

FORMULARIO: EQUAZIONI IRRAZIONALI

L'incognita sta **sotto** la radice. In ogni riquadro c'è la regola, la riga **QUANDO** e un esempio con i numeri.

1 La regola che governa tutto

1.1 Elevare non è un principio di equivalenza

Elevare a esponente **pari** può **aggiungere** soluzioni: quelle che compaiono si chiamano **estranee**. Non può mai toglierne.

QUANDO sempre, con indice pari. È il motivo per cui alla fine si *scarta* invece di cercare.

ESEMPIO

$\sqrt{x} = -2$ non ha soluzioni; elevando diventa $x = 4$, che nel testo dà $\sqrt{4} = 2 \neq -2$. Il 4 è una **soluzione estranea**.

1.2 Le condizioni di esistenza

- indice **pari**: radicando ≥ 0 ;
- indice **dispari**: nessuna condizione;
- radice a **denominatore**: radicando > 0 (stretta).

QUANDO prima di qualunque conto. Si guarda l'indice, non il radicando.

ESEMPIO

$\sqrt{x-5}$ vuole $x \geq 5$; $\sqrt[3]{x-5}$ non vuole niente; $\frac{1}{\sqrt{x-5}}$ vuole $x > 5$.

1.3 $\sqrt{a^2} = |a|$, non a

La radice quadrata restituisce sempre un numero **non negativo**.

QUANDO ogni volta che si semplifica una radice di un quadrato. È la regola da cui nasce tutto il capitolo.

ESEMPIO

Con $a = -3$: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$. Scrivere $\sqrt{a^2} = a$ vale solo per $a \geq 0$.

2 Le forme, una per una

2.1 Indice dispari: si eleva e basta

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \iff A(x) = [B(x)]^n \quad (n \text{ dispari})$$

Equivalenza piena: niente C.E., niente concordanza, niente da scartare.

QUANDO l'indice è 3, 5, 7... La risposta può essere negativa senza nessun problema.

ESEMPIO

$\sqrt[3]{4+x-x^3} = -x$: al cubo i termini x^3 si cancellano e resta $4+x=0$, cioè $x = -4$.

2.2 Indice pari: il sistema

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \iff \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases} \quad (n \text{ pari})$$

La condizione $A(x) \geq 0$ **non si scrive**: la seconda riga la contiene già, perché una potenza pari non è mai negativa.

QUANDO a secondo membro c'è un'espressione con la x .

ESEMPIO

$\sqrt{2x^2+x+4} = 2x-1$: concordanza $x \geq \frac{1}{2}$; elevando $2x^2-5x-3=0$ dà 3 e $-\frac{1}{2}$; il secondo è estraneo. $x = 3$

2.3 Radice uguale a un numero

$$\sqrt{A(x)} = k \implies \begin{cases} A(x) = k^2 & k \geq 0 \\ S = \emptyset & k < 0 \end{cases}$$

Con $k \geq 0$ non c'è niente da scartare: il radicando diventa k^2 , che è già ≥ 0 .

QUANDO a secondo membro c'è un numero. Si guarda il **segno** prima di elevare.

ESEMPIO

$\sqrt{x+1} = 4 \Rightarrow x+1 = 16 \Rightarrow x = 15$. $\sqrt{x+3} = -2 \Rightarrow S = \emptyset$, senza conti.

2.4 Il metodo della verifica

1. eleva subito, senza condizioni;
2. risolvi: quelli che escono sono **candidati**;
3. sostituisci ogni candidato nell'equazione **di partenza**;
4. tieni quelli che la verificano.

QUANDO la concordanza sarebbe una disequazione lunga e i candidati sono pochi e comodi. Porta alla stessa risposta del sistema.

ESEMPIO

La verifica si fa **nel testo**, non nell'equazione elevata: lì dentro anche la soluzione estranea è vera, per costruzione.

2.5 Due radici dello stesso indice

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B} \iff \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \quad (n \text{ pari})$$

La condizione si impone a **uno solo** dei due radicandi: l'uguaglianza porta l'altro con sé.

QUANDO le due radici hanno lo stesso indice e sono sole, una per membro.

ESEMPIO

$$\sqrt{3x-2} = \sqrt{x+6} \Rightarrow 3x-2 = x+6 \Rightarrow x = 4 \text{ (e } 3 \cdot 4 - 2 = 10 \geq 0 \checkmark).$$

2.6 Somma di radici uguale a zero

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = 0 \iff \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

Due quantità mai negative danno somma nulla solo se sono nulle tutte e due. **Non si eleva.**

QUANDO la somma di due radici è uguale a zero. Con un numero diverso da zero a destra, invece, serve il doppio elevamento.

ESEMPIO

$\sqrt{x-3} + \sqrt{2x-6} = 0$: tutti e due si annullano in 3, quindi $x = 3$. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = 0$: si annullano in punti diversi, $S = \emptyset$.

