

CALCOLO INTEGRALE

Integrali Indefiniti:

Definizioni, Teoremi, Metodi di Risoluzione e Sostituzioni

1. Definizione, Teoremi e Proprietà

1. Definizione e Significato Geometrico

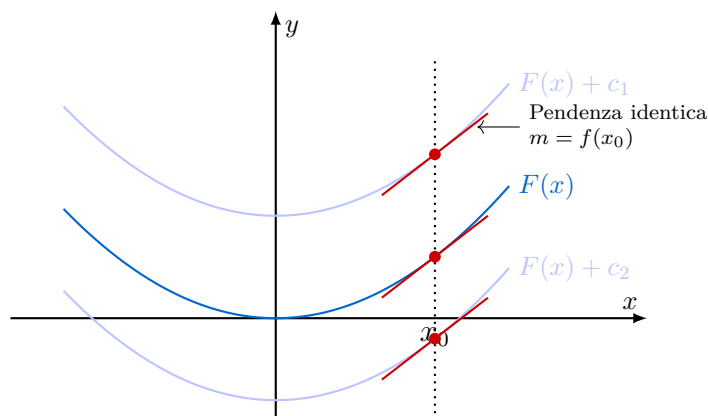
Si definisce **integrale indefinito** della funzione $f(x)$ l'insieme di tutte le sue primitive $F(x) + c$.

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

Perché aggiungiamo $+c$? (Teorema di Caratterizzazione)

Due primitive qualsiasi della stessa funzione differiscono solo per una costante. Infatti, se $F'(x) = f(x)$, allora anche $D[F(x) + c] = f(x)$ (poiché la derivata di una costante è zero).

Interpretazione Geometrica: Graficamente, le primitive rappresentano una *famiglia di curve* ottenute per traslazione verticale. In ogni punto x_0 , tutte le curve hanno la stessa pendenza (tangenti parallele).



2. Esistenza e Linearità

Teorema di Esistenza: Se una funzione $f(x)$ è **continua** in un intervallo $[a, b]$, allora ammette sicuramente delle primitive.

Proprietà di Linearità: L'integrale si comporta linearmente rispetto alla somma e al prodotto per costanti.

Proprietà	Formula
Somma e Sottrazione	$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
Prodotto per scalare k	$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$

2. Integrali Immediati delle Funzioni Fondamentali

Formula Generale	Esempi Pratici
Potenze e Logaritmi	
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \ (\alpha \neq -1)$	$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5}; \quad \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{5}{x} dx = 5 \ln x + c$
Esponenziali	
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int 3e^x dx = 3e^x + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c$
Goniometriche	
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + c$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \frac{1}{2} \cos x dx = \frac{1}{2} \sin x + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x; \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$	$\int \frac{7}{\cos^2 x} dx = 7 \tan x + c$
Inverse (Archi)	
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$	$\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \arcsin x + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$	$\int \frac{5}{1+x^2} dx = 5 \arctan x + c$

NOTE FONDAMENTALI:

- **Segno del Seno:** La derivata di $\cos x$ è $-\sin x$, quindi $\int \sin x dx = -\cos x$.
- **Costanti:** Se manca una costante k per la derivata, moltiplica e dividi per essa:

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} (2x) dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

3. Integrali Immediati Generalizzati (Funzioni Composte)

Si applicano quando l'integranda contiene una funzione composta $f(g(x))$ moltiplicata per la derivata del suo argomento $g'(x)$. Bisogna "riconoscere" la derivata interna.

Regola Generale	Esempio di Riconoscimento
$\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ (con $\alpha \neq -1$)	$\int (x^2 + 1)^3 \cdot \underbrace{2x}_{f'} dx = \frac{(x^2 + 1)^4}{4} + c$ Qui $f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c$	$\int \frac{2x}{x^2 + 5} dx = \ln(x^2 + 5) + c$ Il num. è la derivata esatta del den.
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + c$	$\int e^{\sin x} \cdot \underbrace{\cos x}_{f'} dx = e^{\sin x} + c$ Qui $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
$\int \sin(f(x)) \cdot f'(x) dx = -\cos(f(x)) + c$	$\int \sin(x^3) \cdot \underbrace{3x^2}_{f'} dx = -\cos(x^3) + c$
$\int \cos(f(x)) \cdot f'(x) dx = \sin(f(x)) + c$	$\int \cos(\ln x) \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} dx = \sin(\ln x) + c$
$\int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2} dx = \arctan(f(x)) + c$	$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \arctan(e^x) + c$ Nota che $e^{2x} = (e^x)^2$, quindi $f(x) = e^x$

NOTA SULLE COSTANTI MOLTIPLICATIVE:

Se manca una costante numerica per avere la derivata esatta, possiamo moltiplicare e dividere per quel numero.

$$\text{Es: } \int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} \cdot \underbrace{2x}_{f'} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

4. Il Metodo del Differenziale (Sostituzione)

1. Concetto Chiave: La Relazione Fondamentale

Il punto di partenza non è la variabile t , ma la relazione che lega il differenziale di una funzione alla sua derivata.

$$d(f(x)) = f'(x) \cdot dx$$

Da questa relazione possiamo sempre **esplicitare il dx ** per sostituirlo nell'integrale:

$$dx = \frac{1}{f'(x)} \cdot d(f(x))$$

2. Algoritmo Risolutivo (Passo-Passo)

L'obiettivo è sostituire il dx e semplificare la funzione *prima* di passare alla variabile t .

