

EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

03 - ALGEBRA2

Dove non c'è una formula, e c'è una strategia

Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima di partire	3
2	Non c'è una formula, c'è una strategia	3
3	Quante radici, e il grado	4
4	Equazioni binomie	5
5	Equazioni trinomie	6
6	Scomposizione in fattori	7
7	La regola di Ruffini	8
8	Equazioni reciproche di terzo grado	9
9	Equazioni reciproche di quarto grado	11
10	Equazioni fratte	13
11	Problemi	14
12	Quale strada, e quando	15

1 Cosa serve prima di partire

Cosa devi già sapere

- **Legge di annullamento del prodotto.** Un prodotto è nullo se e solo se lo è uno dei fattori: da $(x - 2)(x + 5) = 0$ viene $x = 2$ oppure $x = -5$. È il motore di tutto il capitolo.
- **Scomposizione in fattori.** Raccoglimento totale e parziale, differenza di quadrati $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, somma e differenza di cubi, quadrato e cubo di binomio.
- **Regola di Ruffini e teorema del resto.** $P(a) = 0$ se e solo se $P(x)$ è divisibile per $(x - a)$. Le radici razionali si cercano fra i divisori del termine noto.
- **Equazione di secondo grado.** $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ con $\Delta = b^2 - 4ac$: due soluzioni, una doppia, o nessuna reale.
- **Radici n -esime.** $\sqrt[n]{a}$ esiste sempre se n è **dispari**; se n è **pari** serve $a \geq 0$, e allora le radici sono *due*, opposte.
- **C.E. di una frazione algebrica:** il denominatore non si annulla mai.

2 Non c'è una formula, c'è una strategia

Per il primo grado c'è una formula. Per il secondo pure. Per il terzo e il quarto esistono — si chiamano formule di Cardano e di Ferrari — ma sono così scomode che non le usa nessuno. Dal quinto grado in poi **non esistono affatto**, ed è un teorema: nessuno le troverà mai.

Quindi qui non si impara una formula. Si impara una **strategia**, ed è sempre la stessa:

Formula 2.1: La strategia, in tre mosse:

1. porta **tutto a primo membro**: $P(x) = 0$;
2. **scomponi** $P(x)$ in fattori;
3. **annulla un fattore per volta**, e risolvi ogni pezzo.

Tutto il resto del capitolo è il *repertorio dei modi per scomporre*: la sostituzione, i prodotti notevoli, Ruffini, e le due simmetrie delle equazioni reciproche.

Esempio Svolto 2.1: La strategia su un caso semplice:

$$x^3 = 4x$$

1. **Tutto a primo membro.** $x^3 - 4x = 0$.

2. Scomposizione. Si raccoglie x , e resta una differenza di quadrati:

$$x(x^2 - 4) = 0 \implies x(x-2)(x+2) = 0$$

3. Un fattore per volta.

$$x = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$$

$$S = \{-2, 0, 2\}$$

Controllo. $x = 2$: $8 = 8 \checkmark$. $x = 0$: $0 = 0 \checkmark$. $x = -2$: $-8 = -8 \checkmark$.

Non si divide per x

Da $x^3 = 4x$ viene la tentazione di dividere tutto per x :

$$x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

Il conto è giusto e la risposta è **incompleta**: manca $x = 0$, che è una soluzione (provala: $0 = 0$).

Dividere per x vuol dire dare per scontato che x non sia nullo, e nessuno l'ha detto. La regola è la stessa delle equazioni spurie di secondo grado: **si raccoglie, non si divide**. Ogni x raccolta è una soluzione $x = 0$, ed è lì che sta.

3 Quante radici, e il grado

Formula 3.1: Il numero di radici: Un'equazione polinomiale di grado n ha **esattamente n radici**, se si contano:

- con la loro **molteplicità** (una radice doppia vale due);
- anche quelle **non reali**.

Le radici *reali* sono quindi **al massimo n** , e possono essere meno.

Esempio Svolto 3.1: Tre equazioni di quarto grado, tre conti diversi:

a. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ha quattro radici reali: $-2, -1, 1, 2$. $4 = 4 \checkmark$

b. $x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 0$ si scompone in $(x-1)(x+1)^3 = 0$: le *soluzioni* sono due, 1 e -1 , ma le **radici** sono quattro — perché -1 ha molteplicità 3. $1 + 3 = 4 \checkmark$

c. $x^4 + 16 = 0$ non ha nessuna radice reale: un quarto potenza non è mai negativa. Le quattro radici ci sono, ma sono tutte complesse. $S = \emptyset$

Perché la molteplicità si scrive

Nell'insieme delle soluzioni una radice si scrive **una volta sola**: $S = \{1, -1\}$, non $\{1, -1, -1, -1\}$ — un insieme non contiene due volte lo stesso elemento.

