

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

03 - ALGEBRA2

L'incognita sotto la radice, e un verso da conservare:
perché qui la condizione si scrive prima, non si verifica dopo

Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima di partire	3
2	Perché qui la verifica non basta più	3
3	Indice dispari: si eleva e basta	4
4	Radice e un numero	5
5	Il caso del minore: un sistema	6
6	Il caso del maggiore: due sistemi	7
7	Radice contro radice	9
8	Due o più radicali	9
9	Sistemi di disequazioni irrazionali	10
10	Problemi	11
11	Quale strada, e quando	12

1 Cosa serve prima di partire

Cosa devi già sapere

1. Radice n -esima. Con n **pari** il radicando deve essere ≥ 0 e il risultato è ≥ 0 . Con n **dispari** non c'è nessuna condizione: $\sqrt[3]{-8} = -2$.

2. I quadrati e l'ordine. Se a e b sono *non negativi*:

$$a < b \iff a^2 < b^2$$

Se anche uno solo dei due è negativo non vale più: $-5 < 3$, ma $25 > 9$. È la regola da cui nasce tutto il capitolo.

3. Disequazione di secondo grado. Il segno di $ax^2 + bx + c$ si legge dal Δ e dal segno di a : fra le radici il trinomio ha segno opposto ad a , fuori lo stesso.

4. Sistemi di disequazioni. Ogni riga si risolve per conto suo, e la risposta è l'**intersezione**: si disegnano sul *grafico delle soluzioni* e si prende la parte comune.

5. Unione e intersezione. $\cap$ vuol dire «e», $\cup$ vuol dire «oppure». In questo capitolo servono tutte e due, e non sono intercambiabili.

6. Le tre scritture di un insieme: disuguaglianza, intervallo, disegno sulla retta.

7. Equazioni irrazionali. Là l'elevamento poteva aggiungere soluzioni, e si scartavano alla fine con la verifica. Qui non si può: i candidati sono *infiniti*.

2 Perché qui la verifica non basta più

Una disequazione è **irrazionale** quando l'incognita compare sotto il segno di radice. Per toglierla di lì bisogna elevare — e con l'esponente pari elevare conserva il verso **solo se i due membri sono già dello stesso segno**.

Esempio Svolto 2.1: Il conto che si rompe: Prendiamo due numeri veri, senza incognite:

$$-5 < 3 \quad \text{ma} \quad (-5)^2 = 25 > 9 = 3^2$$

Elevando al quadrato il verso **si è rovesciato**. Non è un caso limite: succede ogni volta che i due membri hanno segno diverso.

Controllo. Con due numeri non negativi non succede mai: $2 < 5$ dà $4 < 25$ ✓. È esattamente la condizione che tutto il capitolo si preoccupa di garantire prima di elevare.

La differenza con le equazioni irrazionali

Nelle **equazioni** l'elevamento poteva aggiungere soluzioni, e si poteva rimediare alla fine: si risolveva, si trovavano due o tre candidati, e si sostituivano uno per uno nel testo di partenza.

Nelle **disequazioni** quella strada è chiusa: i candidati non sono due, sono **infiniti** — un intervallo intero. Non si può sostituirli tutti.

Perciò la condizione si scrive **prima**, e diventa una riga del sistema. È l'unica differenza fra i due capitoli, ma cambia tutto il modo di lavorare.

Formula 2.1: Le condizioni di esistenza: Prima di qualunque conto si guarda l'**indice**:

- indice **pari**: il radicando deve essere ≥ 0 ;
- indice **dispari**: nessuna condizione, mai.

Se la radice sta a **denominatore** la condizione diventa **stretta**: radicando > 0 .

3 Indice dispari: si eleva e basta

Formula 3.1: Indice dispari: Per n **dispari**:

$$\sqrt[n]{A(x)} \leq B(x) \iff A(x) \leq [B(x)]^n$$

Il verso resta quello di partenza, qualunque sia il segno dei due membri: niente C.E., niente concordanza, nessun sistema.

Esempio Svolto 3.1: Una radice cubica:

$$\sqrt[3]{6-x+x^3} \leq x$$

Elevo al cubo i due membri:

$$6-x+x^3 \leq x^3 \implies 6-x \leq 0 \implies x \geq 6$$

Controllo. Con $x = 6$: il radicando vale $6 - 6 + 216 = 216$, e $\sqrt[3]{216} = 6 \leq 6 \checkmark$. Con $x = 0$: il radicando vale 6, e $\sqrt[3]{6} \approx 1,8$, che non è $\leq 0 \checkmark$.

