

# Formulario Completo sulle Derivate

Prof. Matematica

## 1. Derivate delle Funzioni Elementari

I mattoni fondamentali per il calcolo differenziale.

| Tipologia              | Formula                                          | Esempio Svolto                                      |
|------------------------|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| Costante               | $D(k) = 0$                                       | $f(x) = 5 \implies f'(x) = 0$                       |
| Potenza                | $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$              | $f(x) = x^4 \implies f'(x) = 4x^3$                  |
| Radice Quadrata        | $D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$              | $f(x) = \sqrt{x} \implies f' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| Esponenziale ( $e$ )   | $D(e^x) = e^x$                                   | –                                                   |
| Esponenziale ( $a$ )   | $D(a^x) = a^x \ln a$                             | $f(x) = 2^x \implies f' = 2^x \ln 2$                |
| Logaritmo ( $\ln$ )    | $D(\ln x) = \frac{1}{x}$                         | –                                                   |
| Logaritmo ( $\log_a$ ) | $D(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$                | $f(x) = \log x \implies f' = \frac{1}{x \ln 10}$    |
| Valore Assoluto        | $D( x ) = \frac{ x }{x} = \operatorname{sgn}(x)$ | –                                                   |
| Seno                   | $D(\sin x) = \cos x$                             | –                                                   |
| Coseno                 | $D(\cos x) = -\sin x$                            | –                                                   |
| Tangente               | $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x$                       | –                                                   |
| Cotangente             | $D(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$                | –                                                   |
| Arcoseno               | $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$          | –                                                   |
| Arcocoseno             | $D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$         | –                                                   |
| Arcotangente           | $D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$                 | –                                                   |
| Arcocotangente         | $D(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}$  | –                                                   |

## 2. Regole di Derivazione (Algebra delle Derivate)

### Linearità (Somma e Sottrazione)

**Formula:**  $D[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$

**Esempi Svolti:**

1. **Polinomio e Goniometria:**

$$y = x^3 + \sin x \implies y' = 3x^2 + \cos x$$

2. **Polinomio e Logaritmo:**

$$y = 5x^2 - \ln x \implies y' = 10x - \frac{1}{x}$$

3. **Esponenziale e Radice:**

$$y = e^x + \sqrt{x} \implies y' = e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4. **Combinazione lineare:**

$$y = 2 \cos x - 4x^5 \implies y' = -2 \sin x - 20x^4$$

### Prodotto (Regola di Leibniz)

**Formula:**  $D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

**Esempi Svolti:**

1. **Potenza per Esponenziale:**

$$y = x^2 e^x \quad (f = x^2, g = e^x) \\ y' = (2x)e^x + (x^2)e^x = e^x(2x + x^2)$$

2. **Potenza per Logaritmo:**

$$y = x \ln x \quad (f = x, g = \ln x) \\ y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

3. **Esponenziale per Goniometrica:**

$$y = e^x \sin x \quad (f = e^x, g = \sin x) \\ y' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$$

4. **Potenza per Goniometrica:**

$$y = x^3 \cos x \quad (f = x^3, g = \cos x) \\ y' = 3x^2 \cos x + x^3(-\sin x) = x^2(3 \cos x - x \sin x)$$

### Quoziente (Rapporto)

**Formula:**  $D \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

**Esempi Svolti:**

1. **Goniometrica fratta:**

$$y = \frac{\sin x}{x} \implies y' = \frac{(\cos x)x - (\sin x)1}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

2. **Esponenziale fratta:**

$$y = \frac{e^x}{x} \implies y' = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

3. **Funzione Razionale:**

$$y = \frac{x}{x^2+1} \implies y' = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot (2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

4. **Tangente (dimostrazione):**

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \implies y' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