Ma la molteplicità va *dichiarata* accanto, e non è pignoleria: è l'unico modo per far tornare il conto con il grado. Se scrivi due soluzioni per un'equazione di quarto grado senza dire altro, chi legge non sa se ne hai perse due o se erano doppie.

4 Equazioni binomie

Formula 4.1: La forma, e la discussione: Un'equazione è **binomia** se ha solo due termini:

$$ax^n + b = 0 \implies x^n = -\frac{b}{a}$$

Detto $k = -\frac{b}{a}$, le soluzioni reali sono:

- **n dispari**: una sola, $x = \sqrt[n]{k}$, qualunque sia il segno di k ;
- **n pari e $k > 0$** : due opposte, $x = \pm \sqrt[n]{k}$;
- **n pari e $k < 0$** : **nessuna**, perché una potenza pari non è mai negativa.

Esempio Svolto 4.1: I tre casi:

a. $x^3 - 8 = 0$: $x^3 = 8$, esponente dispari, una sola radice: **$x = 2$** .

b. $x^4 - 16 = 0$: $x^4 = 16$, esponente pari e $16 > 0$, due radici opposte: **$x = \pm 2$** .

c. $x^4 + 16 = 0$: $x^4 = -16$, esponente pari e numero negativo: **$S = \emptyset$** .

Controllo del caso b: $2^4 = 16 \checkmark$ e $(-2)^4 = 16 \checkmark$ — il segno meno sparisce, ed è esattamente il motivo per cui le radici sono due.

E il caso c si controlla ragionando, non provando: $x^4 = (x^2)^2$ è un quadrato, e un quadrato non è mai negativo.

La parità dell'esponente decide tutto

$x^3 = -8$ e $x^4 = -16$ si assomigliano e hanno risposte opposte: la prima dà $x = -2$, la seconda non dà niente.

Il motivo è che una potenza **dispari** conserva il segno ($(-2)^3 = -8$), mentre una **pari** lo cancella ($(-2)^4 = +16$). Prima di rispondere si guarda l'esponente, non il numero.

5 Equazioni trinomie

Formula 5.1: La forma, e la sostituzione: Un'equazione è **trinomia** se si scrive

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

cioè se compaiono solo due potenze, e una è il **doppio** dell'altra. Si risolve con la sostituzione

$$\boxed{t = x^n} \implies at^2 + bt + c = 0$$

che è un'equazione di secondo grado. Trovati i t , si **torna a x** risolvendo $x^n = t_i$, che è una binomia.

Con $n = 2$ la trinomia si chiama **biquadratica**, ed è il caso più frequente.

Esempio Svolto 5.1: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$:

Sostituzione $t = x^2$:

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \implies t_1 = 1, \quad t_2 = 4$$

Ritorno a x , una t per volta:

$$x^2 = 1 \implies x = \pm 1 \qquad x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

$$S = \{-2, -1, 1, 2\}$$

Quattro radici per un'equazione di quarto grado: il conto torna.

Controllo. $x = 1$: $1 - 5 + 4 = 0 \checkmark$. $x = -2$: $16 - 20 + 4 = 0 \checkmark$.

t non è la risposta

È l'errore numero uno delle trinomie: si trova $t_1 = 1$ e $t_2 = 4$ e si scrive « $S = \{1, 4\}$ ».

Ma t non è l'incognita: era una *lettera d'appoggio*, e alla fine va rimandata via. La verifica lo dimostra subito: $x = 4$ nell'equazione di partenza dà $256 - 80 + 4 = 180$, non zero.

Il passo che manca è il quarto: da ogni t si torna a x risolvendo $x^n = t$, e ogni t può dare **due** valori di x , uno, o nessuno.

Esempio Svolto 5.2: Quando un t si scarta:

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

Con $t = x^2$: $t^2 + 3t - 4 = 0$, che dà $t_1 = -4$ e $t_2 = 1$.

Ritorno a x :

- $x^2 = -4$: un quadrato non è mai negativo, e questa t si **scarta**;
- $x^2 = 1$: dà $x = \pm 1$.

$$S = \{-1, 1\}$$

Due radici reali su quattro: le altre due sono complesse, e vengono proprio da $x^2 = -4$.

