

FORMULARIO: EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE

In ogni riquadro: il metodo, la riga **QUANDO** che dice a quale equazione si applica, e un esempio con i numeri. Non c'è una formula: c'è una **strategia**.

1 La strategia, e il conto delle radici

1.1 Tre mosse, sempre le stesse

1. porta **tutto a primo membro**: $P(x) = 0$;
2. **scomponi** $P(x)$ in fattori;
3. **annulla un fattore per volta**.

QUANDO sempre. Dal quinto grado in poi una formula risolutiva non esiste — è un teorema, non una lacuna — e per il terzo e il quarto esiste ma non si usa. Tutto il capitolo è il repertorio dei modi per scomporre.

ESEMPIO

$x^3 = 4x$ diventa $x^3 - 4x = 0$, cioè $x(x-2)(x+2) = 0$, quindi $S = \{-2, 0, 2\}$.

Non si divide per x : si perderebbe $x = 0$. Ogni x raccolta è una soluzione.

1.2 Quante radici: il grado non mente

Un'equazione di grado n ha **esattamente n radici**, contando:

- la **molteplicità** (una radice doppia vale due);
- anche quelle **non reali**.

Le radici reali sono quindi al massimo n , e possono essere meno.

QUANDO alla fine, sempre: è il controllo che dice se hai perso un fattore per strada. Se il conto non torna, manca qualcosa.

ESEMPIO

$(x-1)(x+1)^3 = 0$: le *soluzioni* sono due, le **radici** sono quattro. Si scrive $S = \{-1, 1\}$ con -1 di **molteplicità 3**: un insieme non contiene due volte lo stesso elemento, ma la molteplicità va dichiarata.

2 Le famiglie con un metodo proprio

2.1 Binomie: $ax^n + b = 0$

$$x^n = k \quad \text{con } k = -\frac{b}{a}$$

- n **dispari**: una sola radice, $x = \sqrt[n]{k}$, qualunque sia il segno di k ;
- n **pari** e $k > 0$: due opposte, $x = \pm \sqrt[n]{k}$;
- n **pari** e $k < 0$: **nessuna**.

QUANDO ci sono solo **due termini**. La prima cosa da guardare è la parità dell'esponente, non il numero.

ESEMPIO

$$x^3 - 8 = 0 \rightarrow x = 2; x^4 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm 2; x^4 + 16 = 0 \rightarrow S = \emptyset.$$

Una potenza dispari conserva il segno, una pari lo cancella: è tutta lì la differenza.

2.2 Trinomie: $ax^{2n} + bx^n + c = 0$

$$t = x^n \implies at^2 + bt + c = 0$$

Trovati i t , si **torna a x** risolvendo $x^n = t_i$, che è una binomia. Con $n = 2$ si chiama **biquadratica**.

QUANDO compaiono **due potenze** e una è il **doppio** dell'altra. Se non lo è, la sostituzione non si può fare.

ESEMPIO

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0: t^2 - 5t + 4 = 0 \text{ dà } t = 1 \text{ e } t = 4, \text{ e tornando a } x: S = \{-2, -1, 1, 2\}.$$

t **non è la risposta**: $x = 4$ nell'equazione di partenza dà 180, non zero.

2.3 I t che si scartano

Tornando da t a x con $x^n = t$:

- n pari e $t < 0$: quel t si **scarta**, non dà radici reali;
- n pari e $t > 0$: **due** radici opposte;
- n dispari: **una** radice, sempre.

QUANDO a ogni ritorno. È il passaggio in cui si perdono radici (se si dimentica il $\pm$) o se ne inventano (se non si scarta un t negativo).

ESEMPIO

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0: t = -4 \text{ si } \textbf{scarta} (x^2 \text{ non è mai negativo}), t = 1 \text{ dà } x = \pm 1: S = \{-1, 1\}.$$

Il t scartato **va detto**: spiega perché le radici sono due e non quattro.

2.4 Scomposizione: l'ordine in cui si prova

1. **raccoglimento totale** (ogni x raccolta è una radice $x = 0$);
2. **prodotti notevoli**: differenza di quadrati, somma o differenza di cubi, quadrato e cubo di binomio;
3. **raccoglimento parziale**, a gruppi di due;
4. se niente funziona, **Ruffini**.

