

TEORIA DEI NUMERI

500 esercizi divisi per tipologia e difficoltà

- si applica la definizione e basta
- ██□□ standard: Euclide, Bézout, congruenze
- ███□ numeri grandi, o due teoremi da mettere insieme
- ████ da gara: dimostrazioni, casi limite, sistemi

Questo è l'argomento *avanzato* della raccolta: serve alle olimpiadi di matematica, non a essere promossi. I risultati sono a destra, fra parentesi quadre; nelle diofantee la risposta è la *famiglia* di soluzioni, non una sola. I procedimenti dei primi due esercizi di ogni blocco e di tutti quelli segnati ■████ stanno nel file delle soluzioni.

1. Divisibilità e divisione euclidea

Teoria: par. 2

■□□□ Vero o falso? Ricorda che $a \mid b$ si legge « a divide b ».

- | | | |
|------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 1. $3 \mid 12$ [vero] | 8. $4 \mid 18$ [falso] | 15. $15 \mid 45$ [vero] |
| 2. $12 \mid 3$ [falso] | 9. $6 \mid 24$ [vero] | 16. $6 \mid 30$ [vero] |
| 3. $5 \mid 0$ [vero] | 10. $9 \mid 27$ [vero] | 17. $14 \mid 42$ [vero] |
| 4. $7 \mid 49$ [vero] | 11. $11 \mid 121$ [vero] | 18. $10 \mid 105$ [falso] |
| 5. $7 \mid 50$ [falso] | 12. $13 \mid 91$ [vero] | 19. $12 \mid 144$ [vero] |
| 6. $1 \mid 17$ [vero] | 13. $2 \mid 35$ [falso] | 20. $25 \mid 100$ [vero] |
| 7. $17 \mid 17$ [vero] | 14. $8 \mid 64$ [vero] | |

■□□□ Scrivi quoziente e resto della divisione euclidea. Il resto non è mai negativo, nemmeno con $a < 0$.

- | | | |
|---|---|--|
| 21. $47 = 5 \cdot q + r$ [$q = 9, r = 2$] | 27. $145 = 6 \cdot q + r$ [$q = 24, r = 1$] | 31. $-25 = 6 \cdot q + r$ [$q = -5, r = 5$] |
| 22. $100 = 7 \cdot q + r$ [$q = 14, r = 2$] | 28. $-47 = 5 \cdot q + r$ [$q = -10, r = 3$] | 32. $-7 = 3 \cdot q + r$ [$q = -3, r = 2$] |
| 23. $63 = 8 \cdot q + r$ [$q = 7, r = 7$] | 29. $-100 = 7 \cdot q + r$ [$q = -15, r = 5$] | 33. $81 = 9 \cdot q + r$ [$q = 9, r = 0$] |
| 24. $250 = 12 \cdot q + r$ [$q = 20, r = 10$] | 30. $-13 = 4 \cdot q + r$ [$q = -4, r = 3$] | 34. $200 = 13 \cdot q + r$ [$q = 15, r = 5$] |
| 25. $17 = 3 \cdot q + r$ [$q = 5, r = 2$] | 35. $37 = 11 \cdot q + r$ [$q = 3, r = 4$] | |
| 26. $99 = 10 \cdot q + r$ [$q = 9, r = 9$] | | |

36. $156 = 14 \cdot q + r$ [$q = 11$, $r = 2$] 38. $-19 = 5 \cdot q + r$ [$q = -4$, $r = 1$] 40. $1000 = 17 \cdot q + r$ [$q = 58$, $r = 14$]
37. $-60 = 7 \cdot q + r$ [$q = -9$, $r = 3$] 39. $123 = 15 \cdot q + r$ [$q = 8$, $r = 3$]

2. MCD e algoritmo di Euclide

Teoria: par. 3

■□□□ Calcola il MCD con l'algoritmo di Euclide.

- | | | |
|----------------------|----------------------|-----------------------|
| 41. MCD(12, 18) [6] | 55. MCD(21, 28) [7] | 69. MCD(63, 81) [9] |
| 42. MCD(24, 36) [12] | 56. MCD(26, 39) [13] | 70. MCD(24, 30) [6] |
| 43. MCD(15, 25) [5] | 57. MCD(32, 48) [16] | 71. MCD(52, 78) [26] |
| 44. MCD(14, 21) [7] | 58. MCD(45, 60) [15] | 72. MCD(70, 105) [35] |
| 45. MCD(30, 45) [15] | 59. MCD(36, 54) [18] | 73. MCD(11, 121) [11] |
| 46. MCD(16, 24) [8] | 60. MCD(44, 66) [22] | 74. MCD(13, 17) [1] |
| 47. MCD(20, 35) [5] | 61. MCD(8, 12) [4] | 75. MCD(19, 23) [1] |
| 48. MCD(27, 36) [9] | 62. MCD(9, 15) [3] | 76. MCD(34, 51) [17] |
| 49. MCD(40, 60) [20] | 63. MCD(25, 40) [5] | 77. MCD(56, 72) [8] |
| 50. MCD(18, 27) [9] | 64. MCD(35, 49) [7] | 78. MCD(64, 80) [16] |
| 51. MCD(10, 15) [5] | 65. MCD(22, 33) [11] | 79. MCD(75, 100) [25] |
| 52. MCD(28, 42) [14] | 66. MCD(48, 72) [24] | 80. MCD(81, 108) [27] |
| 53. MCD(33, 55) [11] | 67. MCD(60, 84) [12] | |
| 54. MCD(50, 75) [25] | 68. MCD(16, 20) [4] | |