Perché la funzione dispari non tradisce

$y \mapsto y^3$ è **crescente su tutto** $\mathbb{R}$: se $a < b$ allora $a^3 < b^3$, e viceversa. Conserva l'ordine in tutti e due i versi, e per questo elevare è un'equivalenza piena.

$y \mapsto y^2$ invece scende fino a zero e poi risale: manda -2 e 2 nello stesso posto, e l'ordine lo conserva solo dove è crescente, cioè sui numeri ≥ 0 .

4 Radice e un numero

È il caso più frequente, e si risolve guardando il **segno** del numero prima di fare qualunque conto. I due versi si comportano in modo opposto, e vale la pena vederli affiancati.

Formula 4.1: I quattro casi:

$\sqrt{A(x)} < k$	$\sqrt{A(x)} > k$
$k \leq 0$: impossibile , $S = \emptyset$	$k < 0$: basta la C.E. , $A(x) \geq 0$
$k > 0$: $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) < k^2 \end{cases}$	$k \geq 0$: $A(x) > k^2$ (la C.E. è superflua)

Nel caso a destra con $k \geq 0$ la condizione $A \geq 0$ non si scrive: se A è maggiore di un quadrato, è già positivo.

Esempio Svolto 4.1: I quattro casi, uno accanto all'altro: A. $\sqrt{x^2 + 2x - 3} < -2$. Il secondo membro è negativo: una radice non è mai minore di un numero negativo.

$$S = \emptyset$$

B. $\sqrt{x^2 + 6x} > -3$. Il secondo membro è negativo, ma il verso è il maggiore: dove la radice esiste la disuguaglianza è già vera. Resta solo la C.E. $x^2 + 6x \geq 0$:

$$x \leq -6 \vee x \geq 0$$

C. $\sqrt{x^2 - 1} > 2$. Il secondo membro è positivo: si eleva, e la C.E. non serve scriverla.

$$x^2 - 1 > 4 \implies x^2 > 5 \implies x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5}$$

D. $\sqrt{x^2 - 4} < 3$. Servono tutte e due le righe:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 - 4 < 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -\sqrt{13} < x < \sqrt{13} \end{cases}$$

$$-\sqrt{13} < x \leq -2 \vee 2 \leq x < \sqrt{13}$$

La risposta ha **due pezzi**, e gli estremi restano **esatti**.

Controllo (caso D). $x = 3$: $\sqrt{5} \approx 2,24 < 3$ ✓. $x = 0$: la radice non esiste, e infatti 0 non è nella risposta ✓.

Gli estremi irrazionali non si arrotondano

$\sqrt{13}$ non è 3,61. Se scrivi il numero arrotondato non sai più dire da che parte sta 3,605, e su quel confronto si decide se un valore è soluzione.

Gli estremi si tengono esatti, come si è imparato con i radicali: $\sqrt{13}$, $2\sqrt{5}$, $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

5 Il caso del minore: un sistema

Formula 5.1: $\sqrt{A(x)} < B(x)$:

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \iff \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}$$

Tre righe, un solo sistema, e la risposta è la loro **intersezione**.

Con il verso largo ($\leq$) diventano $B(x) \geq 0$ e $A(x) \leq [B(x)]^2$; la prima riga resta $A(x) \geq 0$.

Metodo 5.1: Come si risolve il caso del minore:

1. scrivi la **C.E.**: $A(x) \geq 0$;
2. scrivi la **concordanza**: $B(x) > 0$ — una radice non è mai negativa, quindi non può essere minore di una quantità negativa o nulla;
3. adesso i due membri sono non negativi: **eleva**, $A < B^2$;
4. risolvi le tre righe e prendi la **parte comune**.

Esempio Svolto 5.1: Il classico:

$$\sqrt{x^2 + 2x - 15} < x - 1$$

1. Il sistema.

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 15 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ x^2 + 2x - 15 < (x - 1)^2 \end{cases}$$

2. Riga per riga.

- $x^2 + 2x - 15 \geq 0$ dà $x \leq -5 \vee x \geq 3$;
- $x - 1 > 0$ dà $x > 1$;
- $x^2 + 2x - 15 < x^2 - 2x + 1$ dà $4x < 16$, cioè $x < 4$.

