $\sqrt{x-3} = -3$ [$S = \emptyset$]
 147. $\sqrt[6]{3x-4} = -1$ [$S = \emptyset$]
 148. $\sqrt{2x+2} = -1$ [$S = \emptyset$]
 149. $\sqrt{4x+4} = 2$ [$x = 0$]
 150. $\sqrt[4]{5x+2} = -4$ [$S = \emptyset$]
 151. $\sqrt{2x-5} = 1$ [$x = 3$]
 152. $\sqrt{x+5} = -4$ [$S = \emptyset$]
 153. $\sqrt[6]{2x+2} = 0$ [$x = -1$]
 154. $\sqrt{x+2} = -3$ [$S = \emptyset$]
 155. $\sqrt{x-1} = -2$ [$S = \emptyset$]

■ ■ ■ Ancora radice uguale a un numero, con indici diversi. Quando il numero è ≥ 0 la C.E. si soddisfa da

sola: il radicando diventa k^n , che non è mai negativo.

156. $\sqrt[4]{3x-2} = -3$ [$S = \emptyset$]

157. $\sqrt{2x+4} = -1$ [$S = \emptyset$]

158. $\sqrt{4x+6} = -3$ [$S = \emptyset$]

159. $\sqrt[6]{5x+4} = 2$ [$x = 12$]

160. $\sqrt{2x-10} = -1$ [$S = \emptyset$]

161. $\sqrt{x} = 3$ [$x = 9$]

162. $\sqrt[4]{2x+4} = -2$ [$S = \emptyset$]

163. $\sqrt{x+4} = -3$ [$S = \emptyset$]

164. $\sqrt[6]{3x} = -1$ [$S = \emptyset$]

165. $\sqrt{2x+6} = -1$ [$S = \emptyset$]

166. $\sqrt{4x+1} = 2$ [$x = \frac{3}{4}$]

167. $\sqrt[4]{5x-1} = -4$ [$S = \emptyset$]

168. $\sqrt{2x-8} = 1$ [$x = \frac{9}{2}$]

169. $\sqrt{x+2} = -4$ [$S = \emptyset$]

170. $\sqrt[6]{2x+6} = 0$ [$x = -3$]

171. $\sqrt{x+6} = -3$ [$S = \emptyset$]

172. $\sqrt[4]{3x-5} = -3$ [$S = \emptyset$]

173. $\sqrt{2x+1} = -1$ [$S = \emptyset$]

174. $\sqrt{4x+3} = -3$ [$S = \emptyset$]

175. $\sqrt[6]{5x+1} = 2$ [$x = \frac{63}{5}$]

176. $\sqrt{2x-6} = -1$ [$S = \emptyset$]

177. $\sqrt{x+4} = 3$ [$x = 5$]

178. $\sqrt[4]{2x+8} = -2$ [$S = \emptyset$]

179. $\sqrt{x-2} = -3$ [$S = \emptyset$]

180. $\sqrt[6]{3x-3} = -1$ [$S = \emptyset$]

181. $\sqrt{4x+5} = 2$ [$x = -\frac{1}{4}$]

182. $\sqrt[4]{5x+3} = -4$ [$S = \emptyset$]

183. $\sqrt{2x-4} = 1$ [$x = \frac{5}{2}$]

184. $\sqrt{x-1} = -4$ [$S = \emptyset$]

185. $\sqrt[6]{2x+3} = 0$ [$x = -\frac{3}{2}$]

4. Radice uguale a un binomio: il sistema

Teoria: par. 4

■ ■ ■ A secondo membro c'è la x : prima la concordanza $B(x) \geq 0$, poi si eleva. I valori che escono sono candidati: quanti ne restano lo dice la condizione.

186. $\sqrt{2x^2+x+4} = 2x-1$ [$x = 3$]

187. $\sqrt{4x-4} = x-1$ [$x = 1 \vee x = 5$]

188. $\sqrt{8x+1} = x+2$ [$x = 1 \vee x = 3$]

189. $\sqrt{-x+5} = x-3$ [$x = 4$]

190. $\sqrt{x^2-2x+1} = 2x+1$ [$x = 0$]

191. $\sqrt{x+10} = x-2$ [$x = 6$]

192. $\sqrt{-x^2+13} = x+1$ [$x = 2$]

193. $\sqrt{5x^2-12x+8} = 3x-2$ [$x = 1$]

194. $\sqrt{-x+6} = x-4$ [$x = 5$]

195. $\sqrt{x^2 - \frac{9}{2}x + 6} = 2x-3$ [$x = 2$]

196. $\sqrt{-x+3} = x+3$ [$x = -1$]

197. $\sqrt{8x+1} = x-1$ [$x = 10$]

198. $\sqrt{2x^2-2x-4} = 2x+2$ [$x = -1$]

199. $\sqrt{2x-2} = x-5$ [$x = 9$]

200. $\sqrt{2x+8} = x$ [$x = 4$]

201. $\sqrt{4x^2+x+11} = 3x+1$ [$x = 1$]

202. $\sqrt{2x-2} = x-1$ [$x = 1 \vee x = 3$]

203. $\sqrt{2x^2 + 6x + 13} = 2x - 1$ [$x = 6$]

204. $\sqrt{-2x^2 + 25x - 26} = x + 2$ [$x = 2 \vee x = 5$]

205. $\sqrt{4x + 9} = x - 3$ [$x = 10$]

206. $\sqrt{5x^2 - 4x + 36} = 3x - 2$ [$x = 4$]

207. $\sqrt{2x^2 + 2x + 25} = 2x + 1$ [$x = 3$]

208. $\sqrt{4x - 3} = x$ [$x = 1 \vee x = 3$]

209. $\sqrt{-x^2 + 37} = x - 5$ [$x = 6$]

210. $\sqrt{x^2 + 9x - 21} = 2x - 3$ [$x = 2 \vee x = 5$]

211. $\sqrt{12x + 1} = x + 1$ [$x = 0 \vee x = 10$]

212. $\sqrt{5x^2 + 14x + 33} = 3x + 1$ [$x = 4$]

213. $\sqrt{2x^2 + 6x + 28} = 2x + 2$ [$x = 3$]

214. $\sqrt{14x^2 - 22x + 28} = 4x - 4$ [$x = 6$]

215. $\sqrt{-2x^2 + 29x - 14} = x + 4$ [$x = 2 \vee x = 5$]

216. $\sqrt{3x^2 - 10x + 25} = 2x - 5$ [$x = 10$]

217. $\sqrt{-3x^2 + 6x + 33} = x - 1$ [$x = 4$]

218. $\sqrt{2x^2 - 6x + 25} = 2x - 1$ [$x = 3$]

219. $\sqrt{-x^2 + 4x + 21} = x - 3$ [$x = 6$]

5. Gli stessi, con il metodo della verifica

Teoria: par. 6

■■■□ Adesso senza condizioni iniziali: si eleva, si risolve, e ogni candidato si prova nell'equazione di partenza. Chi non la verifica si butta. Le due strade devono dare la stessa risposta.