- 1. Scelta della funzione:** Individua la parte "complicata" da sostituire e chiamala $f(x)$.
- 2. Calcolo del differenziale:** Scrivi $d(f(x)) = f'(x)dx$.
- 3. Esplicitazione del dx :** Ricava $dx = \frac{1}{f'(x)}d(f(x))$.
- 4. Sostituzione e Semplificazione:** Torna all'integrale e sostituisci il dx . Semplifica i termini in x che si elidono.
- 5. Passaggio alla variabile t :** Ora poni $f(x) = t$ e $d(f(x)) = dt$.
- 6. Integrazione:** Risolvi l'integrale in t .

ESEMPIO PRATICO: $\int x \cdot \cos(x^2) dx$

1. Scelta: Scelgo l'argomento del coseno: $f(x) = x^2$.

2. Differenziale: Calcolo $d(x^2)$:

$$d(x^2) = 2x \cdot dx$$

3. Esplicito dx : Divido tutto per $2x$:

$$dx = \frac{1}{2x} \cdot d(x^2)$$

4. Sostituzione nell'integrale:

$$\int x \cdot \cos(x^2) \cdot \left[\frac{1}{2x} \cdot d(x^2) \right]$$

5. Semplificazione: La x si semplifica con $2x$. Porto fuori $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} \int \cos(x^2) d(x^2)$$

6. Passaggio a t : Pongo $x^2 = t$ (quindi $d(x^2) = dt$):

$$\frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t + c = \frac{1}{2} \sin(x^2) + c$$

5. Sostituzioni Particolari Standard

Tabella delle sostituzioni per sbloccare integrali con radici o funzioni goniometriche.

1. Radici e Forme Quadratiche

La strategia si basa sul trasformare il binomio sotto radice in un ****unico quadrato perfetto**** sfruttando le identità goniometriche.

Forma	Sostituzione e dx	Argomentazione Passo-Passo
$\sqrt{a^2 - x^2}$ Diff. di quadrati	Pongo: $x = a \sin t$ Diff: $dx = a \cos t \, dt$	Logica: Sfrutto $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$. Sostituzione: $\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)}$ Semplificazione: $\sqrt{a^2 \cos^2 t} = a \cos t$ La radice è sparita, resta un coseno (facile).
$\sqrt{a^2 + x^2}$ Somma di quadrati	Pongo: $x = a \tan t$ Diff: $dx = \frac{a}{\cos^2 t} \, dt$	Logica: Sfrutto $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. Sostituzione: $\sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 t} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2 t)}$ Semplificazione: $\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t}$ La radice è sparita, resta una secante.
$\sqrt[n]{ax + b}$ Radicale Lineare	Pongo: $\sqrt[n]{ax + b} = t$ Inversa: $x = \frac{t^n - b}{a}$ Diff: $dx = \frac{nt^{n-1}}{a} \, dt$	Logica: Si elimina la radice per definizione. Sostituzione: Tutto il blocco radicale diventa semplicemente t. Risultato: L'integrale diventa una funzione razionale (polinomio fratto) in t, risolvibile coi metodi standard.

ESEMPIO (Radicale Lineare): $\int x\sqrt{x+1} \, dx$

1. **Sostituzione:** Pongo $\sqrt{x+1} = t \Rightarrow x+1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 1$.

2. **Differenziale:** $dx = 2t \, dt$.

3. **Svolgimento:** $\int (t^2 - 1) \cdot t \cdot (2t \, dt) = \int (2t^4 - 2t^2) \, dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + c$.

2. Formule Parametriche (Weierstrass)

Trasformano funzioni razionali di goniometriche in algebriche. Posto $t = \tan(x/2)$:

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$	$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$dx = \frac{2}{1+t^2} \, dt$
-----------------------------	--------------------------------	------------------------------

ESEMPIO APPLICATIVO: $\int \frac{1}{\sin x} \, dx$

Sostituisco $\sin x$ e dx con le formule parametriche:

$$\int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} \, dt = \int \frac{1}{t} \, dt = \ln|t| + c = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$$

3. Potenze di Seno e Coseno ($\sin^m x \cdot \cos^n x$)

CASO A: Esponente DISPARI

Strategia: Isola una potenza singola per il differenziale dt .

$$\begin{aligned}\text{Es: } & \int \sin^3 x \, dx \\ &= \int \sin^2 x \cdot \sin x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x \, dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Pongo: } & \cos x = t \implies -\sin x \, dx = dt \\ &= -\int (1 - t^2) \, dt = -t + \frac{t^3}{3} + c\end{aligned}$$

CASO B: Esponenti PARI

Strategia: Formule di bisezione per dimezzare il grado.

$$\begin{aligned}\text{Es: } & \int \cos^2 x \, dx \\ \text{Uso: } & \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \\ &= \int \frac{1}{2} \, dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin(2x) + c\end{aligned}$$

6. Metodi Avanzati di Sostituzione (Analisi I)

1. Le Tre Sostituzioni di Eulero

Utilizzate per razionalizzare integrali della forma $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \, dx$.