Il t scartato va detto. Scriverlo è un'informazione — dice *perché* le radici sono due e non quattro. Saltarlo in silenzio è indistinguibile dal non averlo visto.

Con n dispari non si scarta niente

In $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ la sostituzione è $t = x^3$, e da $t^2 - 9t + 8 = 0$ vengono $t = 1$ e $t = 8$. Qui l'esponente è **dispari**, quindi $x^3 = t$ ha sempre una soluzione, anche con t negativo:

$$x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \quad x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

Due radici, una per ogni t — mentre nella biquadratica ogni t positivo ne dava due. La parità di n decide anche qui.

6 Scomposizione in fattori

Quando l'equazione non è né binomia né trinomia, si scompone con gli strumenti soliti.

Metodo 6.1: L'ordine in cui si prova:

1. **Raccoglimento totale:** c'è un fattore comune a tutti i termini? Ogni x raccolta è una soluzione $x = 0$.
2. **Prodotti notevoli:** differenza di quadrati, somma o differenza di cubi, quadrato o cubo di binomio.
3. **Raccoglimento parziale:** si raggruppano i termini a due a due e si cerca un fattore comune fra i gruppi.
4. Se niente di tutto questo funziona, **Ruffini** (par. 7).

L'ordine non è casuale: le prime tre si vedono a occhio e costano niente, Ruffini costa una tabella.

Esempio Svolto 6.1: Raccoglimento parziale:

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$$

I quattro termini si raggruppano a due a due:

$$x^2(x+3) - 4(x+3) = 0 \implies (x+3)(x^2 - 4) = 0$$

e il secondo fattore è una differenza di quadrati:

$$(x+3)(x-2)(x+2) = 0 \implies \mathbf{S = \{-3, -2, 2\}}$$

Controllo. $x = -3$: $-27 + 27 + 12 - 12 = 0 \checkmark$.

Esempio Svolto 6.2: Un prodotto notevole nascosto:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

I coefficienti 1, 3, 3, 1 sono quelli del **cubo di binomio**:

$$(x+1)^3 = 0 \implies \mathbf{x = -1} \text{ (molteplicità 3)}$$

Una sola soluzione, ma *tre* radici: il conto col grado torna solo dicendo la molteplicità.

Controllo. $x = -1$: $-1 + 3 - 3 + 1 = 0 \checkmark$.

7 La regola di Ruffini

Formula 7.1: Dove si cerca la radice: Se un polinomio a coefficienti interi ha una radice razionale $\frac{p}{q}$ (ridotta ai minimi termini), allora

- p è un **divisore del termine noto**;
- q è un divisore del **primo coefficiente**.

Se il primo coefficiente è 1, le uniche candidate sono i divisori interi del termine noto, col segno + e col segno -.

Non si prova a caso

Su $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$ le candidate sono i divisori di 10:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$$

e basta provare quelle. Chi tenta $x = 3$ o $x = 7$ sta perdendo tempo su numeri che il teorema ha già escluso.

Conviene partire dai più piccoli: ± 1 si provano a mente, e molto spesso funzionano.

Esempio Svolto 7.1: $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$:

Cerco la radice. $P(1) = 1 - 2 - 13 - 10 \neq 0$; $P(-1) = -1 - 2 + 13 - 10 = 0 \checkmark$. Quindi -1 è radice e il polinomio è divisibile per $(x + 1)$.

Divido con Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -13 & -10 \\ -1 & & -1 & 3 & 10 \\ \hline & 1 & -3 & -10 & 0 \end{array}$$

L'ultimo numero è il **resto**, e dev'essere zero: se non lo è, quel numero non era una radice e si ricomincia.

Resta il secondo grado.

$$(x + 1)(x^2 - 3x - 10) = 0$$

con $x^2 - 3x - 10 = 0$ che dà $x = 5$ e $x = -2$.

$$S = \{-2, -1, 5\}$$

Controllo. $x = 5$: $125 - 50 - 65 - 10 = 0 \checkmark$.

Ci si ferma al secondo grado

Trovata una radice e abbassato il grado, se quello che resta è di secondo grado **non si continua con Ruffini**: si usa la formula risolutiva, che è più rapida e trova anche le radici irrazionali — che Ruffini non troverebbe mai, perché cerca solo fra le razionali.