QUANDO l'equazione non è né binomia né trinomia né reciproca. L'ordine non è casuale: le prime tre si vedono a occhio, Ruffini costa una tabella.

ESEMPIO

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0: \text{a gruppi, } x^2(x+3) - 4(x+3) = (x+3)(x^2-4), \text{ quindi } S = \{-3, -2, 2\}.$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0: \text{i coefficienti } 1, 3, 3, 1 \text{ sono il cubo di binomio, } (x+1)^3 = 0, \text{ cioè } x = -1 \text{ con molteplicità } 3.$$

2.5 Ruffini: dove si cerca la radice

Se $\frac{p}{q}$ è una radice razionale, allora p divide il **termine noto** e q il **primo coefficiente**. Con primo coefficiente 1: solo i divisori interi del termine noto, col $+$ e col $-$.

QUANDO la scomposizione diretta non si vede. **Non si prova a caso**: le candidate sono poche e il teorema le elenca tutte.

ESEMPIO

$x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$: candidate $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$. Con $x = -1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -13 & -10 \\ -1 & & -1 & 3 & 10 \\ \hline & 1 & -3 & -10 & 0 \end{array}$$

Resta $(x + 1)(x^2 - 3x - 10) = 0$, cioè $\mathbf{S} = \{-2, -1, 5\}$.

Sceso al secondo grado **si smette**: la formula risolutiva è più rapida, e trova anche le radici irrazionali che Ruffini non cerca.

3 Le equazioni reciproche

Reciproche: guarda i coefficienti ai bordi

	PALINDROMICA uguali ai bordi	ANTIPALINDROMICA opposti ai bordi
3° grado	$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ $x = -1$ è sempre radice $(x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a) = 0$	$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$ $x = 1$ è sempre radice $(x - 1)(ax^2 + (b + a)x + a) = 0$
4° grado	$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ dividi per x^2 , poni $t = x + \frac{1}{x}$ $a(t^2 - 2) + bt + c = 0$	$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx - a = 0$ nessuna sostituzione fissa: prova $x = \pm 1$, poi Ruffini

Si confrontano i coefficienti **a coppie dai bordi verso il centro**: primo con ultimo, secondo con penultimo. Se il primo e l'ultimo sono uguali ma il secondo e il penultimo no, l'equazione **non è reciproca**.

3.1 Reciproche di terzo grado

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \implies (x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a) = 0$$

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0 \implies (x - 1)(ax^2 + (b + a)x + a) = 0$$

QUANDO i coefficienti sono simmetrici. Qui **non serve cercare** la radice con Ruffini: si sa già che è -1 (palindromica) oppure 1 (antipalindromica).

ESEMPIO

$$x^3 + 5x^2 + 5x + 1 = 0: (x + 1)(x^2 + 4x + 1) = 0 \text{ dà } \mathbf{S} = \{-1, -2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\}.$$

$$x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0: (x - 1)(x^2 + 5x + 1) = 0 \text{ dà } \mathbf{S} = \left\{1, \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}\right\}.$$

3.2 Reciproca di 4° grado palindromica

Siccome $a \neq 0$, $x = 0$ non è soluzione: si può dividere per x^2 .

$$t = x + \frac{1}{x} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

$$\boxed{a(t^2 - 2) + bt + c = 0} \quad \text{e poi} \quad x^2 - t_i x + 1 = 0$$

QUANDO quarto grado con i coefficienti uguali ai bordi. È l'unico caso in cui una sostituzione risolve tutto.

ESEMPIO

$x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 1 = 0$: $(t^2 - 2) + 5t + 6 = 0$ dà $t^2 + 5t + 4 = 0$, cioè $t = -1$ e $t = -4$.
 $t = -1$: $x^2 + x + 1 = 0$ ha $\Delta < 0$, nessuna reale. $t = -4$: $x^2 + 4x + 1 = 0$ dà $x = -2 \pm \sqrt{3}$.
 L'identità $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ è solo un quadrato di binomio: $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$.

3.3 Reciproca di 4° grado antipalindromica

1. prova $x = 1$ e $x = -1$ (se il coefficiente centrale è **nullo**, sono radici tutte e due);
2. se non basta, **Ruffini** fra i divisori del termine noto;
3. abbassato il grado si ricade in un trinomio o in una **reciproca di terzo grado**.

QUANDO quarto grado con i coefficienti opposti ai bordi. Qui **non** c'è una sostituzione: si procede per gradi.