Condizione	Sostituzione (Eulero)	Esempio Applicativo
$\mathbf{a} > 0$ (Parabola convessa)	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a}x + t$	Es: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \, dx$ ($a = 1$) Pongo: $\sqrt{x^2 + 4} = -x + t$ Quadrato: $x^2 + 4 = x^2 - 2xt + t^2$ Ricavo x: $2xt = t^2 - 4 \implies x = \frac{t^2 - 4}{2t}$
$\mathbf{c} > 0$ (Termine noto positivo)	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$	Es: $\int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \, dx$ ($c = 4$) Pongo: $\sqrt{4 - x^2} = xt + 2$ Quadrato: $4 - x^2 = x^2 t^2 + 4xt + 4$ Ricavo x: $-x = xt^2 + 4t \implies x = -\frac{4t}{1 + t^2}$
$\mathbf{\Delta} > 0$ (Radici reali x_1, x_2)	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$	Es: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$ (radici 1, 2) Pongo: $\sqrt{(x - 1)(x - 2)} = t(x - 1)$ Quadrato: $(x - 1)(x - 2) = t^2(x - 1)^2$ Ricavo x: $x - 2 = t^2(x - 1) \implies x = \frac{2 - t^2}{1 - t^2}$

2. Sostituzioni Iperboliche (Alternative Veloci)

Strategia potente per radicali del tipo $\sqrt{x^2 \pm a^2}$. Sfruttano l'identità fondamentale $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, eliminando la radice senza usare moduli e semplificando drasticamente i calcoli rispetto alle sostituzioni goniometriche ($\tan x, \sin x$).

Integrale con	Sostituzione e Inversa	Vantaggio Operativo
$\sqrt{x^2 + a^2}$ (Somma)	Pongo: $x = a \sinh t$ Diff: $dx = a \cosh t \, dt$ Ritorno a x: $t = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$	La radice diventa semplice: $\sqrt{a^2(\sinh^2 t + 1)} = \sqrt{a^2 \cosh^2 t} = a \cosh t$ Nota: $\cosh t > 0$ sempre, niente modulo.
$\sqrt{x^2 - a^2}$ (Differenza)	Pongo: $x = a \cosh t$ Diff: $dx = a \sinh t \, dt$ Ritorno a x: $t = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$	La radice diventa semplice: $\sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} = \sqrt{a^2 \sinh^2 t} = a \sinh t$ Nota: Si assume $x > a, t > 0$.

CONFRONTO: PERCHÉ USARLE?

Calcoliamo $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

• **Via Trigonometrica** ($x = \tan \theta$): $\int \frac{1}{\sec \theta} \sec^2 \theta d\theta = \int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| \dots$ (Lungo).

• **Via Iperbolica** ($x = \sinh t$): $\int \frac{1}{\cosh t} \cdot \cosh t dt = \int 1 dt = t + c$.

Risultato immediato: $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c$.

3. Integrazione del Differenziale Binomio (Chebyshev)

Integrali della forma $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ con $m, n, p \in \mathbb{Q}$.

Si risolvono elementarmente **solo** se si verifica una delle seguenti condizioni sui numeri razionali m, n, p .

• **Caso 1:** Se $p \in \mathbb{Z}$ (p è un numero intero).

Strategia: Si pone $x = t^k$, dove k è il m.c.m. dei denominatori di m e n .

• **Caso 2:** Se $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ (intero).

Strategia: Si sostituisce la base del binomio: $a+bx^n = t^s$ (s denominatore di p).

• **Caso 3:** Se $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ (intero).

Strategia: Si raccoglie la x massima e si sostituisce: $ax^{-n} + b = t^s$ (s den. di p).

ESEMPI GUIDATI PER OGNI CASISTICA

CASO 1 (p Intero): $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx = \int x^{1/2}(1+x^{1/4})^{-1} dx$

1. **Analisi:** $m = 1/2$, $n = 1/4$, $p = -1$ (Intero). Siamo nel Caso 1.

2. **Indici:** Frazioni di x : $1/2$ e $1/4$. Il m.c.m. dei denominatori (2, 4) è 4.

3. **Sostituzione:** Pongo $x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3 dt$.

4. **Risultato:** $\int \frac{t^2}{1+t} \cdot 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^5}{t+1} dt$ (Funzione Razionale).

CASO 2 ($\frac{m+1}{n}$ Intero): $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int x^3(1-x^2)^{-1/2} dx$

1. **Analisi:** $m = 3$, $n = 2$, $p = -1/2$.

2. **Verifica:** $\frac{m+1}{n} = \frac{3+1}{2} = 2$ (Intero). Siamo nel Caso 2.

3. **Sostituzione:** Pongo il radicando uguale a t^s ($s = 2$ denominatore di p).

$1-x^2 = t^2 \Rightarrow -2xdx = 2tdt \Rightarrow xdx = -tdt$.

4. **Risultato:** $\int x^2(1-x^2)^{-1/2}(xdx) = \int (1-t^2) \cdot \frac{1}{t} \cdot (-tdt) = \int (t^2-1)dt$.

CASO 3 (Somma Intera): $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}} dx = \int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2} dx$

1. **Analisi:** $m = -4$, $n = 2$, $p = -1/2$.

2. **Verifica:** $\frac{m+1}{n} = -1.5$ (No). $\rightarrow$ Sommo p : $-1.5 + (-0.5) = -2$ (Sì!).

3. **Sostituzione:** Bisogna dividere la base per x^n (cioè raccogliere x^2).

