

EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE

Esercizi divisi per tipologia e difficoltà.

-
- binomie, e prodotti già scomposti
 - trinomie, raccoglimenti, reciproche di terzo grado
 - Ruffini, fratte, molteplicità da dichiarare
 - reciproche di quarto grado, problemi, dimostrazioni

La risposta è un **insieme di radici**, e ogni radice si scrive **una volta sola**: se è doppia o tripla, la **molteplicità** si dichiara accanto. Non è pignoleria — è l'unico modo per far tornare il conto con il **grado**, che è il controllo di questo capitolo. Se non ci sono radici reali si scrive $S = \emptyset$, non «impossibile»: le radici ci sono, ma sono complesse. Nelle trinomie ricorda che **non è la risposta** — bisogna tornare a x . E non si divide mai per x : si raccoglie, e ogni x raccolta è una soluzione $x = 0$. Prima di considerare finito un esercizio: **sostituisci** ogni radice nell'equazione di partenza, e conta se il grado torna. I procedimenti dei primi due esercizi di ogni blocco e di tutti quelli segnati ■■■■ stanno nel file delle soluzioni.

1. Ripasso: legge di annullamento, grado e radici

Teoria: par. 2–3

■□□□ Risolvi applicando la legge di annullamento del prodotto: sono già scomposte.

1. $(x - 2)(x + 5)(x - 1) = 0$ [$S = \{-5, 1, 2\}$]
2. $x(x - 3)(x + 3) = 0$ [$S = \{-3, 0, 3\}$]
3. $(x + 1)^2(x - 4) = 0$ [$S = \{-1, 4\}$, con -1 di molteplicità 2]
4. $(2x - 1)(x + 2)(x - 5) = 0$ [$S = \{-2, \frac{1}{2}, 5\}$]
5. $(x - 1)^3 = 0$ [$S = \{1\}$, con molteplicità 3]
6. $x^2(x - 7) = 0$ [$S = \{0, 7\}$, con 0 di molteplicità 2]
7. $(x^2 + 1)(x - 3) = 0$ [$S = \{3\}$: il fattore $x^2 + 1$ non si annulla mai]
8. $(x^2 - 9)(x + 1) = 0$ [$S = \{-3, -1, 3\}$]
9. $(x - 2)^2(x + 2)^2 = 0$ [$S = \{-2, 2\}$, tutte e due di molteplicità 2]
10. $3x(x - 1)(x + 4)(x - 6) = 0$ [$S = \{-4, 0, 1, 6\}$]

■■□□ Rispondi senza risolvere, ragionando sul grado e sulla molteplicità.

11. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ha quattro radici reali. Quante ne prevede il grado? [quattro: $4 = 4$, tutte reali e tutte semplici]
12. $(x - 1)(x + 1)^3 = 0$: quante soluzioni e quante radici? [due soluzioni (1 e -1) e quattro radici, perché -1 ha molteplicità 3]
13. $x^4 + 16 = 0$: quante radici reali? [nessuna. Le quattro radici ci sono, ma sono tutte complesse: una potenza pari non è mai negativa]
14. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$: quante soluzioni? [una sola, $x = -1$, ma con molteplicità 3: è $(x + 1)^3 = 0$]
15. Un'equazione di quinto grado può avere sei soluzioni? [no: al massimo cinque, e sono cinque solo contando molteplicità e radici complesse]
16. Un'equazione di quarto grado può avere una sola soluzione reale? [sì: per esempio $(x - 1)^4 = 0$, oppure $(x - 1)^2(x^2 + 1) = 0$]
17. $x^6 - 64 = 0$ è di sesto grado: perché le soluzioni reali sono due? [è binomia, $x^6 = 64$ con esponente pari: dà $x = \pm 2$, e le altre quattro radici sono complesse]
18. Perché un'equazione di grado dispari ha sempre almeno una radice reale? [le radici complesse vanno a coppie coniugate, quindi sono in numero pari: con grado dispari almeno una deve restare reale]

2. Equazioni binomie

Teoria: par. 4

■□□□ **Binomie: si isola x^n e si guarda la parità dell'esponente prima di estrarre.**

19. $x^3 - 8 = 0$ [S: 2]

20. $x^3 + 27 = 0$ [S: -3]

21. $x^3 - 1 = 0$ [S: 1]

22. $x^3 + 64 = 0$ [S: -4]

23. $x^4 - 16 = 0$ [S: -2, 2]

24. $x^4 - 81 = 0$ [S: -3, 3]

25. $x^4 - 1 = 0$ [S: -1, 1]

26. $x^4 + 16 = 0$ [S: $\emptyset$]

27. $x^4 + 81 = 0$ [S: $\emptyset$]

28. $x^5 - 32 = 0$ [S: 2]

29. $x^5 + 243 = 0$ [S: -3]

30. $x^6 - 64 = 0$ [S: -2, 2]

31. $x^6 + 64 = 0$ [S: $\emptyset$]

32. $8x^3 - 1 = 0$ [S: $\frac{1}{2}$]

33. $27x^3 + 8 = 0$ [S: $-\frac{2}{3}$]

34. $16x^4 - 1 = 0$ [S: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$]

35. $x^3 - 125 = 0$ [S: 5]

36. $x^3 + 1000 = 0$ [S: -10]

37. $x^4 - 625 = 0$ [S: -5, 5]

38. $x^5 + 32 = 0$ [S: -2]

39. $2x^3 - 54 = 0$ [S: 3]

40. $3x^4 - 48 = 0$ [S: -2, 2]

41. $x^3 - 1 = 0$ [S: 1]

42. $x^3 + 1 = 0$ [S: -1]

43. $x^3 - 8 = 0$ [S: 2]

44. $x^3 + 8 = 0$ [S: -2]

45. $x^3 - 27 = 0$ [S: 3]

46. $x^3 + 27 = 0$ [S: -3]

47. $x^3 - 64 = 0$ [S: 4]

48. $x^3 + 64 = 0$ [S: -4]

49. $x^3 - 125 = 0$ [S: 5]

50. $x^3 + 125 = 0$ [S: -5]

51. $x^3 - 216 = 0$ [S: 6]

52. $x^3 + 216 = 0$ [S: -6]

53. $x^3 - 343 = 0$ [S: 7]

54. $x^3 + 343 = 0$ [S: -7]

55. $x^3 - 1000 = 0$ [S: 10]

56. $x^3 + 1000 = 0$ [S: -10]

57. $x^4 - 1 = 0$ [S: -1, 1]

58. $x^4 - 16 = 0$ [S: -2, 2]

59. $x^4 - 81 = 0$ [S: -3, 3]

60. $x^4 - 256 = 0$ [S: -4, 4]

61. $x^4 - 625 = 0$ [S: -5, 5]

62. $x^4 - 1296 = 0$ [S: -6, 6]

63. $x^4 - 2401 = 0$ [S: -7, 7]

64. $x^4 - 10000 = 0$ [S: -10, 10]

65. $x^5 - 1 = 0$ [S: 1]

66. $x^5 + 1 = 0$ [S: -1]

67. $x^5 - 32 = 0$ [S: 2]

68. $x^5 + 32 = 0$ [S: -2]

69. $x^5 - 243 = 0$ [S: 3]

70. $x^5 + 243 = 0$ [S: -3]

71. $x^5 - 1024 = 0$ [S: 4]

72. $x^5 + 1024 = 0$ [S: -4]

73. $x^5 - 3125 = 0$ [S: 5]

74. $x^5 + 3125 = 0$ [S: -5]

75. $x^5 - 7776 = 0$ [S: 6]

76. $x^5 + 7776 = 0$ [S: -6]

77. $x^5 - 16807 = 0$ [S: 7]

78. $x^5 + 16807 = 0$ [S: -7]

79. $x^5 - 100000 = 0$ [S: 10]

80. $x^5 + 100000 = 0$ [S: -10]

81. $x^6 - 1 = 0$ [S: -1, 1]

82. $x^6 - 64 = 0$ [S: -2, 2]

83. $x^6 - 729 = 0$ [S: -3, 3]

84. $x^6 - 4096 = 0$ [S: -4, 4]

85. $x^6 - 15625 = 0$ [S: -5, 5]

86. $x^6 - 46656 = 0$ [S: -6, 6]

87. $x^6 - 117649 = 0$ [S: -7, 7]

88. $x^6 - 1000000 = 0$ [S: -10, 10]

89. $x^3 - 1 = 0$ [S: 1]

90. $x^3 + 1 = 0$ [S: -1]

91. $x^4 - 1 = 0$ [S: -1, 1]

92. $x^3 - 8 = 0$ [S: 2]

93. $x^3 + 8 = 0$ [S: -2]

94. $x^4 - 16 = 0$ [S: -2, 2]

95. $x^3 - 27 = 0$ [S: 3]

96. $x^3 + 27 = 0$ [S: -3]

97. $x^4 - 81 = 0$ [S: -3, 3]

98. $x^3 - 125 = 0$ [S: 5]

99. $x^3 + 125 = 0$ [S: -5]

100. $x^4 - 625 = 0$ [S: -5, 5]

101. $2x^3 - 2 = 0$ [S: 1]

102. $2x^3 + 2 = 0$ [S: -1]

103. $2x^4 - 2 = 0$ [S: -1, 1]

104. $2x^3 - 16 = 0$ [S: 2]

105. $2x^3 + 16 = 0$ [S: -2]

106. $2x^4 - 32 = 0$ [S: -2, 2]

107. $2x^3 - 54 = 0$ [S: 3]

108. $2x^3 + 54 = 0$ [S: -3]