220. $\sqrt{6x^2 + 9x - 26} = 3x - 2$ [$x = 2 \vee x = 5$]

221. $\sqrt{3x^2 + 14x + 1} = 2x + 1$ [$x = 0 \vee x = 10$]

222. $\sqrt{-3x^2 + 8x + 32} = x$ [$x = 4$]

223. $\sqrt{-x^2 - 12x + 49} = x - 5$ [$S = \emptyset$]

224. $\sqrt{3x^2 - 8x + 6} = 2x - 3$ [$x = 3$]

225. $\sqrt{-x^2 + 12x + 13} = x + 1$ [$x = -1 \vee x = 6$]

226. $\sqrt{6x^2 + 27x - 29} = 3x + 1$ [$x = 2 \vee x = 5$]

227. $\sqrt{3x^2 + 18x + 4} = 2x + 2$ [$x = 0 \vee x = 10$]

228. $\sqrt{-3x^2 + 4x + 36} = x - 2$ [$x = 4$]

229. $\sqrt{14x^2 - 34x + 40} = 4x - 4$ [$x = 3$]

230. $\sqrt{12x + 13} = x + 4$ [$x = 1 \vee x = 3$]

231. $\sqrt{2x^2 - 10x + 37} = 2x - 5$ [$x = 6$]

232. $\sqrt{-2x^2 + 19x - 29} = x - 1$ [$x = 2 \vee x = 5$]

233. $\sqrt{3x^2 + 6x + 1} = 2x - 1$ [$x = 10$]

234. $\sqrt{-3x^2 + 12x + 36} = x + 2$ [$x = -2 \vee x = 4$]

235. $\sqrt{-x^2 - 8x + 33} = x - 3$ [$x = 3$]

236. $\sqrt{8x^2 - 8x + 1} = 3x - 2$ [$x = 1 \vee x = 3$]

237. $\sqrt{2x^2 + 14x + 13} = 2x + 1$ [$x = 6$]

238. $\sqrt{-2x^2 + 21x - 30} = x$ [$x = 2 \vee x = 5$]

239. $\sqrt{-4x + 41} = 2x - 3$ [$x = 4$]

240. $\sqrt{-x^2 + 25} = x + 1$ [$x = 3$]

241. $\sqrt{8x^2 + 10x - 2} = 3x + 1$ [$x = 1 \vee x = 3$]

242. $\sqrt{2x^2 + 18x + 16} = 2x + 2$ [$x = -1 \vee x = 6$]

243. $\sqrt{-2x^2 + 17x - 26} = x - 2$ [$x = 2 \vee x = 5$]

244. $\sqrt{15x^2 - 22x + 16} = 4x - 4$ [$x = 10$]

245. $\sqrt{-3x^2 + 16x + 48} = x + 4$ [$x = -2 \vee x = 4$]

246. $\sqrt{2x^2 - 22x + 49} = 2x - 5$ [$x = 3$]

6. Due radicali dello stesso indice

Teoria: par. 7

■ ■ ■ □ Due radici dello stesso indice sono uguali se lo sono i radicandi. Con l'indice pari serve però che esistano: la C.E. si impone a uno dei due, e l'uguaglianza porta l'altro con sé.

247. $\sqrt{3x-2} = \sqrt{x+6} \quad [x=4]$

248. $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x+5} \quad [x=4]$

249. $\sqrt{x+2} = \sqrt{3x+10} \quad [S=\emptyset]$

250. $\sqrt{5x-3} = \sqrt{2x+6} \quad [x=3]$

251. $\sqrt{x-1} = \sqrt{2x-6} \quad [x=5]$

252. $\sqrt{4x+1} = \sqrt{x+10} \quad [x=3]$

253. $\sqrt{2x-5} = \sqrt{x-1} \quad [x=4]$

254. $\sqrt{3x+4} = \sqrt{x+8} \quad [x=2]$

255. $\sqrt{x+7} = \sqrt{2x+3} \quad [x=4]$

256. $\sqrt{2x} = \sqrt{x+4} \quad [x=4]$

257. $\sqrt[3]{x-3} = \sqrt[3]{4x+3} \quad [x=-2]$

258. $\sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{x+5} \quad [x=4]$

259. $\sqrt{x+1} = \sqrt{3x+9} \quad [S=\emptyset]$

260. $\sqrt{5x+2} = \sqrt{3x+8} \quad [x=3]$

261. $\sqrt{3x-5} = \sqrt{x+6} \quad [x=\frac{11}{2}]$

262. $\sqrt{5x-5} = \sqrt{2x+6} \quad [x=\frac{11}{3}]$

263. $\sqrt[3]{2x-6} = \sqrt[3]{x-1} \quad [x=5]$

264. $\sqrt[4]{4x-2} = \sqrt[4]{2x+1} \quad [x=\frac{3}{2}]$

265. $\sqrt{2x} = \sqrt{5x+4} \quad [S=\emptyset]$

266. $\sqrt{x+5} = \sqrt{3x+10} \quad [x=-\frac{5}{2}]$

267. $\sqrt[5]{4x-2} = \sqrt[5]{x+10} \quad [x=4]$

268. $\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+3} \quad [x=2]$

269. $\sqrt{5x+1} = \sqrt{3x+8} \quad [x=\frac{7}{2}]$

270. $\sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{2x+7} \quad [x=6]$

271. $\sqrt{2x+2} = \sqrt{x+5} \quad [x=3]$

272. $\sqrt[4]{x+1} = \sqrt[4]{2x-6} \quad [x=7]$

273. $\sqrt{3x+7} = \sqrt{x+8} \quad [x=\frac{1}{2}]$

274. $\sqrt{x-2} = \sqrt{3x+9} \quad [S=\emptyset]$

275. $\sqrt[5]{x+6} = \sqrt[5]{5x} \quad [x=\frac{3}{2}]$

276. $\sqrt{3x-3} = \sqrt{x+6} \quad [x=\frac{9}{2}]$

277. $\sqrt[3]{2x-4} = \sqrt[3]{x-1} \quad [x=3]$

278. $\sqrt{2x+2} = \sqrt{x+4} \quad [x=2]$

279. $\sqrt[4]{4x} = \sqrt[4]{2x+1} \quad [x=\frac{1}{2}]$

280. $\sqrt{2x-5} = \sqrt{5x+4} \quad [S=\emptyset]$

281. $\sqrt{x} = \sqrt{3x+10} \quad [S=\emptyset]$

282. $\sqrt[5]{4x} = \sqrt[5]{x+10} \quad [x=\frac{10}{3}]$

283. $\sqrt{5x+3} = \sqrt{3x+8} \quad [x=\frac{5}{2}]$

284. $\sqrt[3]{3x+3} = \sqrt[3]{2x+7} \quad [x=4]$

285. $\sqrt{2x+4} = \sqrt{x+5} \quad [x=1]$

286. $\sqrt[4]{x-4} = \sqrt[4]{2x-6} \quad [S=\emptyset]$

■ ■ ■ □ Ancora due radicali. Qui il candidato a volte c'è ma rende i radicandi negativi: allora si scarta, e la risposta è l'insieme vuoto.

