

FORMULARIO: DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

L'incognita sta **sotto** la radice. In ogni riquadro c'è la regola, la riga **QUANDO** e un esempio con i numeri.

1 La regola che governa tutto

1.1 Elevare conserva il verso solo fra numeri non negativi

$$a < b \iff a^2 < b^2 \quad \text{solo se } a, b \geq 0$$

Con un membro negativo salta: $-5 < 3$, ma $25 > 9$.

QUANDO sempre, prima di elevare. Tutto il capitolo serve a garantire questa condizione *prima*, non a verificarla dopo.

ESEMPIO

È la differenza con le **equazioni** irrazionali: là i candidati erano due o tre e si controllavano alla fine, qui sono **infiniti** e la condizione deve diventare una riga del sistema.

1.2 Le condizioni di esistenza

- indice **pari**: radicando ≥ 0 ;
- indice **dispari**: nessuna condizione;
- radice a **denominatore**: radicando > 0 .

QUANDO prima di qualunque conto. Si guarda l'**indice**, non il radicando.

ESEMPIO

$\sqrt{x^2 - 9}$ esiste per $x \leq -3 \vee x \geq 3$; $\sqrt[3]{x^2 - 9}$ per ogni x .

1.3 Indice dispari: si eleva e basta

$$\sqrt[n]{A} \leq B \iff A \leq B^n \quad (n \text{ dispari})$$

Il verso resta, qualunque sia il segno dei due membri.

QUANDO l'indice è 3, 5, 7... Nessuna C.E., nessuna concordanza, nessun sistema.

ESEMPIO

$\sqrt[3]{6 - x + x^3} \leq x$: al cubo i termini x^3 si cancellano e resta $6 - x \leq 0$, cioè $x \geq 6$.

2 Radice e un numero: i quattro casi

2.1 $\sqrt{A(x)} < k$

$$k \leq 0 \implies S = \emptyset \qquad k > 0 \implies \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) < k^2 \end{cases}$$

Una radice non è mai minore di un numero negativo o nullo.

QUANDO a destra c'è un numero e il verso è il minore. Metà di questi esercizi si chiudono guardando il segno.

ESEMPIO

$\sqrt{x^2 - 4} < 3$ dà $-\sqrt{13} < x \leq -2 \vee 2 \leq x < \sqrt{13}$: la C.E. spezza la risposta in due pezzi.

2.2 $\sqrt{A(x)} > k$

$$k < 0 \implies A(x) \geq 0 \qquad k \geq 0 \implies A(x) > k^2$$

Con k negativo basta che la radice esista; con $k \geq 0$ la C.E. è superflua, perché $A > k^2 \geq 0$.

QUANDO a destra c'è un numero e il verso è il maggiore.

ESEMPIO

$\sqrt{x^2 + 6x} > -3$ dà $x \leq -6 \vee x \geq 0$: è solo la C.E. $\sqrt{x^2 - 1} > 2$ dà $x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5}$.

2.3 Gli estremi irrazionali non si arrotondano

$\sqrt{13}$ non è 3,61: con il numero arrotondato non si sa più da che parte sta 3,605.

QUANDO il radicando è di secondo grado. Gli estremi si tengono esatti, come si è imparato con i radicali.

ESEMPIO

E la risposta può avere **due pezzi**: la C.E. di un radicando di secondo grado è quasi sempre un'unione.

3 Radice e un'espressione

3.1 Il caso del minore: *un sistema*

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \iff \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}$$

Tre righe, e la risposta è la loro **intersezione**.

QUANDO a destra c'è un'espressione con la x e il verso è il minore. Col verso largo: $B \geq 0$ e $A \leq B^2$.

ESEMPIO

$\sqrt{x^2 + 2x - 15} < x - 1$: le tre righe danno $x \leq -5 \vee x \geq 3$, $x > 1$, $x < 4$. Intersecando: $3 \leq x < 4$.

3.2 Il caso del maggiore: due sistemi

$$\sqrt{A(x)} > B(x) \iff \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases}$$

La risposta è l'**unione**: sono due strade per essere soluzione, non due condizioni insieme.

QUANDO a destra c'è un'espressione con la x e il verso è il maggiore.

ESEMPIO

$\sqrt{x-1} > x-3$: il primo sistema dà $1 \leq x < 3$, il secondo $3 \leq x < 5$. Unione: $1 \leq x < 5$.

3.3 Col minore la C.E. si scrive, col maggiore no

Nel caso del **maggiore** la riga $A > B^2$ dice già che A è positivo: imporre $A \geq 0$ è una disequazione in più per niente.