8 Equazioni reciproche di terzo grado

Un'equazione si dice **reciproca** quando i suoi coefficienti sono simmetrici. Il nome viene da una proprietà: se x è una radice, lo è anche $\frac{1}{x}$ — il suo reciproco.

Formula 8.1: I due casi:

PALINDROMICA

coefficienti uguali ai bordi

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

$x = -1$ è **sempre** radice:

$$(x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a) = 0$$

ANTIPALINDROMICA

coefficienti opposti ai bordi

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$$

$x = 1$ è **sempre** radice:

$$(x - 1)(ax^2 + (b + a)x + a) = 0$$

In tutti e due i casi resta un'equazione di secondo grado, che si risolve come sempre. Con $a \neq 0$.

Metodo 8.1: Perché $x = -1$ e $x = 1$ sono sempre radici: Nel caso **palindromico**, sostituendo $x = -1$:

$$a(-1)^3 + b(-1)^2 + b(-1) + a = -a + b - b + a = 0$$

I termini si elidono a due a due proprio perché i coefficienti sono uguali ai bordi.

Nel caso **antipalindromico**, sostituendo $x = 1$:

$$a + b - b - a = 0$$

e di nuovo tutto si elide, questa volta perché i coefficienti opposti si cancellano. ■

È il motivo per cui su queste equazioni non serve cercare la radice con Ruffini: si sa già qual è.

Esempio Svolto 8.1: Palindromica: $x^3 + 5x^2 + 5x + 1 = 0$:

I coefficienti sono 1, 5, 5, 1: letti al contrario sono gli stessi. Applico la regola con $a = 1$ e $b = 5$, quindi $b - a = 4$:

$$(x + 1)(x^2 + 4x + 1) = 0$$

La prima soluzione è $x = -1$. Per l'altro fattore:

$$x^2 + 4x + 1 = 0 \implies x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$S = \{-1, -2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\}$$

Controllo. $x = -1$: $-1 + 5 - 5 + 1 = 0 \checkmark$. E le altre due si controllano con somma e prodotto: $(-2 - \sqrt{3}) + (-2 + \sqrt{3}) = -4 \checkmark$, $(-2)^2 - 3 = 1 \checkmark$.

Esempio Svolto 8.2: Antipalindromica: $x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$:

I coefficienti sono 1, 4, -4, -1: letti al contrario cambiano tutti segno. Con $a = 1$ e $b = 4$, quindi $b + a = 5$:

$$(x - 1)(x^2 + 5x + 1) = 0$$

La prima soluzione è $x = 1$. Per l'altro fattore:

$$x^2 + 5x + 1 = 0 \implies x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$S = \left\{ 1, \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{21}}{2} \right\}$$

Controllo. $x = 1$: $1 + 4 - 4 - 1 = 0 \checkmark$.

Guarda i bordi, non il mezzo

Per riconoscere una reciproca si confrontano i coefficienti **a coppie dai bordi verso il centro**: il primo con l'ultimo, il secondo con il penultimo.

Se sono *uguali* è palindromica; se sono *opposti* è antipalindromica. Se il primo e l'ultimo sono uguali ma il secondo e il penultimo no, l'equazione **non è reciproca** e questa strada non si applica — si torna a Ruffini.

9 Equazioni reciproche di quarto grado

Anche qui i casi sono due, ma solo il primo ha un metodo suo.

Formula 9.1: Le due forme:

- **Palindromica:** $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ (con $a \neq 0$);
- **Antipalindromica:** $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx - a = 0$ (con $a \neq 0$).

Il caso palindromico: la sostituzione $t = x + \frac{1}{x}$

Metodo 9.1: Dividere per x^2 , e cambiare incognita: Siccome $a \neq 0$, il valore $x = 0$ **non è soluzione**: si può quindi dividere tutto per x^2 senza perdere niente.

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0 \implies a \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c = 0$$

Si pone allora

$$\boxed{t = x + \frac{1}{x}} \quad \text{e} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

e resta un'equazione di secondo grado in t :

$$\boxed{a(t^2 - 2) + bt + c = 0}$$

Trovate le soluzioni t_i , si **torna in x** risolvendo

$$x^2 - t_i x + 1 = 0 \implies x = \frac{t_i \pm \sqrt{t_i^2 - 4}}{2}$$

Da dove viene $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

Basta elevare al quadrato la sostituzione:

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

e togliendo 2 da tutte e due le parti si ottiene proprio $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. È un quadrato di binomio, niente di più.