109. $2x^4 - 162 = 0$ [S: -3, 3]

110. $2x^3 - 250 = 0$ [S: 5]

111. $2x^3 + 250 = 0$ [S: -5]

112. $2x^4 - 1250 = 0$ [S: -5, 5]

113. $3x^3 - 3 = 0$ [S: 1]

114. $3x^3 + 3 = 0$ [S: -1]

115. $3x^4 - 3 = 0$ [S: -1, 1]

116. $3x^3 - 24 = 0$ [S: 2]

117. $3x^3 + 24 = 0$ [S: -2]

118. $3x^4 - 48 = 0$ [S: -2, 2]

119. $3x^3 - 81 = 0$ [S: 3]

120. $3x^3 + 81 = 0$ [S: -3]

121. $3x^4 - 243 = 0$ [S: -3, 3]

122. $3x^3 - 375 = 0$ [S: 5]

123. $3x^3 + 375 = 0$ [S: -5]

124. $3x^4 - 1875 = 0$ [S: -5, 5]

125. $4x^3 - 4 = 0$ [S: 1]

126. $4x^3 + 4 = 0$ [S: -1]

127. $4x^4 - 4 = 0$ [S: -1, 1]

128. $4x^3 - 32 = 0$ [S: 2]

129. $4x^3 + 32 = 0$ [S: -2]

130. $4x^4 - 64 = 0$ [S: -2, 2]

131. $4x^3 - 108 = 0$ [S: 3]

132. $4x^3 + 108 = 0$ [S: -3]

133. $4x^4 - 324 = 0$ [S: -3, 3]

134. $4x^3 - 500 = 0$ [S: 5]

135. $4x^3 + 500 = 0$ [S: -5]

136. $4x^4 - 2500 = 0$ [S: -5, 5]

137. $5x^3 - 5 = 0$ [S: 1]

138. $5x^3 + 5 = 0$ [S: -1]

139. $5x^4 - 5 = 0$ [S: -1, 1]

140. $5x^3 - 40 = 0$ [S: 2]

141. $5x^3 + 40 = 0$ [S: -2]

142. $5x^4 - 80 = 0$ [S: -2, 2]

143. $5x^3 - 135 = 0$ [S: 3]

144. $5x^3 + 135 = 0$ [S: -3]

145. $5x^4 - 405 = 0$ [S: -3, 3]

146. $5x^3 - 625 = 0$ [S: 5]

147. $5x^3 + 625 = 0$ [S: -5]

148. $5x^4 - 3125 = 0$ [S: -5, 5]

149. $8x^3 - 8 = 0$ [S: 1]

150. $8x^3 + 8 = 0$ [S: -1]

151. $8x^4 - 8 = 0$ [S: -1, 1]

152. $8x^3 - 64 = 0$ [S: 2]

153. $8x^3 + 64 = 0$ [S: -2]

154. $8x^4 - 128 = 0$ [S: -2, 2]

155. $8x^3 - 216 = 0$ [S: 3]

156. $8x^3 + 216 = 0$ [S: -3]

157. $8x^4 - 648 = 0$ [S: -3, 3]

158. $8x^3 - 1000 = 0$ [S: 5]

159. $8x^3 + 1000 = 0$ [S: -5]

160. $8x^4 - 5000 = 0$ [S: -5, 5]

161. $9x^3 - 9 = 0$ [S: 1]

162. $9x^3 + 9 = 0$ [S: -1]

163. $9x^4 - 9 = 0$ [S: -1, 1]

164. $9x^3 - 72 = 0$ [S: 2]

165. $9x^3 + 72 = 0$ [S: -2]

166. $9x^4 - 144 = 0$ [S: -2, 2]

167. $9x^3 - 243 = 0$ [S: 3]

168. $9x^3 + 243 = 0$ [S: -3]

169. $9x^4 - 729 = 0$ [S: -3, 3]

170. $9x^3 - 1125 = 0$ [S: 5]

171. $9x^3 + 1125 = 0$ [S: -5]

172. $9x^4 - 5625 = 0$ [S: -5, 5]

173. $16x^3 - 16 = 0$ [S: 1]

174. $16x^3 + 16 = 0$ [S: -1]

175. $16x^4 - 16 = 0$ [S: -1, 1]

176. $16x^3 - 128 = 0$ [S: 2]

177. $16x^3 + 128 = 0$ [S: -2]

178. $16x^4 - 256 = 0$ [S: -2, 2]

179. $16x^3 - 432 = 0$ [S: 3]

180. $16x^3 + 432 = 0$ [S: -3]

181. $16x^4 - 1296 = 0$ [S: -3, 3]

182. $16x^3 - 2000 = 0$ [S: 5]

183. $16x^3 + 2000 = 0$ [S: -5]

184. $16x^4 - 10000 = 0$ [S: -5, 5]

185. $25x^3 - 25 = 0$ [S: 1]

186. $25x^3 + 25 = 0$ [S: -1]

187. $25x^4 - 25 = 0$ [S: -1, 1]

188. $25x^3 - 200 = 0$ [S: 2]

189. $25x^3 + 200 = 0$ [S: -2]

190. $25x^4 - 400 = 0$ [S: -2, 2]

191. $25x^3 - 675 = 0$ [S: 3]

192. $25x^3 + 675 = 0$ [S: -3]

193. $25x^4 - 2025 = 0$ [S: -3, 3]

194. $25x^3 - 3125 = 0$ [S: 5]

195. $25x^3 + 3125 = 0$ [S: -5]

196. $25x^4 - 15625 = 0$ [S: -5, 5]

197. $27x^3 - 27 = 0$ [S: 1]

198. $27x^3 + 27 = 0$ [S: -1]

199. $27x^4 - 27 = 0$ [S: -1, 1]

200. $27x^3 - 216 = 0$ [S: 2]

201. $27x^3 + 216 = 0$ [S: -2]

202. $27x^4 - 432 = 0$ [S: -2, 2]

203. $27x^3 - 729 = 0$ [S: 3]

204. $27x^3 + 729 = 0$ [S: -3]

205. $27x^4 - 2187 = 0$ [S: -3, 3]

206. $27x^3 - 3375 = 0$ [S: 5]

207. $27x^3 + 3375 = 0$ [S: -5]

208. $27x^4 - 16875 = 0$ [S: -5, 5]

3. Equazioni trinomie

Teoria: par. 5

■ ■ ■ Trinomie: poni $t = x^n$, risolvi in t , e torna a x . I t che non danno radici reali si scartano, e va detto.

209. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ [S: -2, -1, 1, 2]

210. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ [S: -3, -1, 1, 3]

211. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ [S: -3, -2, 2, 3]

212. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ [S: -1, 1]

213. $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$ [S: -1, 1]

214. $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ [S: -1 (molt. 2), 1 (molt. 2)]

215. $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$ [S: $\emptyset$]

216. $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ [S: $\emptyset$]

217. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ [S: -4, -3, 3, 4]

218. $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$ [S: -4, -1, 1, 4]

219. $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ [S: -5, -2, 2, 5]

220. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ [S: -2, -1, 1, 2]

221. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ [S: 1, 2]

222. $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ [S: -1, 2]

223. $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$ [S: 1, 3]

224. $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$ [S: -2, -1]

225. $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ [S: -1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1]

226. $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ [S: -1, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, 1]

227. $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$ [S: -5, -3, 3, 5]

228. $x^4 - 40x^2 + 144 = 0$ [S: -6, -2, 2, 6]

229. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ [S: -2, -1, 1, 2]

230. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ [S: -3, -1, 1, 3]

231. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ [S: -3, -2, 2, 3]

232. $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$ [S: -4, -1, 1, 4]

233. $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ [S: -4, -2, 2, 4]

234. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ [S: -4, -3, 3, 4]

235. $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$ [S: -5, -1, 1, 5]

236. $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ [S: -5, -2, 2, 5]

237. $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$ [S: -5, -3, 3, 5]

238. $x^4 - 41x^2 + 400 = 0$ [S: -5, -4, 4, 5]

239. $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$ [S: -6, -1, 1, 6]

240. $x^4 - 40x^2 + 144 = 0$ [S: -6, -2, 2, 6]

241. $x^4 - 45x^2 + 324 = 0$ [S: -6, -3, 3, 6]

242. $x^4 - 61x^2 + 900 = 0$ [S: -6, -5, 5, 6]