Nel caso del **minore** invece $A < B^2$ non dice niente sul segno di A : senza C.E. entrerebbero valori dove la radice non esiste.

QUANDO ogni volta che si scrive il sistema. È la coppia di errori più frequente del capitolo.

ESEMPIO

Modo di ricordarlo: la C.E. serve dove la radice deve stare *sotto* qualcosa, non dove deve stare sopra.

3.4 Radice contro radice

$$\sqrt{A} < \sqrt{B} \iff \begin{cases} A \geq 0 \\ A < B \end{cases} \quad \sqrt{A} > \sqrt{B} \iff \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B \end{cases}$$

La C.E. si impone al radicando **più piccolo**: l'altro viene da sé.

QUANDO le due radici hanno lo stesso indice, una per membro.

ESEMPIO

$\sqrt{3x-2} < \sqrt{x+6}$ dà $3x-2 \geq 0$ e $3x-2 < x+6$, cioè $\frac{2}{3} \leq x < 4$.

3.5 Due o più radicali

1. C.E. di tutti i radicandi;
2. **sposta** le radici così che i due membri siano non negativi;
3. eleva; resta un doppio prodotto con una radice;

4. isola quella radice ed eleva di nuovo;
5. **interseca** con le C.E.

QUANDO le radici sono due e c'è anche un altro termine.

ESEMPIO

$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} < 1$: si sposta, si eleva, resta $\sqrt{x-1} > 1$ e quindi $x > 2$. Occhio al verso: la radice ha cambiato membro.

4 Sistemi, e i casi che si vedono a occhio

4.1 Sistemi di disequazioni irrazionali

Ogni riga si risolve **per conto suo**, con il metodo che le spetta; poi il **grafico delle soluzioni** e l'intersezione.

QUANDO c'è una graffa. Le C.E. di una riga valgono per tutto il sistema.

ESEMPIO

$\begin{cases} \sqrt{x+2} < 3 \\ \sqrt{x+2} > x \end{cases}$: la prima dà $-2 \leq x < 7$, la seconda $-2 \leq x < 2$. Intersecando, $-2 \leq x < 2$.

4.2 Quando un sistema è vuoto

Nel caso del maggiore capita spesso che uno dei due sistemi non abbia soluzioni: se $B(x) > 0$ per ogni x , il primo è impossibile.

QUANDO prima di risolvere: riconoscerlo fa risparmiare metà dell'esercizio. Ma va **detto**, non saltato in silenzio.

ESEMPIO

In $\sqrt{x+5} > x^2 + 1$ il primo sistema è vuoto, perché $x^2 + 1$ è sempre positivo.

4.3 Il verso si rovescia quando la radice cambia membro

Da $2 < 2\sqrt{x-1}$ si legge $\sqrt{x-1} > 1$, non $<$.

QUANDO nel doppio elevamento, quando si isola la radice rimasta. È un errore che lascia i conti giusti e la risposta esattamente complementare.

ESEMPIO

Se il risultato «sembra al contrario», è quasi sempre qui che è successo.

La mappa: la prima mossa

Se la disequazione è...

allora...

con indice **dispari**

eleva e basta

$$\sqrt{A} < k, k \leq 0$$

 $S = \emptyset$, senza conti

$$\sqrt{A} > k, k < 0$$

solo la C.E. $A \geq 0$

$$\sqrt{A} < k, k > 0$$

$$\{A \geq 0, A < k^2\}$$

$$\sqrt{A} > k, k \geq 0$$

 $A > k^2$, e basta

$$\sqrt{A} < B(x)$$

un sistema di tre righe

$$\sqrt{A} > B(x)$$

due sistemi da **unire**

$$\sqrt{A} \leq \sqrt{B}$$

confronta i radicandi, C.E. del più piccolo

due radici e altri termini

isola, eleva, isola, eleva

Chi sceglie bene la prima mossa ha già fatto metà dell'esercizio; chi la sceglie male fa dieci righe di conti giusti per arrivare a una risposta sbagliata.

4.4 I controlli che costano dieci secondi

- hai guardato l'**indice** prima di elevare?
- se a destra c'è un numero, ne hai guardato il **segno**?
- col minore hai scritto la **C.E.**? col maggiore hai evitato di scriverla dove è superflua?
- i due sistemi del maggiore li hai **uniti**, non intersecati?
- hai sostituito **un numero dentro** la risposta e **uno fuori**, nella disequazione di partenza?

QUANDO sempre, prima di consegnare.

ESEMPIO

Il numero «fuori» va scelto **vicino a un estremo**: è lì che si nascondono gli errori di verso e di parentesi aperta o chiusa.