

DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

03 - ALGEBRA2

Dal terzo grado in su non c'è nessuna formula:
c'è un metodo solo, e non cambia mai

Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima di partire	3
2	Il metodo: portare a zero, scomporre, leggere i segni	3
3	I casi rapidi: una potenza sola	5
4	Il quadro dei segni di un prodotto	6
5	Scomporre: raccoglimento e prodotti notevoli	7
6	Quando non si vede niente: Ruffini	8
7	Biquadratiche e trinomie: la sostituzione	9
7.1	Le trinomie	10
8	I fattori che non si annullano mai	11
9	Disequazioni fratte di grado superiore	12
10	Sistemi di disequazioni di grado superiore	13
11	Riepilogo: come si sceglie la prima mossa	14
12	Problemi	14
13	Parametriche e dimostrazioni	15

1 Cosa serve prima di partire

Cosa devi già sapere

- **Il segno di un binomio di primo grado.** $mx + q$ si annulla in $x = -q/m$, ed è concorde con m dopo quel punto: $2x - 6$ è negativo per $x < 3$ e positivo per $x > 3$.
- **Il segno di un trinomio di secondo grado.** Con $\Delta > 0$ il trinomio è concorde con a fuori dalle radici e discorde in mezzo; con $\Delta = 0$ è concorde con a ovunque tranne nella radice doppia, dove vale zero; con $\Delta < 0$ è concorde con a dappertutto e non si annulla mai.
- **Le scomposizioni.** Raccoglimento totale e parziale, differenza di quadrati $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, cubo di binomio, somma e differenza di cubi $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.
- **La regola di Ruffini**, e il teorema del resto: $P(r) = 0$ se e solo se $P(x)$ è divisibile per $(x - r)$.
- **Il quadro dei segni** di un prodotto e di una frazione, e la differenza fra i due: gli zeri del denominatore non sono soluzioni.

Se questi punti sono chiari, il resto del capitolo si legge di fila: qui non c'è nessuna tecnica nuova, c'è un *modo di metterle in fila*.

2 Il metodo: portare a zero, scomporre, leggere i segni

Per il primo e il secondo grado esiste una formula: si isola la x , oppure si calcola Δ e si applica la regola dei segni del trinomio. Dal terzo grado in su una formula generale **non c'è** — e per il quinto grado si dimostra che non può esserci.

Non è una brutta notizia, perché la formula non serve. Una disequazione non chiede *quanto vale* la x : chiede **dove il polinomio è positivo** e dove è negativo. E il segno di un prodotto si legge dai segni dei suoi fattori, senza risolvere niente.

Metodo 2.1: Il metodo, ogni volta:

1. **Porto tutto a primo membro**, con lo zero a destra. Finché c'è qualcosa a destra, non c'è nessun segno da studiare.
2. **Scompongo** il primo membro in fattori di cui so leggere il segno: binomi di primo grado, trinomi di secondo grado, potenze di questi.
3. **Trovo gli zeri** di ogni fattore e li metto in fila *in ordine* sulla retta.
4. **Compilo il quadro dei segni**: una riga per fattore, una colonna per intervallo, e in

fondo la riga del prodotto.

5. **Leggo la risposta** dalla riga in fondo, scegliendo le colonne del segno che serve e decidendo se gli estremi entrano.

Di questi cinque passi, quattro sono sempre gli stessi. L'unico che cambia da un esercizio all'altro è il secondo: *quanta strada c'è* per arrivare alla scomposizione. Tutto il capitolo è un catalogo di quelle strade.

Esempio Svolto 2.1: Il metodo per intero, una volta sola:

1. Porto a zero.

$x^3 + x^2 > 4x + 4$ diventa $x^3 + x^2 - 4x - 4 > 0$.

2. Scompongo.

Quattro termini, nessun fattore comune a tutti: raccoglimento parziale.

$$x^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x^2 - 4) = (x+1)(x-2)(x+2)$$

3. Zeri, in ordine.

$x = -2, x = -1, x = 2$. Tre punti, quindi **quattro** colonne.