287. $\sqrt{3x+2} = \sqrt{x+8} \quad [x=3]$

288. $\sqrt{x} = \sqrt{3x+9} \quad [S=\emptyset]$

289. $\sqrt[5]{x+8} = \sqrt[5]{5x} \quad [x=2]$

290. $\sqrt{3x-1} = \sqrt{x+6} \quad [x=\frac{7}{2}]$

291. $\sqrt{5x-1} = \sqrt{2x+6} \quad [x=\frac{7}{3}]$

292. $\sqrt[3]{2x-2} = \sqrt[3]{x-1} \quad [x=1]$

293. $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+4} \quad [x=7]$

294. $\sqrt[4]{4x-5} = \sqrt[4]{2x+1} \quad [x=3]$

295. $\sqrt{2x-3} = \sqrt{5x+4} \quad [S=\emptyset]$

296. $\sqrt[5]{4x+2} = \sqrt[5]{x+10} \quad [x=\frac{8}{3}]$

297. $\sqrt{x+9} = \sqrt{2x+3} \quad [x=6]$

298. $\sqrt{5x+5} = \sqrt{3x+8} \quad [x=\frac{3}{2}]$

299. $\sqrt[3]{3x-2} = \sqrt[3]{2x+7} \quad [x=9]$

300. $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+5} \quad [x=6]$

301. $\sqrt[4]{x-2} = \sqrt[4]{2x-6} \quad [x=4]$

302. $\sqrt{x+2} = \sqrt{3x+9} \quad [S=\emptyset]$

303. $\sqrt[5]{x+10} = \sqrt[5]{5x} \quad [x=\frac{5}{2}]$

304. $\sqrt{3x+1} = \sqrt{x+6} \quad [x=\frac{5}{2}]$

305. $\sqrt{5x-6} = \sqrt{2x+6} \quad [x=4]$

306. $\sqrt[3]{2x-7} = \sqrt[3]{x-1} \quad [x=6]$

307. $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+4} \quad [x=5]$

308. $\sqrt[4]{4x-3} = \sqrt[4]{2x+1} \quad [x=2]$

309. $\sqrt{2x-1} = \sqrt{5x+4} \quad [S=\emptyset]$

310. $\sqrt{x+4} = \sqrt{3x+10} \quad [x=-3]$

311. $\sqrt[5]{4x+4} = \sqrt[5]{x+10} \quad [x=2]$

312. $\sqrt{x+4} = \sqrt{2x+3} \quad [x=1]$

313. $\sqrt{5x} = \sqrt{3x+8} \quad [x=4]$

314. $\sqrt[3]{3x} = \sqrt[3]{2x+7} \quad [x=7]$

7. Somma di radici uguale a zero

Teoria: par. 8

■ ■ ■ ■ Non si eleva. Due radici quadrate non sono mai negative: la loro somma fa zero solo se sono nulle tutte e due. Si scrive il sistema dei due radicandi.

315. $\sqrt{x-3} + \sqrt{2x-6} = 0 \quad [x=3]$

316. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = 0 \quad [S=\emptyset]$

317. $\sqrt{2x+4} + \sqrt{x+2} = 0 \quad [x=-2]$

318. $\sqrt{x+5} + \sqrt{3x+15} = 0 \quad [x=-5]$

319. $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-2} = 0 \quad [x=2]$

320. $\sqrt{3x-6} + \sqrt{x-3} = 0 \quad [S=\emptyset]$

321. $\sqrt{x} + \sqrt{2x} = 0 \quad [x=0]$

322. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{4x-2} = 0 \quad [x=\frac{1}{2}]$

323. $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-7} = 0 \quad [S=\emptyset]$

324. $\sqrt{5x+10} + \sqrt{x+2} = 0 \quad [x=-2]$

325. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2} = 0 \quad [S=\emptyset]$

326. $\sqrt{2x-8} + \sqrt{4x-16} = 0 \quad [x=4]$

327. $\sqrt{3x} + \sqrt{x-3} = 0 \quad [S=\emptyset]$

328. $\sqrt{x-6} + \sqrt{4x-24} = 0 \quad [x=6]$

329. $\sqrt{5x-5} + \sqrt{x-6} = 0 \quad [S=\emptyset]$

330. $\sqrt{2x-4} + \sqrt{4x-8} = 0 \quad [x=2]$

331. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 0 \quad [S=\emptyset]$

332. $\sqrt{2x+10} + \sqrt{4x+20} = 0 \quad [x=-5]$

333. $\sqrt{3x+9} + \sqrt{x-1} = 0 \quad [S=\emptyset]$

334. $\sqrt{x-4} + \sqrt{4x-16} = 0 \quad [x=4]$

■ ■ ■ ■ Ancora somme nulle. Se i due radicandi si annullano in punti diversi, il sistema è impossibile e l'equazione non ha soluzioni.

335. $\sqrt{5x} + \sqrt{x-1} = 0 \quad [S=\emptyset]$

336. $\sqrt{2x-12} + \sqrt{4x-24} = 0 \quad [x=6]$

337. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} = 0 \quad [S=\emptyset]$

338. $\sqrt{3x+3} + \sqrt{x-4} = 0 \quad [S=\emptyset]$

339. $\sqrt{x+5} + \sqrt{4x+20} = 0 \quad [x=-5]$

340. $\sqrt{5x+15} + \sqrt{x+1} = 0 \quad [S=\emptyset]$

341. $\sqrt{x} + \sqrt{x-4} = 0$ [$S = \emptyset$]

342. $\sqrt{3x-3} + \sqrt{x-2} = 0$ [$S = \emptyset$]

343. $\sqrt{x-2} + \sqrt{4x-8} = 0$ [$x = 2$]

344. $\sqrt{5x+5} + \sqrt{x-2} = 0$ [$S = \emptyset$]

345. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = 0$ [$S = \emptyset$]

346. $\sqrt{3x} + \sqrt{x-2} = 0$ [$S = \emptyset$]

347. $\sqrt{5x-5} + \sqrt{x-5} = 0$ [$S = \emptyset$]

348. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = 0$ [$S = \emptyset$]

349. $\sqrt{3x+9} + \sqrt{x} = 0$ [$S = \emptyset$]

350. $\sqrt{5x} + \sqrt{x-5} = 0$ [$S = \emptyset$]

351. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-3} = 0$ [$S = \emptyset$]

352. $\sqrt{3x+3} + \sqrt{x-3} = 0$ [$S = \emptyset$]

8. Due radici e altri termini: il doppio elevamento

Teoria: par. 9

■■■□ Qui elevare una volta non basta: resta un doppio prodotto con dentro una radice. Si isola quella che resta e si eleva una seconda volta.