Pongo $x^{-2} + 1 = t^2$ (che equivale a $\frac{1+x^2}{x^2} = t^2$).

4. **Differenziale:** $-2x^{-3}dx = 2tdt \Rightarrow x^{-3}dx = -tdt$.

7. Metodo di Integrazione per Parti

Si utilizza per integrare il prodotto di due funzioni eterogenee.

$$\int \underset{\text{(Derivo)}}{f(x)} \cdot \underset{\text{(Integro)}}{g'(x)} dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Criterio generale per la scelta di $f(x)$

L'obiettivo è scegliere come fattore finito $f(x)$ la funzione che, una volta derivata, **si semplifica** (es. perde il logaritmo o abbassa il grado).

Tipo di Funzione	Ruolo Consigliato
Logaritmi ($\ln x$) Inverse Trig. ($\arctan x$)	Scegliere come $f(x)$ (Derivare). La loro derivata è una funzione algebrica razionale, molto più semplice da gestire nell'integrale successivo.
Polinomi ($x^2, 3x$)	Scegliere come $f(x)$ (Derivare). Ad ogni derivazione il grado del polinomio scende, fino a diventare una costante.
Esponenziali (e^x) Goniometriche ($\sin x$)	Scegliere come $g'(x)$ (Integrare). Non si semplificano mai derivandole (sono cicliche), quindi è preferibile usarle come fattore differenziale.

Esempi Guidati per Tipologia

CASO 1: Abbassamento di grado (Polinomio $\times$ Goniometrica)

Calcolo di $\int x \cdot \sin x dx$. (Derivo il polinomio per eliminarlo)

Scelta Fattori: $f(x) = x \xrightarrow{D} f'(x) = 1$ $g'(x) = \sin x \xrightarrow{\int} g(x) = -\cos x$	Svolgimento: $= x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx$ $= -x \cos x + \sin x + c$
--	---

CASO 2: Il fattore "1" nascosto (Logaritmi e Inverse)

Calcolo di $\int \ln x dx$. Si immagina $\int 1 \cdot \ln x dx$. (Derivo il logaritmo)

Scelta Fattori: $f(x) = \ln x \xrightarrow{D} f'(x) = \frac{1}{x}$ $g'(x) = 1 \xrightarrow{\int} g(x) = x$	Svolgimento: $= x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx$ $= x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + c$
---	---

CASO 3: Integrali Ciclici (Esponenziale $\times$ Seno/Coseno)

Calcolo di $I = \int e^x \sin x dx$. L'integrale non si annulla mai, ma "ritorna".

1. **Primo Passaggio:** $f = \sin x$, $g' = e^x$.

$$I = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

2. **Secondo Passaggio (sul nuovo integrale):** $f = \cos x$, $g' = e^x$.

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx = e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \sin x dx}_I$$

3. **Equazione Risolutiva:** Sostituendo il risultato del punto 2 nel punto 1, otteniamo un'equazione in I :

$$I = e^x \sin x - (e^x \cos x + I) \implies I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$$

Porto la I a sinistra ($2I$) e divido per 2:

$$2I = e^x (\sin x - \cos x) \implies \mathbf{I = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c}$$

8. Metodo di Integrazione per Sostituzione

Questo metodo è l'analogo dell'operazione inversa della derivazione delle funzioni composte. L'obiettivo è trasformare l'integrale in una forma più semplice (spesso immediata) cambiando la variabile di integrazione da x a t .

Algoritmo Risolutivo

- Scelta della variabile:** Porre $t = \varphi(x)$ (sostituzione diretta) oppure $x = \psi(t)$ (sostituzione inversa), cercando di isolare la parte "scomoda" dell'integranda (es. una radice o un argomento complesso).
- Calcolo del differenziale:** Derivare ambo i membri per trovare la relazione tra dx e dt .
$$dt = \varphi'(x) dx \quad \text{oppure} \quad dx = \psi'(t) dt$$
- Sostituzione:** Riscrivere l'integrale interamente in funzione di t . **Attenzione:** non devono rimanere termini in x .
- Risoluzione:** Calcolare l'integrale nella nuova variabile t .
- Ritorno alla variabile originale:** Sostituire a ritroso t con $\varphi(x)$ per ottenere il risultato finale in x .

ESEMPIO GUIDATO: INTEGRALE IRRAZIONALE

Calcoliamo: $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$

Passaggi Matematici	Spiegazione Logica
1. Posizione: Poniamo $\sqrt{x+1} = t$ $\Rightarrow x+1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 1$	Scegliamo la radice come nuova variabile per eliminarla. Ricaviamo la x per poterla sostituire nel denominatore.
2. Differenziale: $dx = D[t^2 - 1] dt$ $\Rightarrow dx = 2t dt$	Calcoliamo il differenziale della x in funzione di t .
3. Sostituzione: $\int \frac{1}{(t^2 - 1) \cdot t} \cdot (2t dt)$	Sostituiamo x , la radice ($\sqrt{x+1} = t$) e il dx .
4. Risoluzione in t: $= \int \frac{2t}{t(t^2 - 1)} dt = 2 \int \frac{1}{t^2 - 1} dt$ $= 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left \frac{t-1}{t+1} \right + c$	Semplifichiamo la t . L'integrale risultante è notevole (o risolvibile coi fratti semplici: $\frac{1}{(t-1)(t+1)}$).
5. Ritorno a x: $= \ln \left \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1} \right + c$	Sostituiamo nuovamente t con $\sqrt{x+1}$.