3. Intersezione. Il primo pezzo $x \leq -5$ cade subito (non rispetta $x > 1$); resta $x \geq 3$ incrociato con $1 < x < 4$:

$$3 \leq x < 4$$

Controllo. $x = 3$: $\sqrt{9+6-15} = 0 < 2$ ✓. $x = 4$: $\sqrt{16+8-15} = 3$, e $x - 1 = 3$: non è minore, giustamente escluso ✓.

La terza riga non garantisce l'esistenza

Nel caso del minore la C.E. **serve davvero**. La riga $A < B^2$ dice solo che A sta sotto un quadrato: A potrebbe essere negativo, e lì la radice non esiste.

È il contrario di quello che succede nel caso del maggiore, dove la riga $A > B^2$ la contiene già. Le due situazioni si somigliano e vanno tenute distinte: **col minore la C.E. si scrive, col maggiore no.**

6 Il caso del maggiore: due sistemi

Formula 6.1: $\sqrt{A(x)} > B(x)$:

$$\sqrt{A(x)} > B(x) \iff \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

Due sistemi, e la risposta è la loro **unione**. Con il verso largo cambia solo la riga dell'elevamento, che diventa $A \geq B^2$.

Esempio Svolto 6.1: Il classico:

$$\sqrt{x-1} > x-3$$

Primo sistema — dove il secondo membro è negativo, basta che la radice esista:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 3 \end{cases} \implies 1 \leq x < 3$$

Secondo sistema — dove è non negativo, si eleva:

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-1 > (x-3)^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 10 < 0 \end{cases} \implies 3 \leq x < 5$$

Unione:

$$1 \leq x < 5$$

Controllo. $x = 2$ (primo sistema): $\sqrt{1} = 1 > -1$ ✓. $x = 4$ (secondo): $\sqrt{3} \approx 1,73 > 1$ ✓.
 $x = 5$: $\sqrt{4} = 2$ e $x - 3 = 2$: non è *maggiore*, escluso ✓.

Esempio Svolto 6.2: Quando la risposta è tutto $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x^2 + 1} > x$$

Primo sistema: $\{x^2 + 1 \geq 0, x < 0\}$. La prima riga è vera sempre ($x^2 + 1$ è positivo per ogni x), quindi resta $x < 0$.

Secondo sistema: $\{x \geq 0, x^2 + 1 > x^2\}$. La seconda riga diventa $1 > 0$, vera sempre: resta $x \geq 0$.

Unione: $x < 0$ oppure $x \geq 0$, cioè

$$S = \mathbb{R}$$

Controllo. Ha senso: $\sqrt{x^2 + 1}$ è sempre maggiore di $\sqrt{x^2} = |x|$, e $|x| \geq x$ per ogni x . Con $x = -3$: $\sqrt{10} \approx 3,16 > -3$ ✓. Con $x = 3$: $\sqrt{10} > 3$ ✓.

Unione, non intersezione

I due sistemi non vanno intersecati: sono due **strade diverse per essere soluzione**, non due condizioni da rispettare insieme.

Il modo di ricordarlo è leggerli a voce: «o il secondo membro è negativo e la radice esiste, **oppure** il secondo membro è positivo e vale la disequazione elevata». Dentro ogni sistema c'è una «e», fra i due sistemi c'è un «oppure».

Intersecandoli si otterrebbe quasi sempre l'insieme vuoto, perché il primo chiede $B < 0$ e il secondo $B \geq 0$.

Quando un sistema è vuoto, e si vede prima

Capita spesso che uno dei due sistemi non abbia soluzioni: se $B(x)$ è sempre positivo, il primo è vuoto; se la C.E. è tutta dentro $B(x) \geq 0$, il secondo fa tutto il lavoro.

Riconoscerlo prima di risolverlo fa risparmiare metà dell'esercizio — ma va detto, non saltato in silenzio: «il primo sistema è impossibile perché $B(x) > 0$ per ogni x » è un passaggio, «non l'ho scritto» no.

7 Radice contro radice

Formula 7.1: $\sqrt{A(x)} \leq \sqrt{B(x)}$:

$$\sqrt{A} < \sqrt{B} \iff \begin{cases} A \geq 0 \\ A < B \end{cases} \quad \sqrt{A} > \sqrt{B} \iff \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B \end{cases}$$

La C.E. si impone a **uno solo** dei due radicandi, e quale dipende dal verso: si impone sempre a quello **più piccolo**, perché l'altro viene da sé.