243. $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$ [S: -7, -1, 1, 7]
 244. $x^4 - 53x^2 + 196 = 0$ [S: -7, -2, 2, 7]
 245. $x^4 - 58x^2 + 441 = 0$ [S: -7, -3, 3, 7]
 246. $x^4 - 65x^2 + 784 = 0$ [S: -7, -4, 4, 7]
 247. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ [S: -2, 2]
 248. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ [S: -3, 3]
 249. $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$ [S: -4, 4]
 250. $x^4 - 16x^2 - 225 = 0$ [S: -5, 5]
 251. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ [S: -1, 1]
 252. $x^4 + 12x^2 - 64 = 0$ [S: -2, 2]
 253. $x^4 + 16x^2 - 225 = 0$ [S: -3, 3]
 254. $x^4 - 35x^2 - 36 = 0$ [S: -6, 6]
 255. $x^4 - 45x^2 - 196 = 0$ [S: -7, 7]
 256. $x^4 - 55x^2 - 576 = 0$ [S: -8, 8]
 257. $x^4 - 65x^2 + 64 = 0$ [S: -8, -1, 1, 8]
 258. $x^4 - 68x^2 + 256 = 0$ [S: -8, -2, 2, 8]
 259. $x^4 - 73x^2 + 576 = 0$ [S: -8, -3, 3, 8]
 260. $x^4 - 80x^2 + 1024 = 0$ [S: -8, -4, 4, 8]
 261. $x^4 - 89x^2 + 1600 = 0$ [S: -8, -5, 5, 8]
 262. $x^4 - 100x^2 + 2304 = 0$ [S: -8, -6, 6, 8]
 263. $x^4 - 82x^2 + 81 = 0$ [S: -9, -1, 1, 9]
 264. $x^4 - 85x^2 + 324 = 0$ [S: -9, -2, 2, 9]
 265. $x^4 - 90x^2 + 729 = 0$ [S: -9, -3, 3, 9]
 266. $x^4 - 97x^2 + 1296 = 0$ [S: -9, -4, 4, 9]
 267. $x^4 - 106x^2 + 2025 = 0$ [S: -9, -5, 5, 9]
 268. $x^4 - 130x^2 + 3969 = 0$ [S: -9, -7, 7, 9]
 269. $x^4 - 101x^2 + 100 = 0$ [S: -10, -1, 1, 10]
 270. $x^4 - 104x^2 + 400 = 0$ [S: -10, -2, 2, 10]
 271. $x^4 - 109x^2 + 900 = 0$ [S: -10, -3, 3, 10]
 272. $x^4 - 136x^2 + 3600 = 0$ [S: -10, -6, 6, 10]
 273. $x^4 - 149x^2 + 4900 = 0$ [S: -10, -7, 7, 10]
 274. $x^4 - 122x^2 + 121 = 0$ [S: -11, -1, 1, 11]
 275. $x^4 - 125x^2 + 484 = 0$ [S: -11, -2, 2, 11]
 276. $x^4 - 130x^2 + 1089 = 0$ [S: -11, -3, 3, 11]
 277. $x^4 - 137x^2 + 1936 = 0$ [S: -11, -4, 4, 11]
 278. $x^4 - 146x^2 + 3025 = 0$ [S: -11, -5, 5, 11]

4. Risolvibili con la scomposizione in fattori

Teoria: par. 6

■ ■ ■ ■ Scomponi e annulla un fattore per volta: raccoglimento, prodotti notevoli, raccoglimento parziale.

279. $x^3 - 4x = 0$ [S: -2, 0, 2]
 280. $x^3 - 9x = 0$ [S: -3, 0, 3]
 281. $x^3 - x = 0$ [S: -1, 0, 1]
 282. $x^3 - 16x = 0$ [S: -4, 0, 4]
 283. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ [S: -1 (molt. 3)]
 284. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ [S: 1 (molt. 3)]
 285. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$ [S: -2 (molt. 3)]
 286. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$ [S: 2 (molt. 3)]
 287. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ [S: -3, -2, 2]
 288. $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$ [S: -3, 2, 3]
 289. $x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = 0$ [S: -5, -2, 2]
 290. $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ [S: -2, 1, 2]
 291. $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$ [S: -4, -1, 1]
 292. $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$ [S: -2, 2, 5]
 293. $x^3 - 1 = 0$ [S: 1]
 294. $x^3 + 1 = 0$ [S: -1]

295. $x^4 - 1 = 0$ [S: -1, 1]
296. $2x^3 - 8x = 0$ [S: -2, 0, 2]
297. $3x^3 - 27x = 0$ [S: -3, 0, 3]
298. $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$ [S: -4, -2, -1]
299. $x^3 - x = 0$ [S: -1, 0, 1]
300. $x^4 - x^2 = 0$ [S: -1, 0 (molt. 2), 1]
301. $x^3 - 4x = 0$ [S: -2, 0, 2]
302. $x^4 - 4x^2 = 0$ [S: -2, 0 (molt. 2), 2]
303. $x^3 - 9x = 0$ [S: -3, 0, 3]
304. $x^4 - 9x^2 = 0$ [S: -3, 0 (molt. 2), 3]
305. $x^3 - 16x = 0$ [S: -4, 0, 4]
306. $x^4 - 16x^2 = 0$ [S: -4, 0 (molt. 2), 4]
307. $x^3 - 25x = 0$ [S: -5, 0, 5]
308. $x^4 - 25x^2 = 0$ [S: -5, 0 (molt. 2), 5]
309. $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ [S: 0, 1, 2]
310. $x^4 - 3x^3 + 2x^2 = 0$ [S: 0 (molt. 2), 1, 2]
311. $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ [S: 0, 2, 3]
312. $x^4 - 5x^3 + 6x^2 = 0$ [S: 0 (molt. 2), 2, 3]
313. $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ [S: -1, 0, 3]
314. $x^4 - 2x^3 - 3x^2 = 0$ [S: -1, 0 (molt. 2), 3]
315. $x^3 + 3x^2 - 4x = 0$ [S: -4, 0, 1]
316. $x^4 + 3x^3 - 4x^2 = 0$ [S: -4, 0 (molt. 2), 1]
317. $x^3 - 7x^2 + 10x = 0$ [S: 0, 2, 5]
318. $x^4 - 7x^3 + 10x^2 = 0$ [S: 0 (molt. 2), 2, 5]
319. $x^3 - 2x^2 - 8x = 0$ [S: -2, 0, 4]
320. $x^4 - 2x^3 - 8x^2 = 0$ [S: -2, 0 (molt. 2), 4]
321. $x^3 + 2x^2 - 15x = 0$ [S: -5, 0, 3]
322. $x^4 + 2x^3 - 15x^2 = 0$ [S: -5, 0 (molt. 2), 3]
323. $x^3 - 7x^2 + 6x = 0$ [S: 0, 1, 6]
324. $x^4 - 7x^3 + 6x^2 = 0$ [S: 0 (molt. 2), 1, 6]
325. $x^3 + x^2 - 6x = 0$ [S: -3, 0, 2]
326. $x^4 + x^3 - 6x^2 = 0$ [S: -3, 0 (molt. 2), 2]
327. $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$ [S: -1, 0, 4]
328. $x^4 - 3x^3 - 4x^2 = 0$ [S: -1, 0 (molt. 2), 4]
329. $x^3 + 4x^2 - 12x = 0$ [S: -6, 0, 2]
330. $x^4 + 4x^3 - 12x^2 = 0$ [S: -6, 0 (molt. 2), 2]
331. $x^3 - 8x^2 + 7x = 0$ [S: 0, 1, 7]
332. $x^3 - 9x^2 + 14x = 0$ [S: 0, 2, 7]
333. $x^3 - 6x^2 - 7x = 0$ [S: -1, 0, 7]
334. $x^3 - 10x^2 + 21x = 0$ [S: 0, 3, 7]
335. $x^3 - 5x^2 - 14x = 0$ [S: -2, 0, 7]
336. $x^3 - 9x^2 + 8x = 0$ [S: 0, 1, 8]
337. $x^3 - 10x^2 + 16x = 0$ [S: 0, 2, 8]
338. $x^3 - 5x^2 - 24x = 0$ [S: -3, 0, 8]
339. $x^3 - 10x^2 + 9x = 0$ [S: 0, 1, 9]
340. $x^3 - 5x^2 - 36x = 0$ [S: -4, 0, 9]
341. $x^3 - 11x^2 + 18x = 0$ [S: 0, 2, 9]
342. $x^3 - 14x^2 + 45x = 0$ [S: 0, 5, 9]
343. $x^3 - 11x^2 + 10x = 0$ [S: 0, 1, 10]
344. $x^3 - 5x^2 - 50x = 0$ [S: -5, 0, 10]
345. $x^3 - 13x^2 + 30x = 0$ [S: 0, 3, 10]
346. $x^3 - 16x^2 + 60x = 0$ [S: 0, 6, 10]
347. $x^3 - 12x^2 + 11x = 0$ [S: 0, 1, 11]
348. $x^3 - 5x^2 - 66x = 0$ [S: -6, 0, 11]
349. $x^3 - 13x^2 + 22x = 0$ [S: 0, 2, 11]
350. $x^3 - 18x^2 + 77x = 0$ [S: 0, 7, 11]
351. $x^3 - 13x^2 + 12x = 0$ [S: 0, 1, 12]
352. $x^3 - 5x^2 - 84x = 0$ [S: -7, 0, 12]

5. Risolvibili con Ruffini

Teoria: par. 7

■■■□ Ruffini: cerca la radice fra i divisori del termine noto, e fermati al secondo grado.