4. Quadro dei segni.

	-2	-1	2
$x+2$	-	0	+
$x+1$	-	-	0
$x-2$	-	-	-
prodotto	-	0	+

5. Leggo.

Serve il positivo, verso stretto: gli zeri restano fuori.

$$-2 < x < -1 \vee x > 2$$

6. Controllo.

Sostituisco nel **testo di partenza**, non nella forma scomposta. Con $x = -1,5$ (dentro): $(-1,5)^3 + (-1,5)^2 = -1,125$ e $4(-1,5) + 4 = -2$, e infatti $-1,125 > -2$. Con $x = 0$ (fuori): $0 > 4$ è falso.

Errore tipico

Il controllo si fa **sul testo di partenza**, non sulla forma scomposta. Se la scomposizione fosse sbagliata, sostituire in essa confermerebbe l'errore invece di scoprirlo: si sta controllando proprio quel passaggio.

Errore tipico

Non si divide per un fattore che contiene la x . Da $x^3 > 4x$ non segue $x^2 > 4$: dividendo per x si divide per una quantità di *segno ignoto*, e non si sa se il verso resta o si rovescia. Si porta tutto a primo membro e si raccoglie: $x(x-2)(x+2) > 0$, che dà $-2 < x < 0 \vee x > 2$ — e il pezzo $-2 < x < 0$ la divisione lo aveva perso.

Perché il quadro funziona

Un prodotto è positivo quando il numero dei fattori negativi è *pari*, negativo quando è dispari. Fra due zeri consecutivi nessun fattore cambia segno, quindi il conto dei negativi resta lo stesso: il segno del prodotto è costante su tutto l'intervallo. Ecco perché basta studiarlo a pezzi, e perché i pezzi sono esattamente $n + 1$ quando gli zeri distinti sono n .

3 I casi rapidi: una potenza sola

Prima di sviluppare qualunque cosa, si guarda. Se la disequazione è $(mx + q)^n \geq 0$, il quadro non serve: decide la **parità** di n .

Formula 3.1: Segno di una potenza: Con n **dispari**, $(mx + q)^n$ ha lo stesso segno di $mx + q$:

$$(mx + q)^n \geq 0 \iff mx + q \geq 0$$

Con n **pari**, $(mx + q)^n \geq 0$ per ogni x , e vale 0 soltanto in $x_0 = -q/m$.

Da qui, con n pari, le risposte possibili sono **quattro** e si leggono senza fare un conto:

Disequazione	Risposta	Perché
$(mx + q)^{2k} > 0$	$x \neq x_0$	positiva ovunque tranne nel suo zero
$(mx + q)^{2k} \geq 0$	$S = \mathbb{R}$	non è mai negativa, e lo zero è ammesso
$(mx + q)^{2k} < 0$	$S = \emptyset$	non è mai negativa
$(mx + q)^{2k} \leq 0$	$x = x_0$	solo dove si annulla

Esempio Svolto 3.1: Quattro disequazioni di quarto grado, quattro righe:

1. $(x + 2)^4 > 0$.

Esponente pari: positiva dappertutto tranne dove la base si annulla.

$$x \neq -2$$

2. $(x + 2)^4 \geq 0$.

Adesso lo zero è ammesso:

$$S = \mathbb{R}$$

$$3. (x + 2)^4 < 0.$$

Una potenza pari non è mai negativa:

$$S = \emptyset$$

$$4. (x + 2)^4 \leq 0.$$

L'unico posto in cui non è positiva è il suo zero:

$$x = -2$$

Una disequazione di quarto grado con **una** soluzione sola.

Esempio Svolto 3.2: Esponente dispari:

$(2x - 1)^5 \leq 0$. L'esponente è dispari, quindi la potenza ha il segno della base: la disequazione equivale a $2x - 1 \leq 0$.

$$x \leq \frac{1}{2}$$

Sviluppare $(2x - 1)^5$ darebbe un polinomio di quinto grado con cinque termini, e alla fine si tornerebbe qui.

Errore tipico

$(x + 1)^4 > 0$ non dà $x > -1$. Trattare un esponente pari come se fosse dispari è l'errore più frequente del capitolo, e si evita guardando *prima* l'esponente e *poi* tutto il resto.

4 Il quadro dei segni di un prodotto

Quando il prodotto è già scomposto, il metodo comincia dal passo 3. Due cose sole vanno tenute a mente.

Formula 4.1: Quante colonne: Se gli zeri **distinti** sono n , la retta è divisa in $n + 1$ intervalli, e il quadro ha $n + 1$ colonne di segno.