353. $\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1$ [$x = 9$]

354. $\sqrt{x+5} = \sqrt{x} + 1$ [$x = 4$]

355. $\sqrt{x+25} = \sqrt{x+9} + 2$ [$x = 0$]

356. $\sqrt{x+15} = \sqrt{x+3} + 2$ [$x = 1$]

357. $\sqrt{x+31} = \sqrt{x+11} + 2$ [$x = 5$]

358. $\sqrt{x+7} = \sqrt{x-1} + 2$ [$x = 2$]

359. $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$ [$x = 4$]

360. $\sqrt{x+16} + \sqrt{x+9} = 7$ [$x = 0$]

361. $\sqrt{x+24} + \sqrt{x+3} = 7$ [$x = 1$]

362. $\sqrt{x+16} + \sqrt{x+7} = 9$ [$x = 9$]

363. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3$ [$x = 3$]

364. $\sqrt{x+20} + \sqrt{x-12} = 8$ [$x = 16$]

365. $\sqrt{x+8} = \sqrt{x} + 2$ [$x = 1$]

366. $\sqrt{x+21} + \sqrt{x} = 7$ [$x = 4$]

367. $\sqrt{x+7} = \sqrt{x-5} + 2$ [$x = 9$]

368. $\sqrt{x+47} + \sqrt{x+23} = 12$ [$x = 2$]

369. $\sqrt{x+4} = \sqrt{x-1} + 1$ [$x = 5$]

370. $\sqrt{x+22} + \sqrt{x+13} = 9$ [$x = 3$]

371. $\sqrt{x+48} = \sqrt{x+20} + 2$ [$x = 16$]

372. $\sqrt{x+30} + \sqrt{x+10} = 10$ [$x = 6$]

373. $\sqrt{x-8} = \sqrt{x-11} + 1$ [$x = 12$]

374. $\sqrt{x+17} + \sqrt{x+1} = 8$ [$x = 8$]

375. $\sqrt{x+36} = \sqrt{x+4} + 4$ [$x = 0$]

376. $\sqrt{x+15} + \sqrt{x+8} = 7$ [$x = 1$]

377. $\sqrt{x+5} = \sqrt{x-3} + 2$ [$x = 4$]

378. $\sqrt{x+16} + \sqrt{x-5} = 7$ [$x = 9$]

■■■■ Ancora doppio elevamento. Prima di elevare la seconda volta, guarda il segno del membro a cui la radice è rimasta uguale: se è negativo hai già finito.

379. $\sqrt{x+14} = \sqrt{x+2} + 2$ [$x = 2$]

380. $\sqrt{x+44} + \sqrt{x+20} = 12$ [$x = 5$]

381. $\sqrt{x+6} = \sqrt{x+1} + 1$ [$x = 3$]

382. $\sqrt{x+9} + \sqrt{x} = 9$ [$x = 16$]

383. $\sqrt{x+58} = \sqrt{x+30} + 2$ [$x = 6$]

384. $\sqrt{x+24} + \sqrt{x+4} = 10$ [$x = 12$]

385. $\sqrt{x-4} = \sqrt{x-7} + 1$ [$x = 8$]

386. $\sqrt{x+25} + \sqrt{x+9} = 8$ [$x = 0$]

387. $\sqrt{x+35} = \sqrt{x+3} + 4$ [$x = 1$]

388. $\sqrt{x+12} + \sqrt{x+5} = 7$ [$x = 4$]

389. $\sqrt{x} = \sqrt{x-8} + 2$ [$x = 9$]

390. $\sqrt{x+23} + \sqrt{x+2} = 7$ [$x = 2$]

391. $\sqrt{x+11} = \sqrt{x-1} + 2$ [$x = 5$]

392. $\sqrt{x+46} + \sqrt{x+22} = 12$ [$x = 3$]

393. $\sqrt{x-7} = \sqrt{x-12} + 1$ [$x = 16$]

394. $\sqrt{x+19} + \sqrt{x+10} = 9$ [$x = 6$]

395. $\sqrt{x+52} = \sqrt{x+24} + 2$ [$x = 12$]

396. $\sqrt{x+28} + \sqrt{x+8} = 10$ [$x = 8$]

397. $\sqrt{x+4} = \sqrt{x+1} + 1$ [$x = 0$]

398. $\sqrt{x+24} + \sqrt{x+8} = 8$ [$x = 1$]

399. $\sqrt{x+32} = \sqrt{x} + 4$ [$x = 4$]

400. $\sqrt{x+7} + \sqrt{x} = 7$ [$x = 9$]

401. $\sqrt{x+20} + \sqrt{x-1} = 7$ [$x = 5$]

402. $\sqrt{x+13} = \sqrt{x+1} + 2$ [$x = 3$]

9. Equazioni irrazionali fratte

Teoria: par. 10

■ ■ ■ □ La radice compare in una frazione. Le C.E. diventano due cose diverse: il radicando deve esistere, e il denominatore non può annullarsi. Se la radice sta a *denominatore*, la sua condizione è stretta.