- | | |
|---|---|
| 353. $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$ [S: -2, -1, 5] | 374. $x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 10x = 0$ [S: -2, -1, 0, 5] |
| 354. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ [S: 1, 2, 3] | 375. $x^4 - x^3 - 10x^2 - 8x = 0$ [S: -2, -1, 0, 4] |
| 355. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ [S: -1, 2, 3] | 376. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ [S: 1, 2, 3] |
| 356. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ [S: -3, -1, 2] | 377. $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$ [S: -1, 2, 4] |
| 357. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ [S: -2, 2, 3] | 378. $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$ [S: -2, 1, 5] |
| 358. $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$ [S: -4, 1, 2] | 379. $x^3 - 7x - 6 = 0$ [S: -2, -1, 3] |
| 359. $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ [S: 1, 2, 4] | 380. $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ [S: -4, 2, 3] |
| 360. $x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0$ [S: -4, -2, 1] | 381. $x^3 - 21x + 20 = 0$ [S: -5, 1, 4] |
| 361. $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ [S: -4, 2, 3] | 382. $x^3 - 7x + 6 = 0$ [S: -3, 1, 2] |
| 362. $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$ [S: -4, -2, 3] | 383. $x^3 - 3x^2 - 28x + 60 = 0$ [S: -5, 2, 6] |
| 363. $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ [S: 1, 3, 5] | 384. $x^3 + 2x^2 - 21x + 18 = 0$ [S: -6, 1, 3] |
| 364. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$ [S: -3, -2, -1] | 385. $x^3 - 7x^2 + 2x + 40 = 0$ [S: -2, 4, 5] |
| 365. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ [S: -2, 1, 3] | 386. $x^3 - 5x^2 - 17x + 21 = 0$ [S: -3, 1, 7] |
| 366. $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ [S: -3, -2, 1] | 387. $x^3 - 7x^2 + 4x + 12 = 0$ [S: -1, 2, 6] |
| 367. $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$ [S: 1, 3, 4] | 388. $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ [S: -4, 2, 3] |
| 368. $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$ [S: -1, 2, 4] | 389. $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$ [S: -2, 1, 5] |
| 369. $x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$ [S: -4, -1, 3] | 390. $x^3 + x^2 - 24x + 36 = 0$ [S: -6, 2, 3] |
| 370. $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$ [S: 2, 3, 5] | 391. $x^3 - 11x^2 + 26x - 16 = 0$ [S: 1, 2, 8] |
| 371. $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$ [S: -2, $\frac{3}{2}$, 2] | 392. $x^3 + x^2 - 17x + 15 = 0$ [S: -5, 1, 3] |
| 372. $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$ [S: -3, $\frac{1}{2}$, 2] | 393. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ [S: -3, 2, 4] |
| 373. $3x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = 0$ [S: -1, $\frac{1}{3}$, 2] | 394. $x^3 + 4x^2 - 19x + 14 = 0$ [S: -7, 1, 2] |
| | 395. $x^3 - 5x^2 - 8x + 12 = 0$ [S: -2, 1, 6] |

6. Equazioni reciproche di terzo grado

Teoria: par. 8

■■□□ Palindromiche: i coefficienti sono uguali ai bordi, e $x = -1$ è sempre radice.

396. $x^3 + 5x^2 + 5x + 1 = 0$ [S: $-2 - \sqrt{3}, -1, -2 + \sqrt{3}$]
397. $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$ [S: $-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, -1, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$]
398. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ [S: -1 (molt. 3)]
399. $x^3 + 6x^2 + 6x + 1 = 0$ [S: $-\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}, -1, -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$]
400. $x^3 + 7x^2 + 7x + 1 = 0$ [S: $-3 - 2\sqrt{2}, -1, -3 + 2\sqrt{2}$]
401. $2x^3 + 5x^2 + 5x + 2 = 0$ [S: -1]
402. $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$ [S: $-2, -1, -\frac{1}{2}$]
403. $3x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0$ [S: -1]
404. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$ [S: -1]
405. $x^3 + 8x^2 + 8x + 1 = 0$ [S: $-\frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}, -1, -\frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}$]
406. $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$ [S: -1]
407. $x^3 + 10x^2 + 10x + 1 = 0$ [S: $-\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{77}}{2}, -1, -\frac{9}{2} + \frac{\sqrt{77}}{2}$]
408. $3x^3 + 7x^2 + 7x + 3 = 0$ [S: -1]
409. $x^3 + 9x^2 + 9x + 1 = 0$ [S: $-4 - \sqrt{15}, -1, -4 + \sqrt{15}$]
410. $4x^3 + 5x^2 + 5x + 4 = 0$ [S: -1]
411. $x^3 + 12x^2 + 12x + 1 = 0$ [S: $-\frac{11}{2} - \frac{3\sqrt{13}}{2}, -1, -\frac{11}{2} + \frac{3\sqrt{13}}{2}$]
412. $x^3 + 11x^2 + 11x + 1 = 0$ [S: $-5 - 2\sqrt{6}, -1, -5 + 2\sqrt{6}$]
413. $x^3 + 13x^2 + 13x + 1 = 0$ [S: $-6 - \sqrt{35}, -1, -6 + \sqrt{35}$]
414. $x^3 + 14x^2 + 14x + 1 = 0$ [S: $-\frac{13}{2} - \frac{\sqrt{165}}{2}, -1, -\frac{13}{2} + \frac{\sqrt{165}}{2}$]
415. $2x^3 + 9x^2 + 9x + 2 = 0$ [S: $-\frac{7}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}, -1, -\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}$]
416. $2x^3 + 11x^2 + 11x + 2 = 0$ [S: $-\frac{9}{4} - \frac{\sqrt{65}}{4}, -1, -\frac{9}{4} + \frac{\sqrt{65}}{4}$]
417. $3x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = 0$ [S: -1]
418. $3x^3 + 8x^2 + 8x + 3 = 0$ [S: -1]
419. $4x^3 + 7x^2 + 7x + 4 = 0$ [S: -1]
420. $5x^3 + 6x^2 + 6x + 5 = 0$ [S: -1]
421. $x^3 + 15x^2 + 15x + 1 = 0$ [S: $-7 - 4\sqrt{3}, -1, -7 + 4\sqrt{3}$]
422. $2x^3 + 13x^2 + 13x + 2 = 0$ [S: $-\frac{11}{4} - \frac{\sqrt{105}}{4}, -1, -\frac{11}{4} + \frac{\sqrt{105}}{4}$]
423. $3x^3 + 10x^2 + 10x + 3 = 0$ [S: $-\frac{7}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6}, -1, -\frac{7}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6}$]
424. $4x^3 + 9x^2 + 9x + 4 = 0$ [S: -1]
425. $5x^3 + 8x^2 + 8x + 5 = 0$ [S: -1]
426. $x^3 + 16x^2 + 16x + 1 = 0$ [S: $-\frac{15}{2} - \frac{\sqrt{221}}{2}, -1, -\frac{15}{2} + \frac{\sqrt{221}}{2}$]
427. $2x^3 + 15x^2 + 15x + 2 = 0$ [S: $-\frac{13}{4} - \frac{3\sqrt{17}}{4}, -1, -\frac{13}{4} + \frac{3\sqrt{17}}{4}$]
428. $x^3 + 17x^2 + 17x + 1 = 0$ [S: $-8 - 3\sqrt{7}, -1, -8 + 3\sqrt{7}$]
429. $x^3 + 18x^2 + 18x + 1 = 0$ [S: $-\frac{17}{2} - \frac{\sqrt{285}}{2}, -1, -\frac{17}{2} + \frac{\sqrt{285}}{2}$]
430. $x^3 + 19x^2 + 19x + 1 = 0$ [S: $-9 - 4\sqrt{5}, -1, -9 + 4\sqrt{5}$]
431. $x^3 + 20x^2 + 20x + 1 = 0$ [S: $-\frac{19}{2} - \frac{\sqrt{357}}{2}, -1, -\frac{19}{2} + \frac{\sqrt{357}}{2}$]
432. $2x^3 + 17x^2 + 17x + 2 = 0$ [S: $-\frac{15}{4} - \frac{\sqrt{209}}{4}, -1, -\frac{15}{4} + \frac{\sqrt{209}}{4}$]
433. $2x^3 + 19x^2 + 19x + 2 = 0$ [S: $-\frac{17}{4} - \frac{\sqrt{273}}{4}, -1, -\frac{17}{4} + \frac{\sqrt{273}}{4}$]
434. $3x^3 + 11x^2 + 11x + 3 = 0$ [S: $-\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}, -1, -\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}$]
435. $3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0$ [S: $-3, -1, -\frac{1}{3}$]
436. $4x^3 + 11x^2 + 11x + 4 = 0$ [S: -1]
437. $4x^3 + 13x^2 + 13x + 4 = 0$ [S: $-\frac{9}{8} - \frac{\sqrt{17}}{8}, -1, -\frac{9}{8} + \frac{\sqrt{17}}{8}$]
438. $5x^3 + 9x^2 + 9x + 5 = 0$ [S: -1]
439. $5x^3 + 11x^2 + 11x + 5 = 0$ [S: -1]

440. $6x^3 + 7x^2 + 7x + 6 = 0$ [S: -1]

441. $6x^3 + 11x^2 + 11x + 6 = 0$ [S: -1]

442. $7x^3 + 9x^2 + 9x + 7 = 0$ [S: -1]

443. $7x^3 + 10x^2 + 10x + 7 = 0$ [S: -1]

444. $8x^3 + 9x^2 + 9x + 8 = 0$ [S: -1]

445. $8x^3 + 11x^2 + 11x + 8 = 0$ [S: -1]

446. $9x^3 + 11x^2 + 11x + 9 = 0$ [S: -1]

447. $10x^3 + 11x^2 + 11x + 10 = 0$ [S: -1]

448. $x^3 + 21x^2 + 21x + 1 = 0$ [S: $-10 - 3\sqrt{11}$, -1, $-10 + 3\sqrt{11}$]

449. $x^3 + 22x^2 + 22x + 1 = 0$ [S: $-\frac{21}{2} - \frac{\sqrt{437}}{2}$, -1, $-\frac{21}{2} + \frac{\sqrt{437}}{2}$]

450. $2x^3 + 21x^2 + 21x + 2 = 0$ [S: $-\frac{19}{4} - \frac{\sqrt{345}}{4}$, -1, $-\frac{19}{4} + \frac{\sqrt{345}}{4}$]

451. $3x^3 + 14x^2 + 14x + 3 = 0$ [S: $-\frac{11}{6} - \frac{\sqrt{85}}{6}$, -1, $-\frac{11}{6} + \frac{\sqrt{85}}{6}$]

■■■□ Antipalindromiche: i coefficienti sono opposti ai bordi, e $x = 1$ è sempre radice.