Formula 4.2: Molteplicità: Un fattore elevato a esponente **pari** non cambia mai segno: la sua riga è tutta $+$, con uno 0 sopra il suo zero. Un fattore a esponente **dispari** si comporta come se l'esponente fosse 1.

Esempio Svolto 4.1: Un fattore ripetuto:

$$(x - 1)^2(x + 3) > 0.$$

Zeri. $x = -3$ e $x = 1$: due punti, tre colonne.

Righe. $(x - 1)^2$ è positivo dappertutto tranne in $x = 1$, dove vale zero. $(x + 3)$ è negativo prima di -3 e positivo dopo.

Prodotto. Negativo per $x < -3$, positivo per $-3 < x < 1$ e per $x > 1$; nullo in -3 e in 1 .

$$x > -3 \text{ con } x \neq 1$$

Il punto $x = 1$ è un *buco*: il prodotto lì vale zero, e il verso è stretto. Con $\geq$ invece la risposta sarebbe $x \geq -3$ senza buchi.

Errore tipico

Con tre punti si disegnano **quattro** colonne, non tre. Chi ne disegna tre perde l'ultimo pezzo di retta — quello che va da $+\infty$ indietro — e la risposta viene troncata senza che nulla lo segnali.

5 Scomporre: raccoglimento e prodotti notevoli

Il polinomio arriva quasi sempre *sviluppato*. Le scomposizioni si provano in quest'ordine, dalla più economica alla più cara.

Metodo 5.1: In che ordine si prova:

1. **Raccoglimento totale:** c'è un fattore comune a tutti i termini? Costa niente e abbassa subito il grado.
2. **Prodotti notevoli:** differenza di quadrati, cubo di binomio, somma o differenza di cubi. Si riconoscono dalla forma.
3. **Raccoglimento parziale:** quattro termini, due coppie che lasciano la stessa parentesi.
4. **Ruffini:** la strada generale, e l'ultima perché è la più lunga.

Esempio Svolto 5.1: Raccoglimento totale, e il fattore che resta nel quadro:

$$x^3 - 9x \geq 0.$$

$$\text{Raccolgo: } x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3) \geq 0.$$

Zeri: $-3, 0, 3$ — quattro colonne.

Quadro: il prodotto è negativo per $x < -3$, positivo per $-3 < x < 0$, negativo per $0 < x < 3$, positivo per $x > 3$.

$$-3 \leq x \leq 0 \vee x \geq 3$$

Il verso è largo, quindi tutti e tre gli zeri entrano.

Esempio Svolto 5.2: Differenza di cubi:

$x^3 - 8 \leq 0$, cioè $x^3 - 2^3 \leq 0$:

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \leq 0$$

Il trinomio ha $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$ ed è sempre positivo: si toglie, e il verso non cambia.

$$x - 2 \leq 0 \implies x \leq 2$$

Un terzo grado risolto senza compilare nessun quadro.

Esempio Svolto 5.3: Raccoglimento parziale:

$2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 < 0$. Quattro termini, nessun fattore comune:

$$x^2(2x - 3) - 4(2x - 3) = (2x - 3)(x^2 - 4) = (2x - 3)(x - 2)(x + 2) < 0$$

Zeri: $-2, \frac{3}{2}, 2$. Dal quadro:

$$x < -2 \vee \frac{3}{2} < x < 2$$

6 Quando non si vede niente: Ruffini

Se non c'è raccoglimento e non c'è prodotto notevole, si cerca una radice.

Formula 6.1: Teorema delle radici razionali: Se il polinomio a coefficienti interi $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ha una radice razionale $\frac{p}{q}$ ridotta ai minimi termini, allora p è un divisore di a_0 e q è un divisore di a_n .

La lista dei candidati è **finita**, e si prova a partire dai più piccoli: $\pm 1, \pm 2$, e così via.

Esempio Svolto 6.1: Ruffini con coefficiente direttivo 1:

$$x^3 - 7x + 6 > 0.$$

Candidati: i divisori di 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Provo $x = 1$: $1 - 7 + 6 = 0$. È una radice.

Divido per $(x - 1)$ con Ruffini: resta $x^2 + x - 6$, che si scompone in $(x - 2)(x + 3)$.

$$(x - 1)(x - 2)(x + 3) > 0$$

Zeri: $-3, 1, 2$.

$$-3 < x < 1 \vee x > 2$$

Esempio Svolto 6.2: Ruffini con radice non intera:

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 \geq 0.$$

Candidati: $\frac{p}{q}$ con $p \mid 2$ e $q \mid 2$, cioè $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$.