403. $\frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{3}$ [$x = 11$]

404. $\frac{2}{\sqrt{x+1}} = 1$ [$x = 3$]

405. $\frac{6}{\sqrt{x}} = 2$ [$x = 9$]

406. $\frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{2}$ [$x = \frac{5}{2}$]

407. $\frac{3}{\sqrt{x+4}} = -1$ [$S = \emptyset$]

408. $\frac{4}{\sqrt{x-5}} = 2$ [$x = 9$]

409. $\frac{\sqrt{x+5}}{x-1} = 0$ [$x = -5$]

410. $\frac{\sqrt{x-3}}{x-3} = 0$ [$S = \emptyset$]

411. $\frac{\sqrt{2x+4}}{x+1} = 0$ [$x = -2$]

412. $\frac{\sqrt{x+1}}{2x-6} = 0$ [$x = -1$]

413. $\frac{\sqrt{3x-6}}{x+2} = 0$ [$x = 2$]

414. $\frac{\sqrt{x-7}}{x} = 0$ [$x = 7$]

415. $\frac{1}{\sqrt{x-4}} = \frac{1}{3}$ [$x = 13$]

416. $\frac{2}{\sqrt{x}} = 1$ [$x = 4$]

417. $\frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{1}{2}$ [$x = 2$]

418. $\frac{3}{\sqrt{x+6}} = -1$ [$S = \emptyset$]

419. $\frac{4}{\sqrt{x-7}} = 2$ [$x = 11$]

420. $\frac{1}{\sqrt{x-3}} = \frac{1}{3}$ [$x = 12$]

421. $\frac{6}{\sqrt{x+1}} = 2$ [$x = 8$]

422. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{2}$ [$x = \frac{3}{2}$]

423. $\frac{3}{\sqrt{x+2}} = -1$ [$S = \emptyset$]

424. $\frac{4}{\sqrt{x-6}} = 2$ [$x = 10$]

425. $\frac{2}{\sqrt{x+2}} = 1$ [$x = 2$]

426. $\frac{6}{\sqrt{x+2}} = 2$ [$x = 7$]

427. $\frac{1}{\sqrt{2x-3}} = \frac{1}{2}$ [$x = \frac{7}{2}$]

428. $\frac{3}{\sqrt{x+3}} = -1$ [$S = \emptyset$]

429. $\frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{3}$ [$x = 10$]

430. $\frac{2}{\sqrt{x+3}} = 1$ [$x = 1$]

431. $\frac{6}{\sqrt{x-2}} = 2$ [$x = 11$]

432. $\frac{1}{\sqrt{2x-2}} = \frac{1}{2}$ [$x = 3$]

433. $\frac{4}{\sqrt{x-4}} = 2$ [$x = 8$]

$$434. \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{3} \quad [x = 9]$$

$$438. \frac{4}{\sqrt{x-3}} = 2 \quad [x = 7]$$

$$435. \frac{2}{\sqrt{x-1}} = 1 \quad [x = 5]$$

$$439. \frac{\sqrt{x+2}}{x-3} = 0 \quad [x = -2]$$

$$436. \frac{6}{\sqrt{x-1}} = 2 \quad [x = 10]$$

$$440. \frac{\sqrt{x-9}}{x+2} = 0 \quad [x = 9]$$

$$437. \frac{3}{\sqrt{x+5}} = -1 \quad [S = \emptyset]$$

■■■■ Ancora fratte. Una frazione vale zero dove si annulla il numeratore — ma solo se lì il denominatore esiste.

$$441. \frac{\sqrt{2x-7}}{x-3} = 0 \quad [x = \frac{7}{2}]$$

$$442. \frac{\sqrt{x+1}}{2x+2} = 0 \quad [S = \emptyset]$$

$$443. \frac{\sqrt{3x+5}}{x-3} = 0 \quad [x = -\frac{5}{3}]$$

$$444. \frac{\sqrt{x-1}}{x+2} = 0 \quad [x = 1]$$

$$445. \frac{\sqrt{x+8}}{x-3} = 0 \quad [x = -8]$$

$$446. \frac{\sqrt{x-10}}{x+2} = 0 \quad [x = 10]$$

$$447. \frac{\sqrt{2x-8}}{x-3} = 0 \quad [x = 4]$$

$$448. \frac{\sqrt{x}}{2x+2} = 0 \quad [x = 0]$$

$$449. \frac{\sqrt{3x+4}}{x-3} = 0 \quad [x = -\frac{4}{3}]$$

$$450. \frac{\sqrt{x-2}}{x+2} = 0 \quad [x = 2]$$

$$451. \frac{\sqrt{x+7}}{x-3} = 0 \quad [x = -7]$$

$$452. \frac{\sqrt{x-4}}{x+2} = 0 \quad [x = 4]$$

$$453. \frac{\sqrt{2x-9}}{x-3} = 0 \quad [x = \frac{9}{2}]$$

$$454. \frac{\sqrt{x-1}}{2x+2} = 0 \quad [x = 1]$$

$$455. \frac{\sqrt{3x+3}}{x-3} = 0 \quad [x = -1]$$

$$456. \frac{\sqrt{x-3}}{x+2} = 0 \quad [x = 3]$$

$$457. \frac{\sqrt{x+6}}{x-3} = 0 \quad [x = -6]$$

$$458. \frac{\sqrt{x-5}}{x+2} = 0 \quad [x = 5]$$

$$459. \frac{\sqrt{2x-3}}{x-3} = 0 \quad [x = \frac{3}{2}]$$

$$460. \frac{\sqrt{x-2}}{2x+2} = 0 \quad [x = 2]$$

$$461. \frac{\sqrt{3x+2}}{x-3} = 0 \quad [x = -\frac{2}{3}]$$

$$462. \frac{\sqrt{x+5}}{x-3} = 0 \quad [x = -5]$$

$$463. \frac{\sqrt{x-6}}{x+2} = 0 \quad [x = 6]$$

10. Problemi

Teoria: par. 11

■ ■ ■ Problemi. Scrivi l'incognita e che cosa rappresenta, poi l'equazione. Alla fine torna al testo: i valori che il problema non ammette si scartano dicendolo.

464. La radice quadrata di un numero vale 7. Qual è il numero? [$\sqrt{x} = 7 \Rightarrow x = 49$. La verifica è immediata: $\sqrt{49} = 7$.
 $x = 49$]

465. La radice quadrata di un numero aumentato di 3 vale 5. Qual è il numero? [$\sqrt{x+3} = 5 \Rightarrow x+3 = 25 \Rightarrow x = 22$.
Il secondo membro è positivo, quindi la concordanza è già a posto.]

466. Il perimetro di un quadrato di area A vale $4\sqrt{A}$. Per quale area il perimetro misura 28 cm? [$4\sqrt{A} = 28 \Rightarrow \sqrt{A} = 7 \Rightarrow A = 49 \text{ cm}^2$.]

467. Un pendolo di lunghezza L (in metri) ha periodo $T = 2\sqrt{L}$ secondi. Per quale lunghezza il periodo è di 6 secondi? [$2\sqrt{L} = 6 \Rightarrow \sqrt{L} = 3 \Rightarrow L = 9 \text{ m}$.]

468. Un corpo che cade da un'altezza h (in metri) arriva a terra con velocità $v = \sqrt{20h}$ m/s. Da quale altezza deve cadere per arrivare a 20 m/s? [$\sqrt{20h} = 20 \Rightarrow 20h = 400 \Rightarrow h = 20 \text{ m}$.]