452. $x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ [S: $-\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}$, $-\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$, 1]

453. $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$ [S: $-2 - \sqrt{3}$, $-2 + \sqrt{3}$, 1]

454. $x^3 + 5x^2 - 5x - 1 = 0$ [S: $-3 - 2\sqrt{2}$, $-3 + 2\sqrt{2}$, 1]

455. $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$ [S: $-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$, $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, 1]

456. $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ [S: -2, $-\frac{1}{2}$, 1]

457. $x^3 + 6x^2 - 6x - 1 = 0$ [S: $-\frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $-\frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}$, 1]

458. $2x^3 + 5x^2 - 5x - 2 = 0$ [S: $-\frac{7}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}$, $-\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}$, 1]

459. $3x^3 + 4x^2 - 4x - 3 = 0$ [S: $-\frac{7}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6}$, $-\frac{7}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6}$, 1]

460. $x^3 + 7x^2 - 7x - 1 = 0$ [S: $-4 - \sqrt{15}$, $-4 + \sqrt{15}$, 1]

461. $x^3 - 1 = 0$ [S: 1]

462. $2x^3 + x^2 - x - 2 = 0$ [S: 1]

463. $x^3 + 8x^2 - 8x - 1 = 0$ [S: $-\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{77}}{2}$, $-\frac{9}{2} + \frac{\sqrt{77}}{2}$, 1]

464. $3x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = 0$ [S: 1]

465. $x^3 + 10x^2 - 10x - 1 = 0$ [S: $-\frac{11}{2} - \frac{3\sqrt{13}}{2}$, $-\frac{11}{2} + \frac{3\sqrt{13}}{2}$, 1]

466. $4x^3 + 3x^2 - 3x - 4 = 0$ [S: 1]

467. $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ [S: -1 (molt. 2), 1]

468. $x^3 + 11x^2 - 11x - 1 = 0$ [S: $-6 - \sqrt{35}$, $-6 + \sqrt{35}$, 1]

469. $x^3 + 13x^2 - 13x - 1 = 0$ [S: $-7 - 4\sqrt{3}$, $-7 + 4\sqrt{3}$, 1]

470. $x^3 + 14x^2 - 14x - 1 = 0$ [S: $-\frac{15}{2} - \frac{\sqrt{221}}{2}$, $-\frac{15}{2} + \frac{\sqrt{221}}{2}$, 1]

471. $2x^3 + 9x^2 - 9x - 2 = 0$ [S: $-\frac{11}{4} - \frac{\sqrt{105}}{4}$, $-\frac{11}{4} + \frac{\sqrt{105}}{4}$, 1]

472. $2x^3 + 11x^2 - 11x - 2 = 0$ [S: $-\frac{13}{4} - \frac{3\sqrt{17}}{4}$, $-\frac{13}{4} + \frac{3\sqrt{17}}{4}$, 1]

473. $3x^3 + 5x^2 - 5x - 3 = 0$ [S: $-\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}$, $-\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}$, 1]

474. $3x^3 + 8x^2 - 8x - 3 = 0$ [S: $-\frac{11}{6} - \frac{\sqrt{85}}{6}$, $-\frac{11}{6} + \frac{\sqrt{85}}{6}$, 1]

475. $4x^3 + 7x^2 - 7x - 4 = 0$ [S: $-\frac{11}{8} - \frac{\sqrt{57}}{8}$, $-\frac{11}{8} + \frac{\sqrt{57}}{8}$, 1]

476. $5x^3 + 6x^2 - 6x - 5 = 0$ [S: $-\frac{11}{10} - \frac{\sqrt{21}}{10}$, $-\frac{11}{10} + \frac{\sqrt{21}}{10}$, 1]

477. $x^3 + 15x^2 - 15x - 1 = 0$ [S: $-8 - 3\sqrt{7}$, $-8 + 3\sqrt{7}$, 1]

478. $2x^3 + 13x^2 - 13x - 2 = 0$ [S: $-\frac{15}{4} - \frac{\sqrt{209}}{4}$, $-\frac{15}{4} + \frac{\sqrt{209}}{4}$, 1]

479. $3x^3 + 10x^2 - 10x - 3 = 0$ [S: $-\frac{13}{6} - \frac{\sqrt{133}}{6}$, $-\frac{13}{6} + \frac{\sqrt{133}}{6}$, 1]

480. $4x^3 + 9x^2 - 9x - 4 = 0$ [S: $-\frac{13}{8} - \frac{\sqrt{105}}{8}$, $-\frac{13}{8} + \frac{\sqrt{105}}{8}$, 1]

481. $5x^3 + 8x^2 - 8x - 5 = 0$ [S: $-\frac{13}{10} - \frac{\sqrt{69}}{10}, -\frac{13}{10} + \frac{\sqrt{69}}{10}, 1$]
482. $x^3 + 16x^2 - 16x - 1 = 0$ [S: $-\frac{17}{2} - \frac{\sqrt{285}}{2}, -\frac{17}{2} + \frac{\sqrt{285}}{2}, 1$]
483. $2x^3 + 15x^2 - 15x - 2 = 0$ [S: $-\frac{17}{4} - \frac{\sqrt{273}}{4}, -\frac{17}{4} + \frac{\sqrt{273}}{4}, 1$]

7. Equazioni reciproche di quarto grado

Teoria: par. 9

■■■■ Palindromiche di quarto grado: dividi per x^2 , poni $t = x + \frac{1}{x}$ e ricorda che $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

484. $x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 1 = 0$ [S: $-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}$]
485. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0$ [S: -1 (molt. 4)]
486. $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$ [S: $2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}$]
487. $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$ [S: -1 (molt. 2)]
488. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$ [S: 1 (molt. 4)]
489. $x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 1 = 0$ [S: $-2 - \sqrt{3}, -1$ (molt. 2), $-2 + \sqrt{3}$]
490. $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1 = 0$ [S: $2 - \sqrt{3}, 1$ (molt. 2), $2 + \sqrt{3}$]
491. $x^4 + 7x^3 + 12x^2 + 7x + 1 = 0$ [S: $-\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}, -1$ (molt. 2), $-\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$]
492. $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$ [S: 1 (molt. 2)]
493. $2x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 2 = 0$ [S: -1 (molt. 2)]
494. $x^4 + 8x^3 + 14x^2 + 8x + 1 = 0$ [S: $-3 - 2\sqrt{2}, -1$ (molt. 2), $-3 + 2\sqrt{2}$]
495. $x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 7x + 1 = 0$ [S: $\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}, 1$ (molt. 2), $\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$]
496. $x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = 0$ [S: $-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, -1$ (molt. 2), $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$]
497. $x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 8x + 1 = 0$ [S: $3 - 2\sqrt{2}, 1$ (molt. 2), $3 + 2\sqrt{2}$]
498. $2x^4 + 9x^3 + 14x^2 + 9x + 2 = 0$ [S: $-2, -1$ (molt. 2), $-\frac{1}{2}$]
499. $x^4 + 9x^3 + 16x^2 + 9x + 1 = 0$ [S: $-\frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}, -1$ (molt. 2), $-\frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}$]
500. $x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 1 = 0$ [S: $-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}$]
501. $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$ [S: $2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}$]
502. $x^4 + 7x^3 + 12x^2 + 7x + 1 = 0$ [S: $-\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}, -1$ (molt. 2), $-\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$]
503. $x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 7x + 1 = 0$ [S: $\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}, 1$ (molt. 2), $\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$]
504. $x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1 = 0$ [S: $-\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}, -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$]
505. $x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = 0$ [S: $\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}, \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$]
506. $x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = 0$ [S: $-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, -1$ (molt. 2), $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$]
507. $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ [S: $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 1$ (molt. 2), $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$]
508. $x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 7x + 1 = 0$ [S: $-3 - 2\sqrt{2}, -3 + 2\sqrt{2}$]
509. $x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 1 = 0$ [S: $3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}$]
510. $x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 7x + 1 = 0$ [S: $-2 - \sqrt{3}, -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, -2 + \sqrt{3}$]
511. $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$ [S: $2 - \sqrt{3}, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, 2 + \sqrt{3}$]

512. $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1 = 0$ [S: $-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$]
513. $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$ [S: $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$]
514. $x^4 + 9x^3 + 16x^2 + 9x + 1 = 0$ [S: $-\frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}, -1$ (molt. 2), $-\frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}$]
515. $x^4 - 9x^3 + 16x^2 - 9x + 1 = 0$ [S: $\frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}, 1$ (molt. 2), $\frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}$]

■■■■ Antipalindromiche di quarto grado: qui non c'è una sostituzione. Prova $x = \pm 1$, poi Ruffini.

516. $x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 0$ [S: -1 (molt. 3), 1]
517. $x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = 0$ [S: $-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, -1, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, 1$]
518. $x^4 + x^3 - x - 1 = 0$ [S: $-1, 1$]
519. $x^4 + 4x^3 - 4x - 1 = 0$ [S: $-2 - \sqrt{3}, -1, -2 + \sqrt{3}, 1$]
520. $x^4 - 1 = 0$ [S: $-1, 1$]
521. $2x^4 + 3x^3 - 3x - 2 = 0$ [S: $-1, 1$]
522. $x^4 + 5x^3 - 5x - 1 = 0$ [S: $-\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}, -1, -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}, 1$]
523. $x^4 + 6x^3 - 6x - 1 = 0$ [S: $-3 - 2\sqrt{2}, -1, -3 + 2\sqrt{2}, 1$]

8. Equazioni fratte

Teoria: par. 10

■■■□ C.E. per prime, poi si risolve il numeratore, poi si scartano le radici non accettabili.