ESEMPIO

$x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 0$: $x = 1$ è radice, e Ruffini dà il quoziente $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$.

$$(x - 1)(x + 1)^3 = 0 \implies S = \{-1, 1\}$$

con -1 di molteplicità 3: $1 + 3 = 4$, e il conto col grado torna.

4 Fratte, problemi, e la mappa

4.1 Equazioni fratte

1. **C.E.**: annulla i denominatori ed escludi quei valori;
2. riduci allo stesso denominatore e passa alla **forma intera**;
3. risolvi con i metodi del capitolo;
4. **confronta**: le radici che violano le C.E. si scartano.

QUANDO l'incognita compare a denominatore. Il passo 4 non è un controllo facoltativo: è parte della risposta.

ESEMPIO

$\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4} = 0$ con C.E. $x \neq \pm 2$: il numeratore si annulla per $0, 2, -2$, ma ± 2 violano le C.E.

$$S = \{0\}$$

Delle tre radici dell'intera ne resta **una**.

4.2 Problemi

1. scegli l'incognita e poni le **condizioni** subito;
2. traduci: quasi sempre viene un'equazione di **terzo grado**, perché nasce da un volume o dal prodotto di tre quantità;
3. risolvi e **scarta** quello che non è accettabile.

QUANDO il testo è in italiano. Se le quantità sono consecutive, si scrivono $x, x + 1, x + 2$: è la scrittura che fa venire un cubo scomponibile.

ESEMPIO

Parallelepipedo di dimensioni consecutive e volume 60: $x(x + 1)(x + 2) = 60$ dà $x^3 + 3x^2 + 2x - 60 = 0$, e con Ruffini $x = 3$: **3, 4 e 5**.

4.3 Quale strada, e quando

Se l'equazione ha...

allora...

solo due termini

binomia: $x^n = k$, e guarda la parità di n

due potenze, una il doppio

trinomia: $t = x^n$, e poi torna a x

coefficienti simmetrici ai bordi

reciproca: $x = \mp 1$, oppure $t = x + \frac{1}{x}$

un fattore comune, o un prodotto notevole

scomposizione diretta

niente di tutto questo

Ruffini, fra i divisori del termine noto

un denominatore con l'incognita

C.E. per prime, e confronto finale

QUANDO davanti a un'equazione che non sai da dove prendere. Si guarda *quanti* termini ci sono e *come* sono i coefficienti, prima di scrivere qualunque cosa.

ESEMPIO

Su $x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 1 = 0$ Ruffini non trova niente: ± 1 non sono radici. Chi non riconosce la simmetria si blocca — l'equazione si risolve, ma non con gli strumenti soliti.

4.4 Non si divide per x : si raccoglie

$$x^3 = 4x \longrightarrow x^3 - 4x = 0 \longrightarrow x(x - 2)(x + 2) = 0$$

Dividere per x darebbe $x^2 = 4$ e **perderebbe** la soluzione $x = 0$: vuol dire dare per scontato che x non sia nullo, e nessuno l'ha detto.

QUANDO ogni volta che tutti i termini hanno una x . È la stessa regola delle equazioni spurie di secondo grado, e qui morde più spesso perché i gradi alti si raccolgono quasi sempre.

ESEMPIO

Ogni x raccolta è una soluzione $x = 0$, e se ne raccogli x^2 quella soluzione ha **molteplicità 2**.

$3x^4 - 12x^2 = 0$ diventa $3x^2(x - 2)(x + 2) = 0$: le soluzioni sono $S = \{-2, 0, 2\}$, con 0 doppia. Quattro radici, quarto grado: il conto torna.

4.5 I controlli che costano dieci secondi

- **sostituisci** ogni radice nell'equazione di **partenza**: deve venire zero;
- **conta** le radici con la molteplicità e confrontale col grado;
- nelle **trinomie**: sei tornato da t a x ? hai messo il $\pm$?
- nelle **fratte**: nessuna radice accettata annulla un denominatore;
- se hai raccolto una x : hai scritto $x = 0$ fra le soluzioni?

QUANDO sempre, prima di consegnare.

ESEMPIO

Il secondo è quello che vale di più: il grado è un numero che **non mente**, e se le radici contate non lo raggiungono hai perso un fattore — oppure alcune sono complesse, e allora vale la pena dirlo.