Esempio Svolto 7.1: Due radici quadrate:

$$\sqrt{3x-2} < \sqrt{x+6}$$

1. Verso minore: si impone $3x-2 \geq 0$, cioè $x \geq \frac{2}{3}$.
2. Si confrontano i radicandi: $3x-2 < x+6$, cioè $x < 4$.
3. Intersezione:

$$\frac{2}{3} \leq x < 4$$

Controllo. $x = 1$: $\sqrt{1} = 1 < \sqrt{7} \approx 2,65$ ✓. $x = 0$: il primo radicando vale -2 , la radice non esiste, e infatti 0 è fuori ✓.

Perché basta una condizione sola

Con il minore: se $A \geq 0$ e $A < B$, allora $B > A \geq 0$, quindi $B \geq 0$ è automatica. Con il maggiore: se $B \geq 0$ e $A > B$, allora $A > 0$.

Scrivere anche l'altra non è *sbagliato*: è una disequazione in più da risolvere per niente, e ogni disequazione in più è un'occasione in più di sbagliare un segno.

8 Due o più radicali

Quando le radici sono due e non sono sole, si isola, si eleva, si isola quello che resta e si eleva di nuovo.

Metodo 8.1: Il doppio elevamento:

1. C.E. di tutti i radicandi, messe a sistema;
2. **sposta** le radici in modo che i due membri siano **non negativi**: solo così elevare conserva il verso;
3. **eleva**: resta un doppio prodotto con dentro una radice;

4. **isola** la radice che resta ed eleva di nuovo;
5. **interseca** il risultato con le C.E. del punto 1.

Esempio Svolto 8.1: Due radici e un numero:

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} < 1$$

1. **C.E.** $x+2 \geq 0$ e $x-1 \geq 0$: insieme, $x \geq 1$.
2. **Sposto** la radice negativa a destra, così i due membri sono non negativi:

$$\sqrt{x+2} < 1 + \sqrt{x-1}$$

3. **Primo elevamento.**

$$x+2 < 1 + (x-1) + 2\sqrt{x-1} \implies 2 < 2\sqrt{x-1} \implies \sqrt{x-1} > 1$$

4. **Secondo elevamento.** $x-1 > 1$, cioè $x > 2$.
5. **Intersezione con la C.E.:** $x \geq 1$ non toglie niente.

$$x > 2$$

Controllo. $x = 3$: $\sqrt{5} - \sqrt{2} \approx 0,82 < 1$ ✓. $x = 1$: $\sqrt{3} - 0 \approx 1,73$, che non è < 1 ✓.

Il verso si rovescia quando la radice cambia parte

Al passaggio 3 la radice è finita a *destra*: da $2 < 2\sqrt{x-1}$ si legge $\sqrt{x-1} > 1$, non $<$. È un errore che non si vede nei conti — restano tutti giusti — e si vede solo nella risposta, che viene esattamente il complementare di quella vera. Se il risultato ti sembra «al contrario», guarda qui.

9 Sistemi di disequazioni irrazionali

Niente di nuovo: ogni riga si risolve **per conto suo**, con il metodo che le spetta, e poi si incrociano gli insiemi sul grafico delle soluzioni.

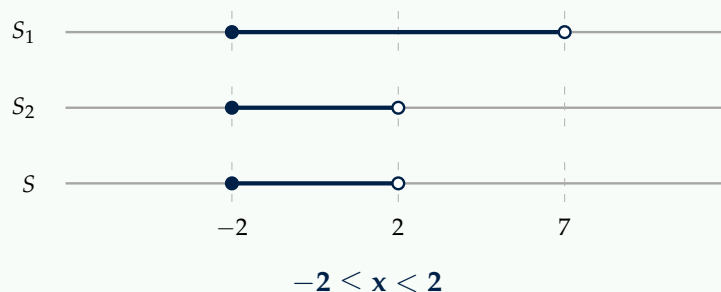
Esempio Svolto 9.1: Due righe, due metodi diversi:

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} < 3 \\ \sqrt{x+2} > x \end{cases}$$

Prima riga — radice e un numero positivo: $\{x+2 \geq 0, x+2 < 9\}$ dà $-2 \leq x < 7$.

Seconda riga — caso del maggiore, due sistemi: $\{x + 2 \geq 0, x < 0\}$ dà $-2 \leq x < 0$; $\{x \geq 0, x + 2 > x^2\}$ dà $0 \leq x < 2$. Unione: $-2 \leq x < 2$.