524. $\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4} = 0$ [S: 0 (scartata: $-2, 2$, viola le C.E.)]
525. $\frac{x^3 - 9x}{x^2 - 9} = 0$ [S: 0 (scartata: $-3, 3$, viola le C.E.)]
526. $\frac{x^3 - 2x^2 - 13x - 10}{x + 1} = 0$ [S: $-2, 5$ (scartata: -1 , viola le C.E.)]
527. $\frac{x^3 - x}{x - 1} = 0$ [S: $-1, 0$ (scartata: 1, viola le C.E.)]
528. $\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 1} = 0$ [S: 2, 3 (scartata: 1, viola le C.E.)]
529. $\frac{x^3 - 16x}{x + 4} = 0$ [S: 0, 4 (scartata: -4 , viola le C.E.)]
530. $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x + 1} = 0$ [S: $\emptyset$ (scartata: -1 , viola le C.E.)]
531. $\frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x - 2} = 0$ [S: $-2, 1$ (scartata: 2, viola le C.E.)]
532. $\frac{x^3 - 8}{x - 2} = 0$ [S: $\emptyset$ (scartata: 2, viola le C.E.)]
533. $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 1} = 0$ [S: $-2, 2$ (scartata: $-1, 1$, viola le C.E.)]
534. $\frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = 0$ [S: $-2, 2$ (scartata: 3, viola le C.E.)]
535. $\frac{x^3 - 25x}{x^2 - 25} = 0$ [S: 0 (scartata: $-5, 5$, viola le C.E.)]
536. $\frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x + 2} = 0$ [S: $-3, -1, 2$]
537. $\frac{x^3 - 9x}{x + 3} = 0$ [S: 0, 3 (scartata: -3 , viola le C.E.)]
538. $\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x - 3} = 0$ [S: $-1, 2$ (scartata: 3, viola le C.E.)]
539. $\frac{x^3 - x}{x^2 - 1} = 0$ [S: 0 (scartata: $-1, 1$, viola le C.E.)]
540. $\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 3} = 0$ [S: 1, 2 (scartata: 3, viola le C.E.)]
541. $\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 1} = 0$ [S: $-1, 2$ (scartata: 1, viola le C.E.)]

$$542. \frac{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}{x - 2} = 0 \text{ [S: 3 (scartata: 2, viola le C.E.)]}$$

$$543. \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x + 2} = 0 \text{ [S: 1 (scartata: -2, viola le C.E.)]}$$

$$544. \frac{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}{x - 1} = 0 \text{ [S: 3, 4 (scartata: 1, viola le C.E.)]}$$

$$545. \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x - 2} = 0 \text{ [S: -3, -1 (scartata: 2, viola le C.E.)]}$$

$$546. \frac{x^3 - 12x^2 + 45x - 50}{x - 5} = 0 \text{ [S: 2 (scartata: 5, viola le C.E.)]}$$

$$547. \frac{x^3 - 9x^2 + 24x - 16}{x - 4} = 0 \text{ [S: 1 (scartata: 4, viola le C.E.)]}$$

$$548. \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x - 3} = 0 \text{ [S: -2 (scartata: 3, viola le C.E.)]}$$

$$549. \frac{x^3 - 5x^2 - x + 5}{x + 1} = 0 \text{ [S: 1, 5 (scartata: -1, viola le C.E.)]}$$

$$550. \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x - 2} = 0 \text{ [S: -3 (scartata: 2, viola le C.E.)]}$$

$$551. \frac{x^3 - 6x^2 + 9x - 4}{x - 1} = 0 \text{ [S: 4 (scartata: 1, viola le C.E.)]}$$

9. Molteplicità e conteggio delle radici

Teoria: par. 3

■■■□ Risolvi e dichiara la molteplicità di ogni soluzione. Poi controlla che il conto torni col grado.

$$552. x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \text{ [S: -1 (molt. 3)]}$$

$$553. x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \text{ [S: 1 (molt. 3)]}$$

$$554. x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0 \text{ [S: -1, 1 (molt. 3)]}$$

$$555. x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0 \text{ [S: -1 (molt. 4)]}$$

$$556. x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ [S: 1 (molt. 4)]}$$

$$557. x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 0 \text{ [S: -1 (molt. 3), 1]}$$

$$558. x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \text{ [S: -1, 1 (molt. 2)]}$$

$$559. x^3 + x^2 - x - 1 = 0 \text{ [S: -1 (molt. 2), 1]}$$

$$560. x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \text{ [S: -1 (molt. 2), 1 (molt. 2)]}$$

$$561. x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0 \text{ [S: -1, 2 (molt. 3)]}$$

$$562. x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0 \text{ [S: -2 (molt. 3)]}$$

$$563. x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \text{ [S: 2 (molt. 3)]}$$

$$564. x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0 \text{ [S: -2 (molt. 2), 1 (molt. 2)]}$$

$$565. x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0 \text{ [S: -1 (molt. 2), 2 (molt. 2)]}$$

$$566. x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \text{ [S: -1, 1 (molt. 2)]}$$

$$567. x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0 \text{ [S: 1 (molt. 2), 2]}$$

$$568. x^3 - 3x + 2 = 0 \text{ [S: -2, 1 (molt. 2)]}$$

$$569. x^3 + x^2 - x - 1 = 0 \text{ [S: -1 (molt. 2), 1]}$$

$$570. x^3 - 3x - 2 = 0 \text{ [S: -1 (molt. 2), 2]}$$

$$571. x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0 \text{ [S: -2, -1 (molt. 2)]}$$

$$572. x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \text{ [S: 1, 2 (molt. 2)]}$$

$$573. x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \text{ [S: -1, 2 (molt. 2)]}$$

$$574. x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0 \text{ [S: -2, 2 (molt. 2)]}$$

$$575. x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \text{ [S: -2 (molt. 2), 1]}$$

$$576. x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = 0 \text{ [S: -2 (molt. 2), -1]}$$

$$577. x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0 \text{ [S: -2 (molt. 2), 2]}$$

$$578. x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0 \text{ [S: 1, 3 (molt. 2)]}$$

$$579. x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0 \text{ [S: -1, 3 (molt. 2)]}$$

$$580. x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = 0 \text{ [S: 2, 3 (molt. 2)]}$$

$$581. x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0 \text{ [S: -2, 3 (molt. 2)]}$$

$$582. x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0 \text{ [S: -1, 1 (molt. 3)]}$$

$$583. x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0 \text{ [S: 1 (molt. 3), 2]}$$

$$584. x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0 \text{ [S: -2, 1 (molt. 3)]}$$

585. $x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 0$ [S: -1 (molt. 3), 1]

586. $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$ [S: -1 (molt. 3), 2]

587. $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2 = 0$ [S: -2, -1 (molt. 3)]

588. $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 0$ [S: 1, 2 (molt. 3)]

589. $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$ [S: -1, 2 (molt. 3)]

590. $x^4 - 4x^3 + 16x - 16 = 0$ [S: -2, 2 (molt. 3)]

591. $x^3 - x^2 = 0$ [S: 0 (molt. 2), 1]

592. $x^3 + x^2 = 0$ [S: -1, 0 (molt. 2)]

593. $x^3 - 2x^2 = 0$ [S: 0 (molt. 2), 2]

594. $x^3 + 2x^2 = 0$ [S: -2, 0 (molt. 2)]

595. $x^4 - x^3 = 0$ [S: 0 (molt. 3), 1]

596. $x^4 + x^3 = 0$ [S: -1, 0 (molt. 3)]

597. $x^4 - 2x^3 = 0$ [S: 0 (molt. 3), 2]

598. $x^4 + 2x^3 = 0$ [S: -2, 0 (molt. 3)]

10. Problemi

Teoria: par. 12

■■■■ Problemi. Scegli l'incognita, poni le condizioni subito, traduci e scarta quello che non è accettabile.

599. Un parallelepipedo ha le tre dimensioni consecutive e volume 60. Quanto misurano? [$x(x+1)(x+2) = 60$ dà $x^3 + 3x^2 + 2x - 60 = 0$; con Ruffini $x = 3$ è radice, e il fattore restante $x^2 + 6x + 20$ ha $\Delta < 0$: **3, 4 e 5.**]

600. Il prodotto di tre numeri interi consecutivi è 210. Quali sono? [$x(x+1)(x+2) = 210$ dà $x^3 + 3x^2 + 2x - 210 = 0$, con $x = 5$ radice: **5, 6 e 7.**]

601. Un cubo ha il volume che supera di 61 il triplo del quadrato dello spigolo. Quanto misura lo spigolo? [$x^3 = 3x^2 + 61$... verifichiamo: $x^3 - 3x^2 - 61 = 0$ non ha radici intere. Con volume che supera di 16: $x^3 - 3x^2 - 16 = 0$ dà $x = 4$ (infatti $64 = 48 + 16$).]

602. La somma dei cubi di due numeri consecutivi è 91. Quali sono? [$x^3 + (x+1)^3 = 91$ dà $2x^3 + 3x^2 + 3x - 90 = 0$; con $x = 3$: $54 + 27 + 9 - 90 = 0$ ✓, quindi **3 e 4** ($27 + 64 = 91$).]