Esempio Svolto 9.1: $x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 1 = 0$:

I coefficienti sono 1, 5, 6, 5, 1: palindromica, con $a = 1$, $b = 5$, $c = 6$.

Divido per x^2 e pongo $t = x + \frac{1}{x}$:

$$(t^2 - 2) + 5t + 6 = 0 \implies t^2 + 5t + 4 = 0$$

che dà $t_1 = -1$ e $t_2 = -4$.

Torno in x , una t per volta.

- $t = -1$: $x^2 + x + 1 = 0$ ha $\Delta = 1 - 4 < 0$: **nessuna soluzione reale**;
- $t = -4$: $x^2 + 4x + 1 = 0$ dà $x = -2 \pm \sqrt{3}$.

$$S = \{-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\}$$

Due radici reali su quattro: le altre due vengono da $t = -1$ e sono complesse.

Controllo. La somma delle due radici trovate è -4 e il loro prodotto è $4 - 3 = 1$: sono le soluzioni di $x^2 + 4x + 1 = 0$ ✓.

Il caso antipalindromico: non c'è una sostituzione

Metodo 9.2: Si cercano le radici semplici, poi Ruffini:

1. Prova $x = 1$ e $x = -1$: sono le candidate naturali.
Se il coefficiente centrale è nullo ($c = 0$), sono radici **tutte e due**, e quindi $(x - 1)$ e $(x + 1)$ sono entrambi fattori.
2. Se non basta, applica **Ruffini** cercando fra i divisori del termine noto.
3. Abbassato il grado, ci si ritrova in un trinomio di secondo grado oppure in una **reciproca di terzo grado** — che si risolve col paragrafo 8.

Esempio Svolto 9.2: $x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 0$:

I coefficienti sono 1, 2, 0, -2 , -1 : letti al contrario cambiano segno, ed è antipalindromica. Il coefficiente centrale è nullo ($c = 0$).

Provo $x = 1$: $1 + 2 - 2 - 1 = 0$ ✓, è una radice.

Divido con Ruffini per $(x - 1)$:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ \hline & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

Il quoziente è $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, che è un **cubo di binomio**:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$$

L'equazione si scompone in:

$$(x - 1)(x + 1)^3 = 0 \implies \mathbf{S = \{-1, 1\}}$$

con $x = -1$ di **molteplicità 3**. $1 + 3 = 4$: il conto col grado torna.

Controllo. $x = -1$: $1 - 2 + 2 - 1 = 0 \checkmark$.

Perché le reciproche hanno un capitolo

Su $x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 1 = 0$ Ruffini non trova niente: le candidate sono ± 1 , e nessuna delle due annulla il polinomio. Chi non riconosce la simmetria si blocca — l'equazione *si risolve*, ma non con gli strumenti soliti.

È il motivo per cui vale la pena imparare a guardare i coefficienti ai bordi prima di cominciare a dividere.

10 Equazioni fratte

Metodo 10.1: Quattro passi, e il quarto è quello che si dimentica:

1. **C.E.:** si annullano i denominatori e si escludono quei valori. Prima di tutto.
2. Si riduce allo stesso denominatore e si passa alla **forma intera**.
3. Si risolve l'equazione intera con i metodi del capitolo.
4. Si **confronta con le C.E.**: le radici che violano una condizione **non sono accettabili** e si scartano.

Esempio Svolto 10.1: $\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4} = 0$:

1. **C.E.** $x^2 - 4 = 0$ per $x = \pm 2$, quindi

$$\text{C.E.: } x \neq -2, x \neq 2$$

2-3. Una frazione è nulla quando lo è il numeratore, purché il denominatore non lo sia:

$$x^3 - 4x = 0 \implies x(x-2)(x+2) = 0 \implies x = 0, x = 2, x = -2$$

4. Confronto. $x = 2$ e $x = -2$ violano le C.E. e si **scartano**: lì la frazione non esiste.

$$S = \{0\}$$

Delle tre radici dell'equazione intera ne resta **una**. È il caso in cui il conto giusto porta alla risposta sbagliata, se ci si ferma al passo 3.

Controllo. $x = 0$: $\frac{0}{-4} = 0 \checkmark$. $x = 2$: il denominatore fa 0, e la frazione non esiste $\checkmark$.

11 Problemi

Metodo 11.1: Dal testo all'equazione:

1. **Scegli l'incognita** e scrivi le altre quantità in funzione di essa.
2. **Poni le condizioni** subito: lunghezze positive, numeri interi.
3. **Traduci** e risolvi.
4. **Scarta** le soluzioni non accettabili e rileggi la domanda.