Il grafico, con i punti sulla stessa verticale:



Controllo. $x = 0$: $\sqrt{2} \approx 1,41$, che è $< 3 \checkmark$ e $> 0 \checkmark$. $x = 3$: $\sqrt{5} \approx 2,24 < 3 \checkmark$ ma non è > 3 : la seconda riga cade, e infatti 3 è fuori $\checkmark$.

Le C.E. sono del sistema

Se una riga esclude un valore perché lì la sua radice non esiste, quel valore è fuori dalla risposta **anche se tutte le altre righe lo accettano**. La graffa lega tutto.

10 Problemi

Una disequazione irrazionale nasce ogni volta che una formula con la radice va confrontata con un valore: il periodo di un pendolo, la velocità di caduta, il lato di un quadrato di area nota, l'ipotenusa di un triangolo.

Esempio Svolto 10.1: Il lato del quadrato: Il lato di un quadrato di area A vale $\sqrt{A}$. Per quali aree il lato è minore di 7 cm?

1. **L'incognita:** A è l'area, in cm^2 .

2. **La disequazione:** $\sqrt{A} < 7$.

3. **Il sistema:** $\{A \geq 0, A < 49\}$.

4. **Risposta:** $0 \leq A < 49 \text{ cm}^2$. E siccome un quadrato con area nulla non esiste, nel testo si scrive $0 < A < 49$.

Controllo. Con $A = 36$ il lato è 6, minore di 7 $\checkmark$. Con $A = 49$ è esattamente 7, e infatti l'estremo è escluso $\checkmark$.

Due scarti diversi, due motivi diversi

La C.E. toglie i valori dove l'espressione non esiste: si scarta per *matematica*.

Il **senso del problema** toglie i valori che la realtà non ammette (un'area nulla, una lunghezza negativa, un numero di persone con la virgola): si scarta per *realtà*, e va detto a

parole.

11 Quale strada, e quando

Formula 11.1: La mappa del capitolo:

Se la disequazione è...	allora...
con indice dispari	eleva e basta: nessuna condizione
$\sqrt{A} < k$ con $k \leq 0$	$S = \emptyset$, senza conti
$\sqrt{A} > k$ con $k < 0$	solo la C.E. $A \geq 0$
$\sqrt{A} < k$ con $k > 0$	$\{A \geq 0, A < k^2\}$
$\sqrt{A} > k$ con $k \geq 0$	$A > k^2$, e basta
$\sqrt{A} < B(x)$	un sistema: $A \geq 0, B > 0, A < B^2$
$\sqrt{A} > B(x)$	due sistemi da unire
$\sqrt{A} \leq \sqrt{B}$	confronta i radicandi, con la C.E. del più piccolo
due radici e altri termini	isola, eleva, isola, eleva, poi interseca con le C.E.

Esempio Svolto 11.1: Quale strada, senza risolvere: Per ciascuna, la prima mossa — e basta quella.

$\sqrt{x-4} < -1$: secondo membro negativo, verso minore. **Impossibile**, senza conti.

$\sqrt{x^2-9} > -2$: secondo membro negativo, verso maggiore. Solo la **C.E.**

$\sqrt{2x+1} < x$: c'è la x a destra, verso minore. **Un** sistema di tre righe.

$\sqrt{x+5} \geq x-1$: c'è la x a destra, verso maggiore. **Due** sistemi da unire.

$\sqrt[3]{x-2} > 1$: indice **dispari**. Si eleva al cubo e si chiude.

Chi sceglie bene la prima mossa ha già fatto metà dell'esercizio; chi la sceglie male fa dieci righe di conti giusti per arrivare a una risposta sbagliata.

Dove si va da qui

Le condizioni di questo capitolo diventano il **dominio** nello studio di funzione: quando si scrive il campo di esistenza di $y = \sqrt{f(x)}$ si sta facendo esattamente la C.E. di qui.

Il ragionamento sui **due casi** — secondo membro negativo, secondo membro positivo — torna identico nelle disequazioni con il valore assoluto e in quelle logaritmiche: ogni

volta che si applica ai due membri una funzione che non conserva l'ordine su tutto $\mathbb{R}$, bisogna spezzare in casi.

Indice analitico

caso del maggiore, 7

caso del minore, 6

caso della costante, 5

disequazione irrazionale, 3

doppio elevamento, 9

due radici, 9

indice dispari, 4

problemi, 11

riepilogo, 12

sistemi, 10