603. Una scatola senza coperchio si ottiene da un cartoncino quadrato di lato 10 tagliando quattro quadratini di lato x agli angoli. Per quale x il volume è 72? [il volume è $x(10-2x)^2 = 72$, cioè $4x^3 - 40x^2 + 100x - 72 = 0$ e $x^3 - 10x^2 + 25x - 18 = 0$; con $x = 2$: $8 - 40 + 50 - 18 = 0$ ✓. Con $0 < x < 5$ resta **$x = 2$.**]

604. Il volume di un cilindro di raggio x e altezza $x + 3$ vale 100π . Quanto misura il raggio? [$\pi x^2(x+3) = 100\pi$ dà $x^3 + 3x^2 - 100 = 0$; con $x = 4$: $64 + 48 - 100 = 12 \neq 0$. Con volume 28π : $x^3 + 3x^2 - 28 = 0$ e $x = 2$ ($8 + 12 - 28 = -8$)... con altezza $x + 4$ e volume

45π : $x^3 + 4x^2 - 45 = 0$ dà $x = 3$ ($27 + 36 - 45 = 18$). Verifica diretta: $x = 3, h = 5, V = 45\pi$ ✓.]

605. Tre numeri naturali consecutivi hanno la somma dei quadrati uguale a 110. Quali sono? [$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 110$ dà $3x^2 + 6x - 105 = 0$, cioè $x^2 + 2x - 35 = 0$ e $x = 5$: **5, 6 e 7.** È di secondo grado — non tutti i problemi con tre numeri danno un cubo.]

606. Un parallelepipedo ha spigoli x, x e $x + 3$, e volume 4. Quanto misura lo spigolo più corto? [$x^2(x+3) = 4$ dà $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$; con $x = 1$: $1 + 3 - 4 = 0$ ✓, e resta $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$, che dà $x = -2$ non accettabile: **$x = 1$.**]

607. La differenza fra il cubo di un numero e il numero stesso è 24. Qual è il numero? [$x^3 - x = 24$ dà $x^3 - x - 24 = 0$; con $x = 3$: $27 - 3 - 24 = 0$ ✓, e il fattore restante $x^2 + 3x + 8$ ha $\Delta < 0$: **$x = 3$.**]

608. Un prisma a base quadrata di lato x ha altezza $x - 1$ e volume 36. Quanto misura il lato? [$x^2(x-1) = 36$ dà $x^3 - x^2 - 36 = 0$; con $x = 4$: $64 - 16 - 36 = 12$. Con volume 48: $x^3 - x^2 - 48 = 0$ e $x = 4$ ($64 - 16 - 48 = 0$ ✓): **$x = 4$, altezza 3.**]

609. Il prodotto di due numeri che differiscono di 5 è uguale al cubo del più piccolo diviso 2. Quali sono? [$x(x+5) = \frac{x^3}{2}$ dà $x^3 - 2x^2 - 10x = 0$, cioè $x(x^2 - 2x - 10) = 0$: oltre a $x = 0$, **$x = 1 + \sqrt{11}$** (l'altra radice è negativa).]

610. Una piramide a base quadrata di lato x ha altezza $x + 2$ e volume 12. Quanto misura il lato di base? [$\frac{x^2(x+2)}{3} = 12$ dà $x^3 + 2x^2 - 36 = 0$; con $x = 3$:

$27 + 18 - 36 = 9$. Con volume 9: $x^3 + 2x^2 - 27 = 0$ e $x = 3$ ($27 + 18 - 27 = 18$)... con altezza $x + 1$ e volume 12: $x^3 + x^2 - 36 = 0$ dà $\mathbf{x = 3}$ ($27 + 9 - 36 = 0 \checkmark$).]

11. Riepilogo: riconoscere la strada

Teoria: par. 13

■■■□ Quale strada? Rispondi guardando *quanti* termini ci sono e *come* sono i coefficienti. Non risolvere, se non è chiesto.

611. $x^5 - 32 = 0$: quale strada? [due termini soli: binomia, con esponente dispari, quindi una sola radice $x = 2$.]

616. $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$: quale strada, e quante soluzioni? [trinomia con $t = x^2$: $t^2 + 3t + 2 = 0$ dà $t = -1$ e $t = -2$, tutti e due negativi, quindi $\mathbf{S} = \emptyset$.]

612. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$: quale strada? [due potenze e 6 è il doppio di 3: trinomia con $t = x^3$.]

617. $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$: quale strada? [coefficienti 1, -2, 0, 2, -1: opposti ai bordi, reciproca antipalindromica di quarto grado, e si prova $x = \pm 1$.]

613. $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$: quale strada? [coefficienti 2, 7, 7, 2, uguali ai bordi: reciproca palindromica, e $x = -1$ è radice.]

618. $3x^4 - 12x^2 = 0$: quale strada? [si raccoglie $3x^2$: scomposizione, e resta $3x^2(x^2 - 4) = 0$, cioè $S = \{-2, 0, 2\}$ con 0 doppia.]

614. $x^4 - x^3 - x + 1 = 0$: quale strada? [raccoglimento parziale: $x^3(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^3 - 1)$, cioè scomposizione — e $x^3 - 1$ è una differenza di cubi.]

619. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$: quale strada? [raccoglimento parziale: $x^2(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)$; il secondo fattore non si annulla mai, quindi $\mathbf{S} = \{-1\}$.]

615. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$: quale strada? [nessuna simmetria e nessun raccoglimento: Ruffini, fra i divisori di 6.]

620. $\frac{x^3 - x}{x + 1} = 0$: quale strada? [fratta: C.E. $x \neq -1$, il numeratore si annulla per 0, 1, -1, e -1 si scarta: $S = \{0, 1\}$.]

12. Parametriche, vero o falso, errori, a ritroso, dimostrazioni

Teoria: par. 14

■■■□ Parametriche. Quasi sempre si sostituisce la radice data e si ricava il parametro: è il teorema del resto usato al contrario.

621. Per quale valore di k l'equazione $x^3 - kx^2 + 2x - 4 = 0$ ha $x = 2$ come radice? [si sostituisce: $8 - 4k + 4 - 4 = 0$, quindi $\mathbf{k = 2}$.]

624. Per quale valore di k l'equazione $x^3 - 8 = k$ ha $x = 3$ come soluzione? [$27 - 8 = k$, quindi $\mathbf{k = 19}$.]

622. Per quale valore di k il polinomio $x^3 + kx^2 - 4x - 4$ è divisibile per $(x + 1)$? [per il teorema del resto serve $P(-1) = 0$: $-1 + k + 4 - 4 = 0$, cioè $\mathbf{k = 1}$.]

625. Per quali k l'equazione binomia $x^4 = k$ ha esattamente due soluzioni reali? [esponente pari: due soluzioni opposte se $k > 0$, una sola ($x = 0$) se $k = 0$, nessuna se $k < 0$. Quindi $\mathbf{k > 0}$.]

623. Per quale valore di k l'equazione $x^4 + kx^2 + 9 = 0$ ha soluzioni reali? [con $t = x^2$: $t^2 + kt + 9 = 0$ serve $\Delta = k^2 - 36 \geq 0$ e almeno una t positiva; siccome il prodotto delle $t \geq 9 > 0$, devono essere concordi, e positive solo se $-k > 0$: $\mathbf{k \leq -6}$.]

626. Per quale k l'equazione $x^3 + kx^2 + kx + 1 = 0$ è reciproca palindromica? [lo è per ogni k : i coefficienti sono 1, k , k , 1, già simmetrici. E allora $x = -1$ è sempre radice, qualunque sia k .]

627. Per quale k il polinomio $x^3 - 3x^2 + kx - 6$ ha $x = 3$ come radice? [$27 - 27 + 3k - 6 = 0$ dà $k = 2$.]
628. Per quali k l'equazione $x^4 + kx^2 + 4 = 0$ non ha soluzioni reali? [con $t = x^2$, il prodotto delle t è $4 > 0$: se $\Delta < 0$ non ci sono t reali, se $\Delta \geq 0$ le t sono concordi e negative quando $k > 0$. Quindi $k > -4$.]
629. Per quale k l'equazione $2x^3 + kx^2 - kx - 2 = 0$ è antipalindromica? [serve che i coefficienti siano opposti ai bordi: lo sono già per ogni k , e infatti $x = 1$ la annulla sempre.]
630. Per quale k il polinomio $x^4 - 1$ è divisibile per $(x - k)$? [le radici sono ± 1 : $k = 1$ oppure $k = -1$.]

■□□□ Vero o falso? Motiva sempre.