469. Un triangolo rettangolo ha un cateto di 6 cm e l'altro di x cm; l'ipotenusa vale $\sqrt{36+x^2}$. Per quale x l'ipotenusa misura 10 cm? [$\sqrt{36+x^2} = 10 \Rightarrow 36+x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 8$; una lunghezza è positiva, quindi $x = 8 \text{ cm}$.]

470. Il tempo di caduta da un'altezza h (in metri) è $t = \sqrt{h/5}$ secondi. Da che altezza cade un corpo che impiega 3 secondi? [$\sqrt{h/5} = 3 \Rightarrow h/5 = 9 \Rightarrow h = 45 \text{ m}$.]

471. Il costo di produzione di x pezzi è $C = 10\sqrt{x} + 5$ euro. Quanti pezzi si producono con 45 euro? [$10\sqrt{x} + 5 = 45 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$ pezzi.]

472. La radice cubica di un numero diminuito di 1 vale 2. Qual è il numero? [$\sqrt[3]{x-1} = 2 \Rightarrow x-1 = 8 \Rightarrow x = 9$.
L'indice è dispari: nessuna condizione da imporre.]

473. Un quadrato e un rettangolo hanno la stessa area. Il rettangolo ha i lati 4 cm e 9 cm. Quanto misura il lato del quadrato? [il lato è $\sqrt{36}$: **6 cm**. Il valore -6 risolve l'equazione $l^2 = 36$ ma non il problema, perché una lunghezza è positiva.]
474. La radice quadrata di un numero è uguale alla sua metà. Quali numeri? [$\sqrt{x} = \frac{x}{2}$: elevando, $x = \frac{x^2}{4}$, cioè $x^2 - 4x = 0$ e $x = 0 \vee x = 4$. Tutti e due soddisfano $\frac{x}{2} \geq 0$: **$x = 0 \vee x = 4$** .]
475. Il raggio di un cerchio di area A soddisfa $r = \sqrt{A/\pi}$. Se il raggio è 5 cm, quanto vale l'area? [$\sqrt{A/\pi} = 5 \Rightarrow A/\pi = 25 \Rightarrow$ **$A = 25\pi \text{ cm}^2$** .]

■■■□ Problemi in cui compare una soluzione estranea: il conto ne produce due e il testo ne ammette una.

476. La radice quadrata di un numero è uguale al numero diminuito di 6. Qual è il numero? [$\sqrt{x} = x - 6$. Concorde: $x \geq 6$. Elevando: $x = x^2 - 12x + 36$, cioè $x^2 - 13x + 36 = 0$ e $x = 4 \vee x = 9$. Il valore 4 non soddisfa $x \geq 6$ ed è estraneo: **$x = 9$** .]
477. La radice quadrata di un numero aumentato di 2 è uguale al numero diminuito di 4. Qual è il numero? [$\sqrt{x+2} = x - 4$, con $x \geq 4$. Elevando: $x + 2 = x^2 - 8x + 16$, cioè $x^2 - 9x + 14 = 0$ e $x = 2 \vee x = 7$. Il 2 non rispetta la concordanza: **$x = 7$** .]
478. Due numeri positivi differiscono di 7 e le loro radici quadrate differiscono di 1. Quali sono? [con x il minore: $\sqrt{x+7} - \sqrt{x} = 1$. Doppio elevamento: $\sqrt{x} = 3$, quindi $x = 9$: i due numeri sono **9 e 16**.]
479. In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 10 cm e un cateto x ; l'altro cateto vale $\sqrt{100 - x^2}$. Per quale x l'altro cateto misura 6 cm? [$\sqrt{100 - x^2} = 6 \Rightarrow 100 - x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 8$; con $0 < x < 10$ resta **$x = 8 \text{ cm}$** .]
480. Un rettangolo ha la base $\sqrt{x+8}$ e l'altezza 3, e l'area vale 12. Quanto vale x ? [$3\sqrt{x+8} = 12 \Rightarrow \sqrt{x+8} = 4 \Rightarrow$ **$x = 8$** , e la base misura 4.].
481. Il numero di clienti di un negozio dopo t mesi è $N = 50 + 20\sqrt{t}$. Dopo quanti mesi i clienti sono 150? [$20\sqrt{t} = 100 \Rightarrow \sqrt{t} = 5 \Rightarrow$ **$t = 25$ mesi**.]
482. La radice quadrata del doppio di un numero, diminuito di 1, è uguale al numero stesso. Quali numeri? [$\sqrt{2x-1} = x$, con $x \geq 0$. Elevando: $2x - 1 = x^2$, cioè $(x-1)^2 = 0$ e $x = 1$ (doppia): **$x = 1$** .]
483. Un serbatoio si svuota in $t = \sqrt{h}$ minuti, con h l'altezza iniziale dell'acqua in centimetri. Quanto era alta l'acqua se ci sono voluti 12 minuti? [$\sqrt{h} = 12 \Rightarrow$ **$h = 144 \text{ cm}$** .]

■■■■ Problemi con due radici o con la radice a denominatore.

484. Per quali numeri la radice quadrata del numero aumentato di 5 supera di 1 la radice quadrata del numero? [$\sqrt{x+5} = \sqrt{x} + 1$. Doppio elevamento: $\sqrt{x} = 2$, quindi **$x = 4$** . La C.E. $x \geq 0$ è rispettata.].
485. Un triangolo isoscele ha la base 6 cm e il lato obliquo $\sqrt{x+9}$ cm. Per quale x l'altezza relativa alla base misura 4 cm? [l'altezza è $\sqrt{(\sqrt{x+9})^2 - 3^2} = \sqrt{x}$, quindi $\sqrt{x} = 4$ e **$x = 16$** : il lato obliquo misura 5 cm.].
486. Il tempo di percorrenza di un tratto è $t = \frac{60}{\sqrt{v}}$ minuti, con v la velocità. Per quale velocità il tempo è di 12 minuti? [$\frac{60}{\sqrt{v}} = 12 \Rightarrow \sqrt{v} = 5 \Rightarrow$ **$v = 25$** . C.E. $v > 0$: a denominatore la radice non può nemmeno valere zero.].
487. Per quale numero la somma fra la sua radice quadrata e la radice quadrata del numero aumentato di 9 vale 9? [$\sqrt{x} + \sqrt{x+9} = 9$. Isolando ed elevando due volte: $\sqrt{x} = 4$, quindi **$x = 16$** (e infatti $4 + 5 = 9$).]

11. Parametriche, vero o falso, errori, a ritroso, dimostrazioni

Teoria: par. 12

■□□□ Vero o falso? Motiva sempre: il giudizio da solo non vale niente.