Nei problemi di questo capitolo l'equazione viene quasi sempre di terzo grado, perché nasce da un **volume** o dal prodotto di tre quantità.

Esempio Svolto 11.1: Il parallelepipedo:

Un parallelepipedo ha le tre dimensioni consecutive (cioè x , $x + 1$, $x + 2$) e volume 60. Quanto misurano?

Incognita e condizioni. $x > 0$, e le dimensioni sono x , $x + 1$, $x + 2$.

Traduzione.

$$x(x+1)(x+2) = 60 \implies x^3 + 3x^2 + 2x - 60 = 0$$

Risoluzione. Le candidate di Ruffini sono i divisori di 60; provando, $x = 3$ annulla: $27 + 27 + 6 - 60 = 0 \checkmark$. Dividendo:

$$(x-3)(x^2 + 6x + 20) = 0$$

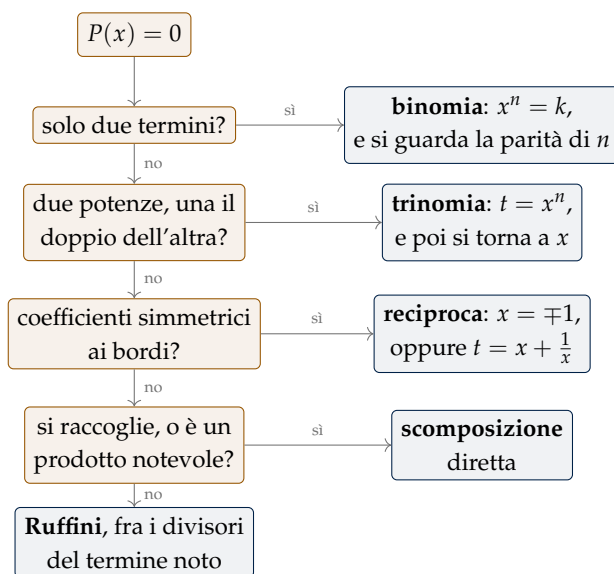
e il secondo fattore ha $\Delta = 36 - 80 < 0$: nessuna altra radice reale.

Ritorno al problema. $x = 3$ è positivo, quindi accettabile:

le dimensioni sono **3, 4 e 5**

Controllo. $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \checkmark$.

12 Quale strada, e quando



Esempio Svolto 12.1: Riconoscere la strada, senza risolvere:

- a. $x^5 - 32 = 0 \rightarrow$ due termini soli: **binomia**, e l'esponente è dispari.
- b. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0 \rightarrow$ due potenze, 6 è il doppio di 3: **trinomia** con $t = x^3$.
- c. $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0 \rightarrow$ coefficienti 2, 7, 7, 2: **reciproca palindromica**, e $x = -1$ è radice.
- d. $x^4 - x^3 - x + 1 = 0 \rightarrow$ niente di tutto questo, ma si raccoglie a gruppi: $x^3(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^3 - 1)$. **scomposizione**.
- e. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0 \rightarrow$ nessuna simmetria, nessun raccoglimento: **Ruffini**, fra i divisori di 6.

Il controllo del riconoscimento è sempre lo stesso: guardare *quanti* termini ci sono e *come* sono i coefficienti, prima di scrivere qualunque cosa.

Dove si va da qui

Con questo capitolo ALGEBRA2 è finita, e gli strumenti che restano si usano tutti altrove. La **scomposizione** è quello che serve per studiare il segno di un polinomio (diseguazioni di grado superiore), per semplificare una frazione algebrica, e per trovare gli asintoti di una funzione razionale.

Le **radici con la loro molteplicità** tornano in analisi: una radice doppia di $P(x)$ è un punto in cui il grafico *tocca* l'asse senza attraversarlo, e questo si vede subito guardando la molteplicità — pari o dispari.

E la strategia — scomporre e annullare un fattore per volta — resta la stessa per le equazioni goniometriche, esponenziali e logaritmiche: cambia che cosa c'è dentro i fattori,

non il modo di trattarli.

Indice analitico

biquadratica, 6

C.E., 13

equazione binomia, 5

equazione di grado superiore, 3

equazione fratta, 13

equazione reciproca, 9

equazione trinomia, 6

grado, 4

molteplicità, 4

palindromica, 9

problemi, 14

radici razionali, 8

reciproca di quarto grado, 11

riepilogo, 15

Ruffini, 8

scomposizione, 7