### 3. Derivata della Funzione Composta (Chain Rule)

La regola fondamentale è:  $D[y(g(x))] = y'(g(x)) \cdot g'(x)$

| Tipologia                              | Derivata Composta                                     | Esempi Svolti                                                                                                                         |
|----------------------------------------|-------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Potenza</b><br>$[f(x)]^n$           | $n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$                    | 1) $y = (3x^2+1)^5 \implies y' = 30x(3x^2+1)^4$<br>2) $y = \sin^3 x \implies y' = 3 \sin^2 x \cos x$                                  |
| <b>Radice</b><br>$\sqrt{f(x)}$         | $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$                          | 1) $y = \sqrt{x^2 - 4} \implies y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$<br>2) $y = \sqrt{\cos x} \implies y' = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$ |
| <b>Esp. (base e)</b><br>$e^{f(x)}$     | $e^{f(x)} \cdot f'(x)$                                | 1) $y = e^{3x} \implies y' = 3e^{3x}$<br>2) $y = e^{-x^2} \implies y' = -2xe^{-x^2}$                                                  |
| <b>Esp. (base a)</b><br>$a^{f(x)}$     | $a^{f(x)} \ln a \cdot f'(x)$                          | 1) $y = 2^{3x} \implies y' = 2^{3x} \ln 2 \cdot 3$<br>2) $y = 10^{\sin x} \implies y' = 10^{\sin x} \ln 10 \cos x$                    |
| <b>Logaritmo</b><br>$\ln[f(x)]$        | $\frac{f'(x)}{f(x)}$                                  | 1) $y = \ln(x^2 + 5) \implies y' = \frac{2x}{x^2+5}$<br>2) $y = \ln(\sin x) \implies y' = \cot x$                                     |
| <b>Seno / Coseno</b><br>$\sin[f(x)]$   | $\cos[f(x)] \cdot f'(x)$<br>$-\sin[f(x)] \cdot f'(x)$ | 1) $y = \sin(2x) \implies y' = 2 \cos(2x)$<br>2) $y = \cos(x^3) \implies y' = -3x^2 \sin(x^3)$                                        |
| <b>Tangente</b><br>$\tan[f(x)]$        | $\frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}$                          | 1) $y = \tan(3x) \implies y' = \frac{3}{\cos^2(3x)}$<br>2) $y = \tan(x^2) \implies y' = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}$                       |
| <b>Arcotangente</b><br>$\arctan[f(x)]$ | $\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$                            | 1) $y = \arctan(e^x) \implies y' = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$<br>2) $y = \arctan(2x) \implies y' = \frac{2}{1+4x^2}$                       |

# 4. Funzioni Goniometriche Inverse (Arcofunzioni)

| Tipologia                                              | Formula (Composta)                 | Esempi Svolti                                                                                                                                           |
|--------------------------------------------------------|------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Arcoseno</b><br>$\arcsin[f(x)]$                     | $\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$  | <b>El:</b> $y = \arcsin x \implies y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$<br><b>Comp:</b> $y = \arcsin(3x) \implies y' = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$                 |
| <b>Arcocoseno</b><br>$\arccos[f(x)]$                   | $-\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$ | <b>El:</b> $y = \arccos x \implies y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$<br><b>Comp:</b> $y = \arccos(x^2) \implies y' = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$              |
| <b>Arcotangente</b><br>$\arctan[f(x)]$                 | $\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$         | <b>El:</b> $y = \arctan x \implies y' = \frac{1}{1+x^2}$<br><b>Comp:</b> $y = \arctan(e^x) \implies y' = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$                          |
| <b>Arcocotangente</b><br>$\operatorname{arccot}[f(x)]$ | $-\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$        | <b>El:</b> $y = \operatorname{arccot} x \implies y' = -\frac{1}{1+x^2}$<br><b>Comp:</b> $y = \operatorname{arccot}(2x) \implies y' = -\frac{2}{1+4x^2}$ |

## 5. Derivata di Funzione elevata a Funzione

Attenzione: Non è né una potenza ( $x^n$ ) né un esponenziale ( $a^x$ ).

La regola si ricava trasformando la funzione:  $y = [f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln[f(x)]}$

**Formula Risolutiva:**

$$D[f(x)^{g(x)}] = f(x)^{g(x)} \cdot \left[ g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

**Esempio Svolto** ( $y = x^x$ ):

Qui  $f(x) = x$  e  $g(x) = x$ .

1. Applico la formula:  $y' = x^x \cdot \left[ (x)' \cdot \ln x + x \cdot \frac{(x)'}{x} \right]$
2. Calcolo le derivate interne e semplifico:  $y' = x^x(\ln x + 1)$

## 6. Applicazione Geometrica: Retta Tangente

Il significato geometrico della derivata  $f'(x_0)$  è il **coefficiente angolare** ( $m$ ) della retta tangente al grafico nel punto  $x_0$ .

**Equazione della Retta Tangente**

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

**Esempio Svolto:**

Scrivere l'equazione della retta tangente a  $y = x^2 - 3x$  nel punto di ascissa  $x_0 = 1$ .

1. **Calcolo l'ordinata**  $y_0 = f(x_0)$ :  $f(1) = 1^2 - 3(1) = -2 \implies P(1, -2)$
2. **Calcolo la derivata generica**  $f'(x)$  **e poi specifica**  $m = f'(x_0)$ :  
 $f'(x) = 2x - 3 \implies m = f'(1) = 2(1) - 3 = -1$
3. **Scrivo l'equazione della retta:**  
 $y - (-2) = -1 \cdot (x - 1) \implies y + 2 = -x + 1 \implies \mathbf{y = -x - 1}$