488. Elevare al quadrato i due membri di un'equazione è sempre un passaggio di equivalenza. [falso — no: può aggiungere soluzioni. Da $\sqrt{x} = -2$, che non ha soluzioni, elevando si ottiene $x = 4$.]
489. Elevare al cubo i due membri di un'equazione è un passaggio di equivalenza. [vero — sì: $y \mapsto y^3$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$, quindi a valori diversi corrispondono cubi diversi e nessuna soluzione si aggiunge.]
490. $\sqrt{A(x)} = B(x)$ equivale al sistema $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^2 \end{cases}$. [vero — sì, ed è la forma da ricordare. La condizione $A(x) \geq 0$ non serve scriverla: la seconda riga la contiene già.]
491. Se un candidato non soddisfa la concordanza, il conto è sbagliato. [falso — no: è una soluzione estranea, e comparire è il suo mestiere. Si scarta e si va avanti.]
492. Un'equazione irrazionale con una radice di indice pari ha sempre almeno una soluzione. [falso — no: $\sqrt{x+1} = -3$ non ne ha nessuna, e nemmeno $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 0$.]
493. Nell'equazione $\sqrt{A(x)} = k$ con $k \geq 0$ non serve imporre $A(x) \geq 0$. [vero — sì: elevando si ottiene $A(x) = k^2$, e k^2 non è mai negativo. La C.E. viene soddisfatta da sola.]
494. La verifica finale si può fare nell'equazione ottenuta dopo l'elevamento. [falso — no, ed è l'errore che rende inutile la verifica: lì dentro anche la soluzione estranea è vera. Si sostituisce nell'equazione di partenza.]
495. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = 0$ ha soluzione solo dove i due radicandi si annullano insieme. [vero — sì: sono due quantità mai negative, e la loro somma è nulla solo se lo sono tutte e due.]
496. Se la radice sta a denominatore, la C.E. è $A(x) \geq 0$. [falso — è $A(x) > 0$, stretta: a denominatore la radice non può nemmeno valere zero.]
497. Un'equazione irrazionale di indice pari può avere due soluzioni. [vero — sì, se tutti e due i candidati della risolvente soddisfano la concordanza: $\sqrt{8x+1} = x+2$ ha $x=1$ e $x=3$.]
498. Nel metodo della verifica non servono le condizioni di esistenza. [vero — sì, ed è il suo vantaggio: si eleva, si risolve, e si prova ogni candidato nell'equazione di partenza. Il prezzo è che i candidati vanno provati tutti, uno per uno.]
499. $\sqrt{x^2} = x$ per ogni x . [falso — no: $\sqrt{x^2} = |x|$. Per $x = -3$ verrebbe $3 = -3$. L'uguaglianza vale solo per $x \geq 0$.]

■■□□ Trova l'errore. Ogni riga ne contiene uno: di' quale regola è stata violata e correggi.

500. $\sqrt{x-1} = -4$, e si scrive $x-1 = 16$, quindi $x = 17$. [una radice quadrata non è mai negativa: l'equazione è impossibile e non si eleva nemmeno. $S = \emptyset$. Il 17 risolve l'equazione elevata, non quella data.]
501. $\sqrt{x} = x-2$ diventa $x = x^2 - 4$. [il quadrato di un binomio non è la differenza dei quadrati: $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$. Viene $x^2 - 5x + 4 = 0$, candidati 1 e 4, e con $x \geq 2$ resta $x = 4$.]
502. $\sqrt{2x+1} = 3$, si eleva e viene $2x+1 = 3$. [si è elevato un membro solo. Elevando tutti e due: $2x+1 = 9$, quindi $x = 4$.]
503. $\sqrt{x+3} = x+1$: si trovano $x = 1$ e $x = -2$, e si danno entrambe. [manca la concordanza $x+1 \geq 0$, cioè $x \geq -1$: il valore -2 è estraneo. Resta $x = 1$.]

504. $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 0$, e si scrive $\sqrt{x-2} = -\sqrt{x+1}$, poi si elevano i due membri: $x-2 = x+1$. [il conto è formalmente giusto e porta a $-2 = 1$, cioè a nessuna soluzione — ma la strada è sbagliata: due radici mai negative danno somma nulla solo se sono nulle tutte e due, e questo si vede subito. $S = \emptyset$.]
505. $\sqrt[3]{x+1} = -2$: si dice che è impossibile perché a destra c'è un numero negativo. [l'indice è **dispari**: la radice cubica di un numero negativo esiste. Elevando: $x+1 = -8$, quindi $x = -9$.]
506. $\frac{1}{\sqrt{x-3}} = 2$ con C.E. $x \geq 3$. [la radice sta a **denominatore**: la C.E. è stretta, $x > 3$. La soluzione $x = \frac{13}{4}$ la rispetta, ma la condizione va scritta giusta.]
507. $\sqrt{x+5} = \sqrt{2x-1}$ diventa $x+5 = 2x-1$, quindi $x = 6$, e si conclude senza altro. [il conto è giusto e $x = 6$ è accettabile ($x+5 = 11 \geq 0$), ma il controllo **va fatto**: con altri numeri il candidato potrebbe rendere negativi i radicandi, e allora andrebbe scartato.]
508. $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = 1$: si eleva una volta sola e si scrive $x + x + 3 = 1$. [elevando una somma resta il doppio prodotto: $(\sqrt{x} + \sqrt{x+3})^2 = x + 2\sqrt{x(x+3)} + x + 3$. Bisogna isolare una radice ed elevare **due** volte — e qui si arriva a $S = \emptyset$.]
509. $\sqrt{x^2-4} = x-2$ si semplifica dicendo che $\sqrt{x^2-4} = x-2$ per definizione di radice. [$\sqrt{x^2-4}$ non è $x-2$: $x^2-4 = (x-2)(x+2)$, non $(x-2)^2$. Si risolve elevando, con $x \geq 2$: $x^2-4 = x^2-4x+4$ dà $x = 2$.]