TRUCCO DEL MESTIERE:

La sostituzione funziona bene quando vedi nell'integrale una funzione $f(x)$ e, a meno di costanti, anche la sua derivata $f'(x)$.

$$\text{Esempio: } \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \xrightarrow{\cos x=t, -\sin x dx=dt} - \int \frac{1}{t} dt$$

9. Integrazione di Funzioni Razionali Fratte

Integrali della forma $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$.

1. Passo Preliminare: Riduzione del Grado

Se $\text{grado}(N) \geq \text{grado}(D)$, si esegue la **divisione euclidea**: $N(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx \quad (\text{ora } \text{gr}(R) < \text{gr}(D))$$

Esempio: $\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c$

2. Denominatore di 2° Grado ($ax^2 + bx + c$)

Si analizza il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

Caso	Strategia	Esempio Pratico
$\Delta > 0$ 2 radici reali	Fratti Semplici: $\frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$	$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \left(\frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}\right) dx$ $= \frac{1}{2} \ln \left \frac{x-1}{x+1} \right + c$
$\Delta = 0$ Radici coinc.	Potenza Negativa: $\frac{1}{a(x-x_0)^2} = a^{-1}(x-x_0)^{-2}$	$\int \frac{1}{x^2-4x+4} dx = \int (x-2)^{-2} dx$ $= -\frac{1}{x-2} + c$
$\Delta < 0$ No radici reali	ArcoTangente: Ricondurre a $\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$	$\int \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1} dx$ $= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$

3. Denominatori di Grado Superiore (Scomposizione)

Si fattorizza il denominatore $D(x)$ e si scrive la frazione come somma di termini. La regola dipende dal tipo di fattore e dalla sua molteplicità k .

Tipo di Fattore in $D(x)$	Scomposizione in Fratti (Termini da sommare)
Lineare Semplice $(x-a)$	$\frac{A}{x-a}$
Lineare Multiplo ($k > 1$) $(x-a)^k$	$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$
Quadratico Irriducibile (ax^2+bx+c)	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

ESEMPIO A: Radici Reali Multiple (3° Grado)

$\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx$. Fattori: x (semplice), $(x-1)$ (doppio).

Pongo: $\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$

Calcolo costanti: $A = 1, B = -1, C = 1$.
Soluzione: $\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c$.

ESEMPIO B: Fattore Quadratico Irriducibile (3° Grado)

$\int \frac{x+2}{x(x^2+1)} dx$. Fattori: x (lineare), (x^2+1) (quadratico $\Delta < 0$).

$$\text{Pongo: } \frac{x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Sistema: $A(x^2+1) + (Bx+C)x = x+2 \implies A=2, C=1, A+B=0 \rightarrow B=-2$.

Integrale: $\int \frac{2}{x} dx + \int \frac{-2x+1}{x^2+1} dx = 2 \ln|x| - \ln(x^2+1) + \arctan x + c$.

4. Approfondimento: Formula di Hermite

Metodo avanzato utile quando il denominatore $D(x)$ ha **radici multiple** (es. $(x-1)^3$ o $(x^2+1)^2$). Permette di ridurre drasticamente i calcoli rispetto ai fratti semplici.

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \frac{\mathbf{A}(\mathbf{x})}{\mathbf{Q}(\mathbf{x})} + \int \frac{B(x)}{S(x)} dx$$

Significato dei termini:

- $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \text{MCD}(D(x), D'(x))$: Contiene tutti i fattori multipli di $D(x)$ con la loro molteplicità ridotta di 1.
- $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = D(x)/Q(x)$: È il "denominatore pulito", contiene tutti i fattori di $D(x)$ presi una volta sola (radici semplici).
- $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x})$: Polinomi incogniti di grado inferiore rispettivamente a $Q(x)$ e $S(x)$.

Come trovare $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x})$? Non si integra! Si **derivano** entrambi i membri dell'uguaglianza rispetto a x :

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{d}{dx} \left[\frac{A(x)}{Q(x)} \right] + \frac{B(x)}{S(x)}$$

Si fa il denominatore comune e si applica il principio di identità dei polinomi.

ESEMPIO SVOLTO: $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$

1. Analisi: $D(x) = (1+x^2)^2$. Le radici sono complesse e doppie.

- $Q(x) = 1+x^2$ (il fattore con grado abbassato di 1).
- $S(x) = 1+x^2$ (il fattore preso una sola volta).

2. Impostazione: Cerchiamo $A(x) = ax+b$ e $B(x) = cx+d$.

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{ax+b}{1+x^2} + \int \frac{cx+d}{1+x^2} dx$$

3. Derivazione: Derivo a destra e a sinistra.

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{a(1+x^2) - (ax+b)2x}{(1+x^2)^2} + \frac{cx+d}{1+x^2}$$

4. Identità: Facendo il m.c.m. a destra e uguagliando i numeratori si ottiene: $a = 1/2$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1/2$.

5. Risultato Finale:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\mathbf{x}}{2(1+\mathbf{x}^2)} + \frac{1}{2} \arctan \mathbf{x} + \mathbf{c}$$

10. Strumenti Avanzati per Integrali Razionali

1. Formula Ricorsiva per Denominatori di Grado Elevato

Spesso, dopo la scomposizione, residuano integrali del tipo $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$. Invece di integrare per parti ogni volta, si usa la relazione di ricorrenza:

$$I_n = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{n-1}$$

Nota: La formula permette di scendere da I_n fino a $I_1 = \arctan x$.

