

FORMULARIO: DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

In ogni riquadro: la regola con le sue condizioni e un esempio numerico.

1 Il metodo

1.1 I cinque passi, sempre gli stessi

Porto tutto a primo membro → scompongo → trovo gli zeri e li ordino → compilo il quadro dei segni → leggo la risposta dalla riga in fondo.

ESEMPIO

$$x^3 + x^2 > 4x + 4 \rightarrow (x+1)(x-2)(x+2) > 0 \rightarrow -2 < x < -1 \vee x > 2$$

1.2 Quante colonne ha il quadro

$$n \text{ zeri distinti} \implies n + 1 \text{ colonne di segno}$$

Con tre punti le colonne sono quattro: la quarta è il pezzo di retta che arriva a $+\infty$.

ESEMPIO

Zeri $-2, -1, 2$: colonne $(-\infty, -2), (-2, -1), (-1, 2), (2, +\infty)$.

1.3 Non si divide per un fattore con la x

$$x^3 > 4x \not\implies x^2 > 4$$

Il segno di x è ignoto: si raccoglie e il fattore resta nel quadro.

ESEMPIO

$$x(x-2)(x+2) > 0 \implies -2 < x < 0 \vee x > 2$$

(la divisione perdeva il pezzo $-2 < x < 0$)

2 I casi rapidi con le potenze

2.1 Potenza di esponente dispari

$$(mx + q)^{2k+1} \geq 0 \iff mx + q \geq 0$$

La potenza dispari conserva il segno della base: si cancella l'esponente e il verso resta.

ESEMPIO

$$(2x - 1)^5 \leq 0 \iff 2x - 1 \leq 0 \iff x \leq \frac{1}{2}$$

2.2 Potenza di esponente pari: le quattro risposte

$$(mx + q)^{2k} \geq 0 \quad \text{per ogni } x, \quad = 0 \text{ solo in } x_0 = -\frac{q}{m}$$

ESEMPIO

$$> 0 \rightarrow x \neq x_0 \quad \geq 0 \rightarrow \mathbb{R} \quad < 0 \rightarrow \emptyset \quad \leq 0 \rightarrow x = x_0$$

A colpo d'occhio

Disequazione	n dispari	n pari	Esempio ($x_0 = -1$)
$(mx + q)^n > 0$	$mx + q > 0$	$x \neq x_0$	$x \neq -1$
$(mx + q)^n \geq 0$	$mx + q \geq 0$	$\mathbb{R}$	ogni x
$(mx + q)^n < 0$	$mx + q < 0$	$\emptyset$	nessuna
$(mx + q)^n \leq 0$	$mx + q \leq 0$	$x = x_0$	$x = -1$

3 Il quadro dei segni

3.1 Molteplicità pari

Un fattore a esponente pari **non cambia segno**: la sua riga è tutta +, con uno 0 sopra il suo zero.

ESEMPIO

$$(x - 1)^2(x + 3) > 0 \implies x > -3 \text{ con } x \neq 1$$

(con $\geq$: $x \geq -3$, senza buchi)

3.2 Molteplicità dispari

Un fattore a esponente dispari si comporta come se l'esponente fosse 1: la sua riga cambia segno nel suo zero.

ESEMPIO

$$x^3(x - 1) \geq 0 \implies x \leq 0 \vee x \geq 1$$

3.3 Costante davanti

Una costante non ha zeri e non aggiunge righe. Se è **negativa** rovescia il segno della riga finale — oppure si divide e si rovescia il verso.

ESEMPIO

$$-2(x - 1)(x + 3) > 0 \iff (x - 1)(x + 3) < 0 \iff -3 < x < 1$$

4 Le scomposizioni, in ordine di convenienza

4.1 1. Raccoglimento totale

$$a b + a c = a(b + c)$$

Si prova per prima: costa niente e abbassa subito il grado.

ESEMPIO

$$x^3 - 9x = x(x - 3)(x + 3)$$

4.2 2. Differenza di quadrati

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Attenzione: $a^2 + b^2$ **non** si scompone, ed è sempre positivo per a, b non entrambi nulli.

ESEMPIO

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

4.3 3. Somma e differenza di cubi

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Il trinomio che resta ha $\Delta = -3b^2 < 0$: è irriducibile e positivo.

ESEMPIO

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4), \text{ e } \Delta = 4 - 16 = -12 < 0$$

4.4 4. Cubo di binomio

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$$

Si riconosce dai coefficienti 1, 3, 3, 1.

ESEMPIO

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3$$

4.5 5. Raccoglimento parziale

Quattro termini a coppie, che lasciano la stessa parentesi.

ESEMPIO

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2(x + 1) - 4(x + 1) = (x + 1)(x^2 - 4)$$

4.6 6. Ruffini: le radici razionali

Se $\frac{p}{q}$ (ridotta) è radice di $a_n x^n + \dots + a_0$, allora $p \mid a_0$ e $q \mid a_n$. La lista dei candidati è **finita**.