2.7 Il doppio elevamento

1. C.E. di tutti i radicandi;
2. **isola** una radice, da sola;
3. eleva;
4. **isola** la radice che resta;
5. eleva la seconda volta e risolvi;
6. verifica nel testo.

QUANDO le radici sono due e c'è anche un altro termine.

ESEMPIO

$\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1$: elevando, $x+7 = x+2\sqrt{x}+1$, cioè $\sqrt{x} = 3$ e $x = 9$. Il termine $2\sqrt{x}$ è il doppio prodotto: è lui a richiedere il secondo elevamento.

2.8 Irrazionali fratte

$$\begin{cases} \text{radicandi (indice pari)} \geq 0 \\ \text{denominatori} \neq 0 \end{cases}$$

Se la radice sta a denominatore le due condizioni si fondono in una sola, stretta: radicando > 0 .

QUANDO compare una frazione. Sono due condizioni diverse e servono tutte e due.

ESEMPIO

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{3}: \text{C.E. } x > 2; \text{isolando, } \sqrt{x-2} = 3 \text{ e } x = 11.$$

$$\frac{\sqrt{x+5}}{x-1} = 0: \text{si annulla il numeratore, } x = -5 \text{ (e lì il denominatore esiste)}.$$

3 I casi che si riconoscono a occhio

3.1 Impossibile senza fare conti

Se dopo aver isolato la radice resta $\sqrt{\cdot} = k$ con $k < 0$, l'equazione non ha soluzioni. Vale anche a metà di un doppio elevamento.

QUANDO a un membro c'è una radice sola e all'altro un numero negativo. Elevare produrrebbe candidati estranei al cento per cento.

ESEMPIO

$$\sqrt{2x-1} + 5 = 2 \Rightarrow \sqrt{2x-1} = -3 \Rightarrow S = \emptyset.$$

3.2 Quando il quadrato è perfetto

Se la risolvente è $(x-a)^2 = 0$, il candidato è **uno solo** (con molteplicità due): si controlla come tutti gli altri.

QUANDO dopo l'elevamento il discriminante viene zero. Non è un caso speciale: è un candidato solo invece di due.

ESEMPIO

$$\sqrt{2x-1} = x: \text{elevando, } x^2 - 2x + 1 = 0, \text{ cioè } (x-1)^2 = 0 \text{ e } x = 1, \text{ che rispetta } x \geq 0. \mathbf{x = 1}$$

3.3 Due scarti diversi, nei problemi

- la **soluzione estranea** non risolve l'equazione: si scarta per *matematica*, dicendo quale condizione viola;
- il **valore non ammissibile** risolve l'equazione ma non ha senso nel problema (lunghezza negativa, persone con la virgola): si scarta per *realtà*.

QUANDO l'esercizio è un problema. Sono due motivi diversi e vanno scritti diversi.

ESEMPIO

$$\text{Da } \sqrt{36+x^2} = 10 \text{ escono } 8 \text{ e } -8: \text{tutti e due risolvono l'equazione, ma solo } 8 \text{ è una lunghezza.}$$

La mappa: la prima mossa

Se l'equazione è...

allora...

con indice **dispari**

eleva e basta: nessuna condizione

$$\sqrt{A} = k \text{ con } k < 0$$

$$S = \emptyset, \text{ senza fare conti}$$

$$\sqrt{A} = k \text{ con } k \geq 0$$

eleva: $A = k^2$, niente da scartare

$$\sqrt{A} = B(x)$$

sistema $B \geq 0, A = B^2$ — oppure verifica finale

$$\sqrt{A} = \sqrt{B}$$

$$A = B, \text{ con } A \geq 0$$

$$\sqrt{f} + \sqrt{g} = 0$$

sistema $f = 0, g = 0$: non si eleva

due radici e altri termini

isola, eleva, isola, eleva

con una **frazione**radicandi ≥ 0 , denominatori $\neq 0$

Chi sceglie bene la prima mossa ha già fatto metà dell'esercizio; chi la sceglie male fa dieci righe di conti giusti per arrivare a una risposta sbagliata.

3.4 I controlli che costano dieci secondi

- hai guardato l'**indice** prima di elevare?
- se a destra c'è un numero, ne hai guardato il **segno**?
- i candidati li hai **sostituiti nel testo**, non nella riga dopo?
- se hai scartato un valore, hai scritto **perché**?
- nei problemi: le soluzioni hanno senso (lunghezze positive, numeri interi dove servono)?

QUANDO sempre, prima di consegnare.

ESEMPIO

La firma della soluzione estranea è questa: i due membri, sostituendo, danno numeri **opposti** — stesso valore assoluto, segno diverso. Se te la trovi davanti, hai scartato bene.