2. Metodo "Cover-Up" di Heaviside (Radici Semplici)

Trucco rapido per trovare i coefficienti dei fattori lineari $(x-a)$ senza risolvere sistemi.

Se $\frac{N(x)}{(x-a)Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \dots$ allora $\mathbf{A} = \left[\frac{N(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{x})} \right]_{x=a}$

Procedura pratica:

1. "Copri" con il dito il fattore $(x-a)$ nel denominatore di partenza.
2. Sostituisci il valore della radice $x=a$ in tutte le x rimanenti.
3. Il numero ottenuto è direttamente il coefficiente A .

Esempio: $\frac{x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$

- Per A (radice 1): copro $(x-1) \rightarrow \frac{1+5}{1+2} = \frac{6}{3} \Rightarrow \mathbf{A} = 2$
- Per B (radice -2): copro $(x+2) \rightarrow \frac{-2+5}{-2-1} = \frac{3}{-3} \Rightarrow \mathbf{B} = -1$

3. Sostituzione di Weierstrass (Formule Parametriche)

Il metodo standard per trasformare integrali goniometrici in razionali.

Posto $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, si ha:

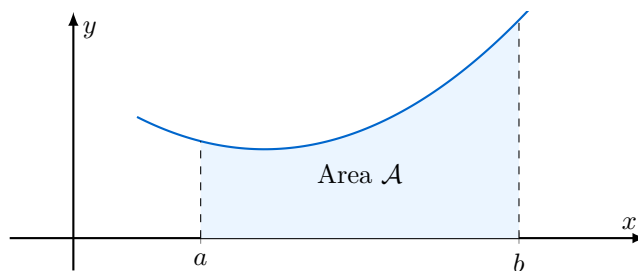
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Esempio: $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$

11. Integrali Definiti: Definizione e Teoremi

1. Definizione Geometrica (Il Trapezoide)

L'integrale definito di una funzione $f(x)$ continua e positiva in $[a, b]$ rappresenta l'**area** della regione di piano compresa tra la curva, l'asse x e le rette verticali $x=a$ e $x=b$.



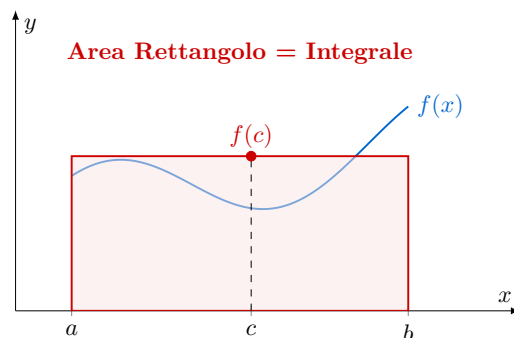
$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx$$

2. Teorema della Media Integrale

Se $f(x)$ è continua in $[a, b]$, esiste almeno un punto $c \in [a, b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c)$$

Significato Geometrico: Esiste un rettangolo (di base $b - a$ e altezza media $f(c)$) che ha **la stessa area** del trapezoide sotteso dalla funzione.



3. Funzione Integrale e Teorema Fondamentale (Parte I)

Si definisce **Funzione Integrale** $F(x)$ l'area cumulata dal punto fisso a fino all'estremo variabile x :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Teorema di Torricelli-Barrow: Se f è continua, allora la funzione integrale $F(x)$ è derivabile e la sua derivata coincide con l'integranda calcolata nell'estremo superiore.

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x)$$

Conseguenza: L'integrazione è l'operazione inversa della derivazione.

4. Formula di Newton-Leibniz (Parte II)

È la formula operativa per calcolare il valore numerico dell'integrale. Se $G(x)$ è una **qualsiasi primitiva** di $f(x)$, allora:

$$\int_a^b f(x) dx = \left[G(x) \right]_a^b = G(b) - G(a)$$

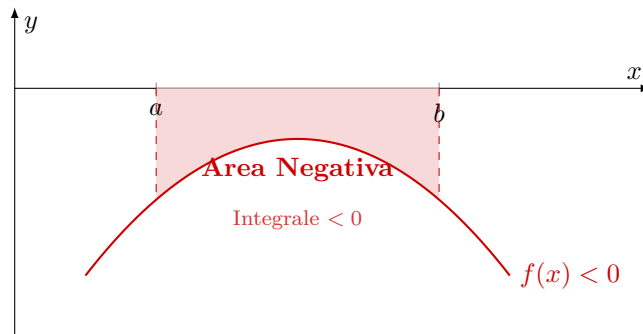
Esempio di Calcolo: $\int_1^2 (3x^2 + 1) dx = \left[x^3 + x \right]_1^2 = \underbrace{(2^3 + 2)}_{G(2)} - \underbrace{(1^3 + 1)}_{G(1)} = 10 - 2 = 8$

12. Perché il risultato è negativo?

Attenzione: L'integrale definito non calcola automaticamente l'area geometrica, ma una somma algebrica. Il risultato può essere negativo in due casi:

CASO 1: Funzione Sotto l'Asse X (Il più comune)

Se la curva si trova interamente o prevalentemente sotto l'asse delle ascisse nell'intervallo $[a, b]$ (con $a < b$).