Provo $x = 2$: $16 - 12 - 6 + 2 = 0$. Divido: resta $2x^2 + x - 1 = (2x - 1)(x + 1)$.

$$(x - 2)(2x - 1)(x + 1) \geq 0$$

Zeri: $-1, \frac{1}{2}, 2$.

$$-1 \leq x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 2$$

Chi cerca solo radici *inter*e qui si ferma dopo tre tentativi e conclude che «non si scompone»: la lista va scritta per intero prima di cominciare.

Perché la divisione è esatta

È il teorema del resto: dividendo $P(x)$ per $(x - r)$ il resto vale $P(r)$. Se r è una radice, $P(r) = 0$ e il resto è nullo. Ruffini non è una scorciatoia magica: è quel teorema, messo in tabella.

7 Biquadratiche e trinomie: la sostituzione

Un polinomio in cui compaiono *solo* x^4 , x^2 e il termine noto si chiama **biquadrato**. La sostituzione $t = x^2$ lo trasforma in un secondo grado.

Metodo 7.1: Come si usa la sostituzione:

1. Pongo $t = x^2$ e risolvo $t^2 + bt + c = 0$: trovo t_1 e t_2 .
2. Scrivo la scomposizione $(x^2 - t_1)(x^2 - t_2)$.
3. **Torno alla x** , un fattore per volta:
 - $t_i > 0$ dà due zeri, $x = \pm \sqrt{t_i}$;

- $t_i = 0$ dà un fattore x^2 ;
- $t_i < 0$ dà $x^2 + |t_i|$, che è **sempre positivo** e non porta nessun zero.

4. Compilo il quadro con gli zeri trovati.

Esempio Svolto 7.1: Con due radici positive:

$x^4 - 5x^2 + 4 > 0$. Con $t = x^2$: $t^2 - 5t + 4 = 0$ dà $t = 1$ e $t = 4$.

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) > 0$$

Zeri: $-2, -1, 1, 2$ — cinque colonne.

$$x < -2 \vee -1 < x < 1 \vee x > 2$$

La risposta ha **tre** pezzi: chi si ferma a $t < 1 \vee t > 4$ e scrive $x < 1 \vee x > 4$ ha dimenticato di tornare alla x .

Esempio Svolto 7.2: Con una radice negativa:

$x^4 - 5x^2 - 36 \leq 0$. Con $t = x^2$: $t = 9$ e $t = -4$.

$$(x^2 - 9)(x^2 + 4) \leq 0$$

Il secondo fattore è sempre positivo e si toglie:

$$x^2 - 9 \leq 0 \implies -3 \leq x \leq 3$$

Un quarto grado con **due** zeri soli.

7.1 Le trinomie

Lo stesso attrezzo funziona su x^6 , con $t = x^3$. La differenza è che il cubo assume *tutti* i valori reali: anche una t negativa torna indietro.

Esempio Svolto 7.3: Un sesto grado con due punti:

$x^6 - 9x^3 + 8 < 0$. Con $t = x^3$: $t = 1$ e $t = 8$.

$$(x^3 - 1)(x^3 - 8) < 0$$

Ogni differenza di cubi si spezza:

$$(x - 1)(x^2 + x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4) < 0$$

I due trinomi hanno $\Delta = -3$ e $\Delta = -12$: sono irriducibili e positivi, e si tolgono.

$$(x-1)(x-2) < 0 \implies 1 < x < 2$$

Sesto grado, quadro con **due** punti.

Errore tipico

La sostituzione è un attrezzo, non la risposta. Finire l'esercizio in t e scrivere il risultato è come misurare in centimetri e rispondere in metri senza convertire: da $t < 1$ segue $x^2 < 1$, cioè $-1 < x < 1$, non $x < 1$.

8 I fattori che non si annullano mai

Formula 8.1: Trinomio con discriminante negativo: Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, il trinomio $ax^2 + bx + c$ **non si annulla mai** e ha il segno di a su tutta la retta reale.

In un prodotto, un fattore così si può **togliere**: è come dividere tutti e due i membri per una quantità di segno costante.