ESEMPIO

$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$: candidati $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$.
 $x = 2$ è radice $\Rightarrow (x - 2)(2x - 1)(x + 1)$

5 Sostituzioni

5.1 Biquadratica: $t = x^2$

$$x^4 + bx^2 + c \xrightarrow{t=x^2} t^2 + bt + c = (t - t_1)(t - t_2)$$

Tornando alla x : $t_i > 0$ dà $x = \pm \sqrt{t_i}$; $t_i = 0$ dà il fattore x^2 ; $t_i < 0$ **non dà niente**.

ESEMPIO

$x^4 - 5x^2 + 4$: $t = 1, 4 \Rightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$
 $x^4 - 5x^2 - 36$: $t = 9, -4 \Rightarrow (x - 3)(x + 3)(x^2 + 4)$

5.2 Trinomia: $t = x^3$

$$x^6 + bx^3 + c \xrightarrow{t=x^3} (x^3 - t_1)(x^3 - t_2)$$

Qui **anche una t negativa** torna indietro: il cubo assume tutti i valori reali. Poi ogni differenza di cubi si spezza.

ESEMPIO

$x^6 - 9x^3 + 8 = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
 I due trinomi sono positivi: resta $(x - 1)(x - 2)$

6 Fattori che non si annullano mai

6.1 Trinomio con $\Delta < 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \implies ax^2 + bx + c \text{ ha il segno di } a \text{ ovunque}$$

Non porta nessun punto nel quadro. Si toglie: **verso invariato** se $a > 0$, **verso rovesciato** se $a < 0$.

ESEMPIO

$(x - 3)(x^2 + x + 1) > 0 \iff x > 3$
 $(x - 3)(-x^2 - 4) > 0 \iff x < 3$

6.2 Somma di quadrati

$$x^2 + k^2 > 0 \quad \text{per ogni } x, \text{ con } k \neq 0$$

È il caso più frequente di fattore irriducibile: arriva dalle biquadratiche con $t < 0$ e da $x^4 - a^4$.

ESEMPIO

$$(x-2)(x+2)(x^2+4) \leq 0 \iff (x-2)(x+2) \leq 0 \iff -2 \leq x \leq 2$$

7 Fratte

7.1 Un quadro solo

$$\frac{N(x)}{D(x)} \geq 0 \quad \text{con C.E. } D(x) \neq 0$$

Le righe del numeratore e quelle del denominatore stanno nello **stesso** quadro: dove $D \neq 0$, la frazione ha il segno del prodotto $N \cdot D$.

ESEMPIO

$$\frac{x^3 - x}{x - 2} \geq 0: \text{ righe } x, x - 1, x + 1, x - 2$$

7.2 Gli estremi, con il verso largo

Con $\geq$ o $\leq$ entrano gli zeri del **numeratore**; quelli del **denominatore** restano fuori *sempre*.

ESEMPIO

$$\frac{(x-2)^2}{x+1} \geq 0 \implies x > -1$$

($x = 2$ è dentro, $x = -1$ no)

7.3 Non si moltiplica per il denominatore

$$\frac{N}{D} \geq 0 \not\Rightarrow N \geq 0$$

Il denominatore cambia segno: moltiplicare non conserva il verso.

ESEMPIO

$$\frac{x-1}{x-3} > 0 \text{ dà } x < 1 \vee x > 3, \text{ non } x > 1$$

8 Sistemi

8.1 Quadro dei segni e grafico delle soluzioni

Nel **quadro** si moltiplicano i segni dei fattori di *una* disequazione. Nel **grafico** si intersecano gli insiemi di disequazioni *diverse*. Due disegni simili, due significati opposti.

ESEMPIO

$$\begin{cases} (x+3)(x-1)(x+1) > 0 \\ (x-2)^3 < 0 \end{cases} \Rightarrow -3 < x < -1 \vee 1 < x < 2$$

9 Come si sceglie la prima mossa

A colpo d'occhio

Che cosa vedo	Prima mossa
$(mx + q)^n$ e basta	parità di n : finisce in una riga
Un denominatore	C.E., una frazione sola, quadro unico
Fattore comune a tutti	raccoglimento totale
Quattro termini a coppie	raccoglimento parziale
Due termini, cubi perfetti	somma/differenza di cubi
Solo x^4, x^2 , noto	$t = x^2$
Solo x^6, x^3 , noto	$t = x^3$
Coefficienti 1, 3, 3, 1	cubo di binomio
Niente di tutto questo	Ruffini

Errore tipico

I tre errori che costano di più, in ordine di frequenza: **(1)** trattare un esponente pari come dispari — $(x+1)^4 > 0$ non dà $x > -1$ ma $x \neq -1$; **(2)** disegnare n colonne invece di $n+1$, e perdere l'ultimo pezzo di retta; **(3)** fermarsi alla t senza tornare alla x .

Errore tipico

Il **controllo** si fa sostituendo nel testo *di partenza*, mai nella forma scomposta: se la scomposizione fosse sbagliata, il controllo fatto su di essa confermerebbe l'errore invece di scoprirlo.