Esempio: $\int_0^\pi \cos x \, dx = [\sin x]_0^\pi = 0 - 0 = 0$

Spiegazione: L'area positiva (0 a $\pi/2$) cancella esattamente l'area negativa ($\pi/2$ a π).

Esempio Negativo: $\int_\pi^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_\pi^{2\pi} = -1 - (1) = -2$

Significato: L'area geometrica è 2, ma sta sotto l'asse, quindi l'integrale vale -2.

CASO 2: Estremi Invertiti

Per definizione, $\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$.

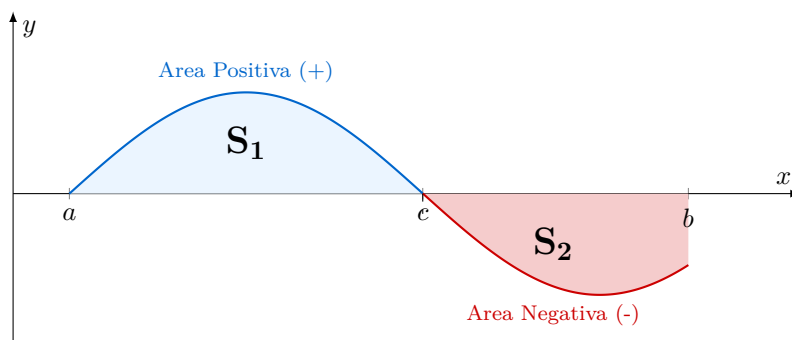
Se integri andando "all'indietro" (dal numero più grande al più piccolo, cioè $dx < 0$), il segno si inverte.

$$\int_2^0 x^2 \, dx = - \int_0^2 x^2 \, dx = -\frac{8}{3}$$

13. Interpretazione Geometrica: Integrale vs Area

È cruciale distinguere tra l'operatore matematico (Integrale) e il concetto fisico (Area).

- **L'Area Geometrica** è la quantità di "vernice" necessaria per colorare la figura. È **sempre positiva**.
- **L'Integrale Definito** è una somma algebrica: le aree sopra l'asse x contano col segno +, quelle sotto col segno -.



VALORE DELL'INTEGRALE	AREA GEOMETRICA TOTALE
$\int_a^b f(x) dx = S_1 - S_2$ <i>Il risultato può essere negativo se $S_2 > S_1$.</i>	$\text{Area} = S_1 + S_2$ <i>Il risultato è sempre positivo.</i>
Calcolo operativo per l'Area Totale: $\text{Area} = \int_a^c f(x) dx + \left \int_c^b f(x) dx \right $	

ESEMPIO PRATICO: $f(x) = \sin x$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

1. Calcolo dell'Integrale Definito (Somma Algebrica)

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = -1 + 1 = 0$$

Risultato: 0. (L'area sopra cancella l'area sotto).

2. Calcolo dell'Area Geometrica (Fisica) La funzione cambia segno a $x = \pi$. Spezzo l'integrale e uso il modulo:

• **Area 1 (0 a π):** $\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2$

• **Area 2 (π a 2π):** $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -1 - (1) = -2$

$$\text{Area Totale} = \text{Area}_1 + |\text{Area}_2| = 2 + |-2| = 4$$

Calcolo dell'Area Totale

Poiché l'area fisica non può essere negativa, per calcolare la superficie totale colorata bisogna spezzare l'integrale nel punto di intersezione c e cambiare segno alla parte negativa (o usare il valore assoluto).

$$\text{Area Totale} = \int_a^c f(x) dx + \left| \int_c^b f(x) dx \right|$$

In sintesi: L'integrale da a a b calcolerebbe l'area blu **meno** l'area rossa. Per avere l'area totale geometrica, dobbiamo sommare i moduli.

14. Integrali di Funzioni Simmetriche (Pari e Dispari)

Se l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine $[-a, a]$, analizzare la parità della funzione riduce drasticamente i calcoli.

Tipo	Proprietà e Formula	Esempio di Calcolo
PARI $f(-x) = f(x)$ (Es: $x^2, \cos x, x $)	Simmetrica rispetto all'asse y . Le aree si sommano. $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$	$\int_{-2}^2 x^2 dx = 2 \int_0^2 x^2 dx$ $= 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$
DISPARI $f(-x) = -f(x)$ (Es: $x^3, \sin x, \tan x$)	Simmetrica rispetto all'origine. L'area positiva annulla quella negativa. $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$	$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx = 0$ (Immediato, senza calcoli)

TRUCCO PER L'ESAME:

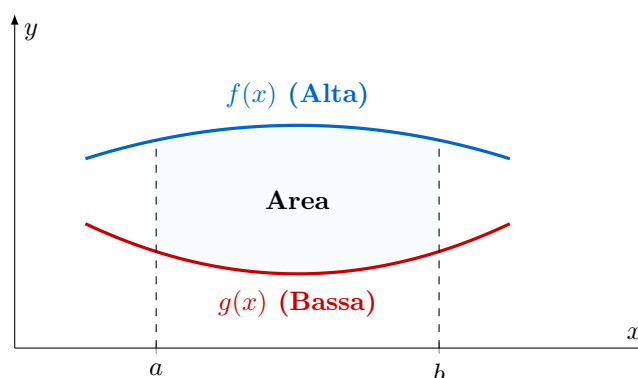
Se vedi un integrale definito "mostruoso" su un intervallo simmetrico (es. $[-1, 1]$) con esponenti dispari, controlla subito se è una funzione dispari. Spesso il risultato è zero senza fare fatica!

$$\text{Es: } \int_{-5}^5 (x^7 - x^3 + \sin x) dx = 0$$

15. Area Compresa tra Due Curve

Se abbiamo due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ tali che $f(x) \geq g(x)$ in un intervallo $[a, b]$, l'area compresa tra esse è l'integrale della differenza ("Curva Alta" meno "Curva Bassa").

$$\text{Area} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



16. Volumi dei Solidi di Rotazione

Il volume si calcola integrando l'area dei cerchi (sezioni) formati dalla rotazione della curva.