Metodo 8.1: Come si toglie:

1. Calcolo Δ e verifico che sia negativo.
2. Guardo il segno di a .
3. Se $a > 0$ il fattore è positivo: lo tolgo e **il verso resta**.
4. Se $a < 0$ il fattore è negativo: lo tolgo e **il verso si rovescia**.

Esempio Svolto 8.1: Un fattore positivo:

$(x-3)(x^2+x+1) > 0$. Il trinomio ha $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ e $a = 1 > 0$: è sempre positivo.

$$x-3 > 0 \implies x > 3$$

Esempio Svolto 8.2: Un fattore negativo:

$(x-3)(-x^2-4) > 0$. Il secondo fattore ha $\Delta = -16 < 0$ e $a = -1 < 0$: è sempre

negativo. Togliendolo il verso si rovescia.

$$x - 3 < 0 \implies x < 3$$

Lo si può anche vedere così: $-x^2 - 4 = -(x^2 + 4)$, e il segno meno davanti è un fattore costante negativo.

Perché non porta punti nel quadro

Il quadro serve a separare gli intervalli in cui il segno cambia, e il segno di un prodotto cambia solo dove uno dei fattori si annulla. Un fattore che non si annulla mai non produce nessuna separazione: la sua riga sarebbe tutta + (o tutta -), e una riga costante non aggiunge informazione. Ecco perché una disequazione di sesto grado può avere un quadro con due sole colonne di confine.

9 Disequazioni fratte di grado superiore

Cambia soltanto una cosa: gli zeri del denominatore.

Metodo 9.1: Il metodo per le fratte:

1. Porto tutto a primo membro e riduco a **una** frazione sola.
2. Scrivo le C.E.: il denominatore diverso da zero.
3. Scompongo numeratore e denominatore.
4. Compilo **un solo** quadro, con le righe del numeratore e quelle del denominatore insieme.
5. Leggo la risposta, e **tolgo sempre** gli zeri del denominatore — anche con il verso largo.

Esempio Svolto 9.1: Una fratta di terzo grado:

$$\frac{x^3 - x}{x - 2} \geq 0.$$

$$\text{C.E.: } x \neq 2.$$

Scompongo il numeratore: $x(x - 1)(x + 1)$.

Zeri: del numeratore $-1, 0, 1$; del denominatore 2 .

Quadro (quattro righe, cinque colonne): la frazione è positiva per $-1 < x < 0$, per $1 < x < 2$ e negativa altrove, salvo $x > 2$ dove torna positiva.

$$-1 \leq x \leq 0 \vee 1 \leq x < 2 \vee x > 2$$

Il verso è largo, quindi $-1, 0$ e 1 entrano; $x = 2$ resta fuori **comunque**, perché lì la frazione non esiste.

Errore tipico

Non si moltiplica per il denominatore. Da $\frac{x^2 - 1}{x - 3} \geq 0$ **non** segue $x^2 - 1 \geq 0$: si starebbe moltiplicando per una quantità di segno ignoto. Il denominatore resta dov'è, e va nel quadro con la sua riga.

Perché il quadro è uno solo

Dove $Q(x) \neq 0$, la frazione $\frac{P}{Q}$ ha lo stesso segno del prodotto $P \cdot Q$, perché $\frac{P}{Q} = \frac{PQ}{Q^2}$ e $Q^2 > 0$. Quindi il segno si studia come per un prodotto; l'unica differenza sta nei punti in cui $Q = 0$, che nel prodotto sono soluzioni (con il verso largo) e nella frazione non esistono.

10 Sistemi di disequazioni di grado superiore

Metodo 10.1: Il metodo per i sistemi:

1. Risolvo **ogni riga per conto suo**, con il metodo che le spetta, e chiamo $S_1, S_2, \dots$ i suoi insiemi soluzione.
2. Segno tutti i punti notevoli sulla stessa retta, in ordine.
3. Disegno il **grafico delle soluzioni**: una riga per ogni S_i , piena dove la disequazione è verificata.
4. La risposta è l'**intersezione**: i punti coperti da tutte le righe.

Esempio Svolto 10.1: Due righe di tipo diverso:

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 - x - 3 > 0 \\ (x - 2)^3 < 0 \end{cases}$$

Prima riga: raccoglimento parziale, $(x + 3)(x - 1)(x + 1) > 0$, che dà $S_1 = (-3, -1) \cup (1, +\infty)$.