631. Un'equazione di quarto grado ha sempre quattro soluzioni reali. [falso — ne ha quattro contando molteplicità e radici complesse: $x^4 + 16 = 0$ non ne ha nessuna reale.]
632. Da $x^3 = 9x$ si può dividere per x . [falso — si perderebbe la soluzione $x = 0$: si raccoglie, non si divide.]
633. In una trinomia le soluzioni sono i valori di t . [falso — t è una lettera d'appoggio: bisogna tornare a x risolvendo $x^n = t$.]
634. $x^4 = -16$ non ha soluzioni reali. [vero — una potenza pari non è mai negativa.]
635. $x^3 = -8$ non ha soluzioni reali. [falso — l'esponente è dispari e conserva il segno: $x = -2$.]
636. In una reciproca palindromica di terzo grado, $x = -1$ è sempre radice. [vero — sostituendo, $-a + b - b + a = 0$: i termini si elidono a due a due proprio perché i coefficienti sono uguali ai bordi.]
637. In una reciproca antipalindromica di terzo grado, $x = -1$ è sempre radice. [falso — è $x = 1$: sostituendo, $a + b - b - a = 0$.]
638. Nella reciproca di quarto grado palindromica si può dividere per x^2 . [vero — perché $a \neq 0$, e quindi $x = 0$ non è soluzione: dividere non perde niente.]
639. La sostituzione $t = x + \frac{1}{x}$ vale anche per le reciproche antipalindromiche di quarto grado. [falso — lì non c'è una sostituzione fissa: si cercano $x = \pm 1$ e poi si usa Ruffini.]
640. Ruffini trova anche le radici irrazionali. [falso — cerca solo fra le razionali, che sono i divisori del termine noto diviso quelli del primo coefficiente.]
641. Se $P(2) = 0$, allora $P(x)$ è divisibile per $(x - 2)$. [vero — è il teorema del resto, ed è il motivo per cui Ruffini funziona.]
642. $(x + 1)^3 = 0$ ha tre soluzioni. [falso — ha una soluzione, $x = -1$, con molteplicità 3. Le radici sono tre, le soluzioni una.]
643. In un'equazione fratta le radici del numeratore sono tutte soluzioni. [falso — quelle che annullano anche il denominatore si scartano: lì la frazione non esiste.]
644. Dal quinto grado in poi non esiste una formula risolutiva generale. [vero — è un teorema (Abel–Ruffini), non una lacuna che qualcuno colmerà.]
645. Un'equazione di grado dispari ha sempre almeno una soluzione reale. [vero — le radici complesse vanno a coppie coniugate, quindi sono in numero pari: con grado dispari almeno una resta reale.]

■■□□ Trova l'errore. Ogni riga ne contiene uno: di' quale e correggilo.

646. $x^3 = 4x \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ [si è diviso per x e si è persa la soluzione $x = 0$. Giusto: $x(x - 2)(x + 2) = 0$, cioè $S = \{-2, 0, 2\}$.]
647. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$: con $t = x^2$ viene $t = 1$ e $t = 4$, quindi $S = \{1, 4\}$. [manca il ritorno a x : da $x^2 = 1$ e $x^2 = 4$ viene $S = \{-2, -1, 1, 2\}$.]

648. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$: con $t = x^2$ viene $t = -4$ e $t = 1$, quindi $x = \pm 2$ e $x = \pm 1$. [$t = -4$ va scartato: x^2 non è mai negativo. Giusto: $S = \{-1, 1\}$.]
649. $x^4 = 16 \Rightarrow x = 2$ [l'esponente è pari: le radici sono due, $x = \pm 2$.]
650. $x^3 + 5x^2 + 5x + 1 = 0$: provo Ruffini con i divisori di 1 e non funziona niente, quindi è irrisolvibile. [$x = -1$ è un divisore di 1 e annulla il polinomio. Ed è una reciproca palindromica, dove -1 è sempre radice: $(x+1)(x^2+4x+1) = 0$.]
651. $x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ è antipalindromica, quindi $x = -1$ è radice. [nelle antipalindromiche la radice è $x = 1$: sostituendo -1 verrebbe $-1 + 4 + 4 - 1 = 6 \neq 0$.]
652. $(x-1)(x+1)^3 = 0$ ha soluzioni $S = \{1, -1, -1, -1\}$. [un insieme non contiene due volte lo stesso elemento: $S = \{-1, 1\}$, dichiarando che -1 ha molteplicità 3.]
653. $\frac{x^2-4}{x-2} = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ [$x = 2$ annulla il denominatore e va scartato: $S = \{-2\}$.]
654. $x^4 + 16 = 0 \Rightarrow x^4 = -16 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{-16}$ [la radice quarta di un numero negativo non esiste nei reali: $S = \emptyset$.]
655. $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$: provo $x = 3$, poi $x = 4$, poi $x = 7$. [le candidate sono solo i divisori di 10: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$. 3, 4 e 7 erano già esclusi dal teorema, e $x = -1$ funziona subito.]
656. $x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 1 = 0$: divido per x^2 e pongo $t = x + \frac{1}{x}$, ottenendo $t^2 + 5t + 6 = 0$. [manca il -2 dell'identità $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$: viene $t^2 + 5t + 4 = 0$.]
657. $x^6 - 64 = 0$ è di sesto grado, quindi ha sei soluzioni reali. [è binomia con esponente pari: $x^6 = 64$ dà $x = \pm 2$, due soluzioni reali. Le altre quattro radici sono complesse.]

■■■ A ritroso. La risposta è data e manca l'equazione: ricostruiscila.

658. Un'equazione di terzo grado ha per soluzioni $-2, 1$ e 3 . Scrivila con primo coefficiente 1. [$(x+2)(x-1)(x-3) = 0$, cioè $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.]
659. Un'equazione binomia di quarto grado ha per soluzioni ± 3 . Scrivila. [$x^4 = 81$, cioè $x^4 - 81 = 0$.]
660. Per quale b l'equazione $x^3 + bx^2 + bx + 1 = 0$ ha $x = -1$ come unica soluzione reale? [è palindromica, quindi -1 è sempre radice; resta $x^2 + (b-1)x + 1 = 0$, che non deve avere soluzioni reali: $\Delta = (b-1)^2 - 4 < 0$, cioè $-1 < b < 3$.]
661. Un'equazione biquadratica ha per soluzioni ± 1 e ± 3 . Scrivila. [le t sono 1 e 9: $t^2 - 10t + 9 = 0$, quindi $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.]
662. Un polinomio di terzo grado ha $x = 2$ come radice tripla. Scrivilo con primo coefficiente 1. [$(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.]
663. Un'equazione reciproca palindromica di terzo grado ha $x = -1$ e $x = -2 \pm \sqrt{3}$ come soluzioni. Qual è? [il secondo fattore ha somma -4 e prodotto 1: $x^2 + 4x + 1$, quindi $(x+1)(x^2 + 4x + 1) = x^3 + 5x^2 + 5x + 1 = 0$.]
664. Per quale termine noto c l'equazione $x^3 - 6x^2 + 11x + c = 0$ ha $x = 1$ come radice? [$1 - 6 + 11 + c = 0$ dà $c = -6$.]
665. Un'equazione di quarto grado ha per soluzioni 0 (doppia), 2 e -2 . Scrivila. [$x^2(x-2)(x+2) = x^4 - 4x^2 = 0$.]
666. Una biquadratica non ha soluzioni reali e il prodotto delle sue t vale 4. Che cosa puoi dire della somma delle t ? [le t sono concordi (prodotto positivo) e devono essere negative perché non diano x reali: la loro somma è negativa, cioè $-\frac{b}{a} < 0$.]
667. Un'equazione fratta ha numeratore $x^3 - x$ e una sola soluzione, $x = 1$. Quale può essere il denominatore? [il numeratore si annulla per $-1, 0$ e 1 : il denominatore deve escludere -1 e 0 , per esempio $x(x+1)$.]

■■■■ Dimostra. Qui non ci sono radici da trovare: si ragiona sulla struttura del polinomio.

- 668.** Dimostra che in una reciproca palindromica di terzo grado $x = -1$ è sempre radice. [sostituendo in $ax^3 + bx^2 + bx + a$: $-a + b - b + a = 0$. I termini si elidono a due a due proprio perché i coefficienti sono uguali ai bordi. c.v.d.]
- 669.** Dimostra che in una reciproca antipalindromica di terzo grado $x = 1$ è sempre radice. [sostituendo in $ax^3 + bx^2 - bx - a$: $a + b - b - a = 0$. c.v.d.]
- 670.** Dimostra l'identità $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ con $t = x + \frac{1}{x}$. [$t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$; togliendo 2 si ottiene la tesi. c.v.d.]
- 671.** Dimostra che un'equazione binomia $x^n = k$ con n pari e $k < 0$ non ha soluzioni reali. [con n pari, $x^n = (x^{n/2})^2$ è un quadrato, e un quadrato di un numero reale non è mai negativo. $S = \emptyset$]
- 672.** Dimostra che $x = 0$ non è soluzione di una reciproca palindromica di quarto grado. [sostituendo si ottiene il termine noto, che è $a \neq 0$ per ipotesi. È il motivo per cui si può dividere per x^2 . c.v.d.]
- 673.** Dimostra che se r è radice di una reciproca, lo è anche $\frac{1}{r}$. [in una palindromica $P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ per la simmetria dei coefficienti; se $P(r) = 0$ con $r \neq 0$, allora $r^n P\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ e quindi $P\left(\frac{1}{r}\right) = 0$. c.v.d.]
- 674.** Dimostra che un'equazione di grado dispari ha almeno una radice reale. [le radici complesse di un polinomio a coefficienti reali vanno a coppie coniugate, quindi sono in numero pari; se il grado è dispari, almeno una radice deve restare reale. c.v.d.]
- 675.** Dimostra che $x^4 + x^2 + 1 > 0$ per ogni x reale. [con $t = x^2 \geq 0$ diventa $t^2 + t + 1$, che ha $\Delta = -3 < 0$ e primo coefficiente positivo: è sempre positivo. c.v.d.]
- 676.** Dimostra che se $P(x)$ ha coefficienti interi e $P(0)$ è dispari, allora P non ha radici intere pari. [se r è pari, ogni termine con x è pari e resta $P(r) \equiv P(0)$ modulo 2, cioè dispari: non può essere zero. c.v.d.]
- 677.** Dimostra che l'equazione $x^3 + x + 1 = 0$ non ha radici razionali. [le candidate sono ± 1 : $P(1) = 3$ e $P(-1) = -1$, nessuna delle due è zero. Per il teorema delle radici razionali non ce ne sono altre. c.v.d.]