■ ■ ■ □ **A ritroso. Si parte dalla risposta e si costruisce l'equazione.**

510. Scrivi un'equazione irrazionale che abbia per soluzione $x = 9$. [per esempio $\sqrt{x} = 3$, oppure $\sqrt{x+7} = 4$: si sceglie il valore della radice e si costruisce il radicando all'indietro. **una fra infinite**]
511. Scrivi un'equazione irrazionale impossibile in cui il radicando esista per ogni x . [per esempio $\sqrt{x^2+1} = -1$: il radicando è sempre positivo, ma il secondo membro è negativo e una radice quadrata non lo è mai.]
512. Scrivi un'equazione del tipo $\sqrt{A(x)} = B(x)$ che abbia una soluzione accettabile e una estranea. [per esempio $\sqrt{x} = x-6$: i candidati sono 4 e 9, e la concordanza $x \geq 6$ scarta il 4.]
513. La risolvente di un'equazione irrazionale è $x^2 - 7x + 12 = 0$ e la concordanza è $x \geq 4$. Qual è la risposta? [i candidati sono 3 e 4; solo 4 soddisfa la condizione: $x = 4$.]
514. Completa: $\sqrt{x+\square} = 5$ ha per soluzione $x = 11$. [$\square = 14$: si eleva ($x+\square = 25$) e si impone che x valga 11.]
515. Scrivi un'equazione con la radice a denominatore che abbia per soluzione $x = 5$. [per esempio $\frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}$: la radice deve valere 2, quindi il radicando 4, e $x-1 = 4$.]
516. Un'equazione $\sqrt{A(x)} = B(x)$ ha per risposta $S = \emptyset$ pur avendo due candidati. Che cosa è successo? [tutti e due i candidati rendono **negativo** il secondo membro: sono due soluzioni estranee. Per esempio $\sqrt{-x+5} = x-8$.]
517. Scrivi un'equazione con due radicali che abbia per soluzione $x = 4$. [per esempio $\sqrt{3x-2} = \sqrt{x+6}$: si sceglie $x = 4$, si calcola il valore comune (10) e si costruiscono i due radicandi.]
518. Scrivi un'equazione irrazionale di indice dispari con soluzione **negativa**. [per esempio $\sqrt[3]{x+1} = -2$, che dà $x = -9$: con l'indice dispari le soluzioni negative sono ammesse senza condizioni.]
519. Perché $\sqrt{x-3} = \sqrt{x-3}$ non è un esercizio di questo capitolo? [perché è un'identità: è vera per ogni x del dominio, cioè per $x \geq 3$. La risposta non è un elenco di numeri ma un intervallo, e non c'è niente da elevare.]

■ ■ ■ □ **Parametriche. Per quali valori del parametro? Si ricava dalla condizione che la risposta deve soddisfare, non dai conti dell'elevamento.**

520. Per quale k l'equazione $\sqrt{x+k} = 3$ ha per soluzione $x = 5$? [elevando: $x+k = 9$, e con $x = 5$ viene $k = 4$.]

521. Per quali k l'equazione $\sqrt{x-1} = k$ è impossibile? [$k < 0$: una radice quadrata non è mai negativa. Per $k \geq 0$ la soluzione c'è sempre ed è $x = k^2 + 1$.]
522. Per quale k l'equazione $\sqrt{2x+1} = k$ ha per soluzione $x = 4$? [il radicando vale 9, quindi $k = 3$ (e non -3 : la radice non è negativa).]
523. Per quali k l'equazione $\sqrt{x+3} = k+1$ ha soluzioni? [serve $k+1 \geq 0$, cioè $k \geq -1$.]
524. Per quale k l'equazione $\sqrt[3]{x+k} = -2$ ha per soluzione $x = 1$? [elevando al cubo: $x+k = -8$, quindi $k = -9$. L'indice è dispari e il segno del secondo membro non crea problemi.]
525. Per quali k l'equazione $\sqrt{x} = x - k$ ha $x = 4$ fra le soluzioni? [sostituendo: $2 = 4 - k$, quindi $k = 2$. Va controllata la concordanza: $x - k = 2 \geq 0 \checkmark$. $k = 2$]
526. Per quali k l'equazione $\sqrt{x-2} = k-1$ ha per soluzione un valore che rende nullo il radicando? [il radicando è nullo per $x = 2$, e allora la radice vale 0: serve $k-1 = 0$, cioè $k = 1$.]
527. Per quale k l'equazione $\frac{k}{\sqrt{x+1}} = 2$ ha per soluzione $x = 3$? [con $x = 3$ la radice vale 2, quindi $\frac{k}{2} = 2$ e $k = 4$.]
528. Per quali k l'equazione $\sqrt{x+k} = x$ ha una soluzione doppia? [elevando: $x^2 - x - k = 0$, con $\Delta = 1 + 4k$. La soluzione è doppia se $\Delta = 0$, cioè $k = -\frac{1}{4}$; $\text{lix} = \frac{1}{2} \geq 0$, quindi è accettabile. $k = -\frac{1}{4}$]
529. Per quali k l'equazione $\sqrt{x} + \sqrt{x+k} = 0$ ha soluzione? [serve che i due radicandi si annullino insieme: $x = 0$ e $x = -k$, quindi $k = 0$ (e la soluzione è $x = 0$).]

■■■■ Dimostra. Qui non ci sono conti: si ragiona su che cosa fa l'elevamento.

530. Dimostra che elevare al quadrato i due membri di un'equazione non può far *perdere* soluzioni. [se x_0 risolve $A(x) = B(x)$, allora $A(x_0)$ e $B(x_0)$ sono lo stesso numero, e numeri uguali hanno quadrati uguali: x_0 risolve anche $[A(x)]^2 = [B(x)]^2$. Quindi l'insieme delle soluzioni può solo crescere. c.v.d.]
531. Dimostra che $\sqrt{A(x)} = B(x)$ e il sistema $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^2 \end{cases}$ hanno le stesse soluzioni. [se x_0 risolve l'equazione, il primo membro è ≥ 0 e quindi $B(x_0) \geq 0$; elevando si ha $A(x_0) = [B(x_0)]^2$. Viceversa, se vale il sistema, $A(x_0) = [B(x_0)]^2 \geq 0$ e $\sqrt{A(x_0)} = |B(x_0)| = B(x_0)$ perché $B(x_0) \geq 0$. c.v.d.]
532. Dimostra che con indice dispari non serve nessuna condizione. [la funzione $y \mapsto y^n$ con n dispari è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$, quindi è iniettiva: $a = b \iff a^n = b^n$. L'elevamento è un'equivalenza in tutti e due i versi, e non aggiunge niente da scartare. c.v.d.]
533. Dimostra che $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = 0$ equivale al sistema $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$. [le due radici, dove esistono, sono ≥ 0 . Una somma di due quantità non negative è nulla solo se sono nulle tutte e due: se una fosse positiva la somma lo sarebbe. c.v.d.]
534. Dimostra che $\sqrt{x^2} = |x|$ e non x . [per definizione $\sqrt{y}$ è il numero **non negativo** il cui quadrato è y . Siccome $|x| \geq 0$ e $|x|^2 = x^2$, è $|x|$ a soddisfare la definizione. Con $x < 0$, x non può essere la radice perché è negativo. c.v.d.]
535. Dimostra che l'equazione $\sqrt{A(x)} = k$ con $k < 0$ non ha soluzioni, qualunque sia $A(x)$. [dove la radice esiste, il suo valore è ≥ 0 per definizione; un numero ≥ 0 non può essere uguale a un numero negativo. Dove la radice non esiste non c'è niente da uguagliare. c.v.d.]