Seconda riga: esponente dispari, quindi $x - 2 < 0$, cioè $S_2 = (-\infty, 2)$.

Intersezione:

$$-3 < x < -1 \vee 1 < x < 2$$

Errore tipico

Il **quadro dei segni** e il **grafico delle soluzioni** sono due disegni che si somigliano e vogliono dire cose opposte. Nel quadro si moltiplicano i segni dei fattori di *una* disequazione; nel grafico si intersecano gli insiemi di disequazioni *diverse*. Confonderli significa dare per risposta l'unione dove serviva l'intersezione.

11 Riepilogo: come si sceglie la prima mossa

Nel compito la consegna non dice che tipo è. Si guarda, in quest'ordine:

Che cosa vedo	Prima mossa
Una potenza sola, $(mx + q)^n$	guardo la parità di n : finisce in una riga
C'è un denominatore	C.E., una frazione sola, quadro unico
Un fattore comune a tutti i termini	raccoglimento totale
Quattro termini, a coppie	raccoglimento parziale
Due termini, tutti e due cubi	somma o differenza di cubi
Solo x^4 , x^2 e il noto	sostituzione $t = x^2$
Solo x^6 , x^3 e il noto	sostituzione $t = x^3$
Coefficienti 1, 3, 3, 1 e segni alterni	cubo di binomio
Niente di tutto questo	Ruffini

Esempio Svolto 11.1: Riconoscere prima di calcolare:

$x^5 - x^3 \geq 0$. Non è una biquadratica (gli esponenti sono 5 e 3), non è una trinomia. Ma c'è un fattore comune:

$$x^3(x^2 - 1) = x^3(x - 1)(x + 1) \geq 0$$

x^3 ha esponente dispari, quindi nel quadro si comporta come x . Zeri: $-1, 0, 1$.

$$-1 \leq x \leq 0 \vee x \geq 1$$

12 Problemi

Nei problemi la disequazione arriva alla fine, non all'inizio. Il lavoro è tradurre, e poi **tornare al testo**.

Metodo 12.1: Come si imposta:

1. Scrivo l'incognita e *che cosa rappresenta*, con la sua unità.
2. Scrivo le condizioni che il problema impone (lunghezze positive, numeri interi, tempi non negativi).
3. Traduco la richiesta in una disequazione.
4. Risolvo, e **interseco** con le condizioni del punto 2.

Esempio Svolto 12.1: Un cubo e la sua superficie:

Un cubo ha lo spigolo x centimetri. Per quali x il volume supera l'area totale?

Incognita: $x > 0$, lo spigolo in cm.

Disequazione: $x^3 > 6x^2$, cioè $x^2(x - 6) > 0$.

Quadro: il fattore x^2 è positivo tranne in 0; resta $x - 6 > 0$.

Torno al testo: con $x > 0$ la risposta è **$x > 6$** centimetri. Il valore $x = 0$ era già escluso dal problema, non dal calcolo.

13 Parametriche e dimostrazioni

Con un parametro non si fanno conti diversi: si ragiona sulla *struttura* — parità degli esponenti, segno del discriminante, ordine degli zeri.

Esempio Svolto 13.1: Una parametrica che si chiude senza conti:

Per quali k la disequazione $(x - k)^4 < 0$ ha soluzioni?

Per **nessun** k : una potenza pari non è mai negativa, e il valore di k sposta soltanto il punto in cui la potenza si annulla.

nessun k

Esempio Svolto 13.2: Una dimostrazione:

Dimostra che uno zero di molteplicità **pari** non separa segni diversi.

Sia r uno zero di molteplicità $2k$: allora $P(x) = (x - r)^{2k}Q(x)$ con $Q(r) \neq 0$. Vicino a r , il fattore $(x - r)^{2k}$ è *positivo* da tutte e due le parti, e Q non cambia segno perché non si annulla. Quindi il segno di P è quello di Q : lo stesso a destra e a sinistra di r .

la riga del quadro ha uno **0**, ma i segni non si invertono

Indice analitico

biquadratica, 9

disequazioni di grado superiore, 3

disequazioni fratte, 12

disequazioni parametriche, 15

potenza, disequazioni con una, 5

problemi con le disequazioni, 14

quadro dei segni, 6

Ruffini, regola di, 8

scomposizione, 7

sistemi di disequazioni, 13

strategia, 14

trinomio irriducibile, 11