1. Rotazione attorno all'asse X

Il solido è generato ruotando l'area sottesa da $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$.

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

ESEMPIO (Rotazione Parabola):

Calcolare il volume generato da $f(x) = \sqrt{x}$ in $[0, 4]$ attorno all'asse x .

1. **Formula:** $V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx$.

2. **Semplificazione:** Il quadrato elimina la radice: $\pi \int_0^4 x dx$.

3. **Calcolo:** $\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi \left(\frac{16}{2} - 0 \right) = 8\pi$.

2. Rotazione attorno all'asse Y (Metodo dei Dischi)

Si usa quando la rotazione avviene attorno all'asse verticale. Bisogna invertire la funzione per avere $x = g(y)$ e integrare su dy .

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} [g(y)]^2 dy$$

Attenzione: Gli estremi y_1, y_2 devono essere valori sull'asse Y!

ESEMPIO (Inversione Funzione):

Calcolare il volume di $y = x^3$ ruotata attorno all'asse Y, compresa tra $y = 0$ e $y = 8$.

1. **Inversione:** Da $y = x^3$ ricavo $x = \sqrt[3]{y}$. Questa è la $g(y)$.

2. **Formula:** $V = \pi \int_0^8 (\sqrt[3]{y})^2 dy = \pi \int_0^8 y^{2/3} dy$.

3. **Calcolo:** $\pi \left[\frac{y^{5/3}}{5/3} \right]_0^8 = \frac{3\pi}{5} [\sqrt[3]{8^5}] = \frac{3\pi}{5} (32) = \frac{96}{5}\pi$.

3. Metodo dei Gusci Cilindrici (Alternativa per asse Y)

Utile se invertire la funzione è difficile. Si integra rispetto a x pur ruotando attorno a Y.

$$V_y = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Esempio: Ruotiamo $y = x^2$ su $[0, 1]$ attorno a Y.

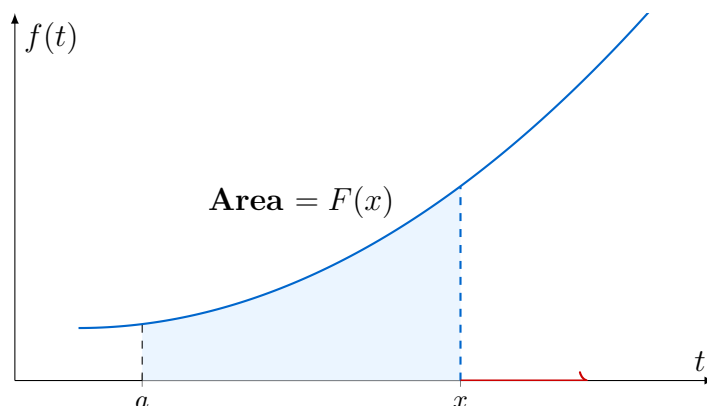
Usando i gusci: $V = 2\pi \int_0^1 x \cdot (x^2) dx = 2\pi \int_0^1 x^3 dx = 2\pi \left[\frac{1}{4} \right] = \frac{\pi}{2}$.

17. La Funzione Integrale

La funzione integrale $F(x)$ rappresenta l'area "accumulata" sotto la curva $f(t)$ a partire da un punto fisso a fino a un punto variabile x .

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Nota Bene: La variabile di integrazione è t (muta), mentre la variabile della funzione è l'estremo superiore x .



Il Teorema Fondamentale del Calcolo (Torricelli-Barrow)

Questo teorema è il ponte tra derivate e integrali. Afferma che se f è continua, la funzione integrale $F(x)$ è derivabile e la sua derivata coincide con l'integranda calcolata in x .

ENUNCIATO:

Se $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, allora:

$$F'(x) = f(x)$$

In parole povere: La derivata dell'integrale è la funzione stessa.

Derivata della Funzione Integrale Composta

Attenzione agli esami! Se l'estremo superiore non è semplicemente x , ma una funzione $g(x)$ (es. $\int_a^{x^2} \dots$), bisogna applicare la Regola della Catena.

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^{g(x)} f(t) dt \right] = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

ESEMPIO D'ESAME: Calcolare la derivata di $F(x) = \int_2^{x^3} \sin(t^2) dt$.

1. **Estremo:** $g(x) = x^3 \implies g'(x) = 3x^2$.
2. **Integranda:** $f(t) = \sin(t^2)$.
3. **Sostituzione:** Al posto di t metto x^3 . $\implies f(g(x)) = \sin((x^3)^2) = \sin(x^6)$.
4. **Calcolo Finale:** $F'(x) = \sin(x^6) \cdot 3x^2$.