■■□□ Numeri grandi: qui scomporre non conviene, Euclide sì.

- | | | |
|-------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 81. MCD(1071, 462) [21] | 85. MCD(2166, 6099) [57] | 89. MCD(2520, 1980) [180] |
| 82. MCD(2322, 654) [6] | 86. MCD(861, 1281) [21] | 90. MCD(4004, 1078) [154] |
| 83. MCD(1234, 4321) [1] | 87. MCD(966, 429) [3] | 91. MCD(3003, 1001) [1001] |
| 84. MCD(3480, 1288) [8] | 88. MCD(1155, 2079) [231] | 92. MCD(5040, 2016) [1008] |

93. $\text{MCD}(1729, 1001)$ [91] 96. $\text{MCD}(8092, 3094)$ [238] 99. $\text{MCD}(7429, 4199)$ [323]
 94. $\text{MCD}(2431, 1105)$ [221] 97. $\text{MCD}(1000, 625)$ [125] 100. $\text{MCD}(1001, 143)$ [143]
 95. $\text{MCD}(6188, 2431)$ [221] 98. $\text{MCD}(999, 666)$ [333]

3. Identità di Bézout

Teoria: par. 4

■ ■ ■ ■ Trova i coefficienti di Bézout con l'algoritmo di Euclide esteso.

101. Trova x, y con $7x + 5y = \text{MCD}(7, 5)$ [7 · (-2) + 5 · (3) = 1] 113. Trova x, y con $21x + 8y = \text{MCD}(21, 8)$ [21 · (-3) + 8 · (8) = 1]
 102. Trova x, y con $11x + 4y = \text{MCD}(11, 4)$ [11 · (-1) + 4 · (3) = 1] 114. Trova x, y con $27x + 10y = \text{MCD}(27, 10)$ [27 · (3) + 10 · (-8) = 1]
 103. Trova x, y con $13x + 6y = \text{MCD}(13, 6)$ [13 · (1) + 6 · (-2) = 1] 115. Trova x, y con $31x + 12y = \text{MCD}(31, 12)$ [31 · (-5) + 12 · (13) = 1]
 104. Trova x, y con $17x + 5y = \text{MCD}(17, 5)$ [17 · (-2) + 5 · (7) = 1] 116. Trova x, y con $33x + 14y = \text{MCD}(33, 14)$ [33 · (3) + 14 · (-7) = 1]
 105. Trova x, y con $9x + 7y = \text{MCD}(9, 7)$ [9 · (-3) + 7 · (4) = 1] 117. Trova x, y con $35x + 16y = \text{MCD}(35, 16)$ [35 · (-5) + 16 · (11) = 1]
 106. Trova x, y con $12x + 7y = \text{MCD}(12, 7)$ [12 · (3) + 7 · (-5) = 1] 118. Trova x, y con $26x + 11y = \text{MCD}(26, 11)$ [26 · (3) + 11 · (-7) = 1]
 107. Trova x, y con $15x + 4y = \text{MCD}(15, 4)$ [15 · (-1) + 4 · (4) = 1] 119. Trova x, y con $29x + 13y = \text{MCD}(29, 13)$ [29 · (-4) + 13 · (9) = 1]
 108. Trova x, y con $23x + 7y = \text{MCD}(23, 7)$ [23 · (-3) + 7 · (10) = 1] 120. Trova x, y con $37x + 15y = \text{MCD}(37, 15)$ [37 · (-2) + 15 · (5) = 1]
 109. Trova x, y con $19x + 8y = \text{MCD}(19, 8)$ [19 · (3) + 8 · (-7) = 1] 121. Trova x, y con $18x + 11y = \text{MCD}(18, 11)$ [18 · (-3) + 11 · (5) = 1]
 110. Trova x, y con $25x + 9y = \text{MCD}(25, 9)$ [25 · (4) + 9 · (-11) = 1] 122. Trova x, y con $22x + 13y = \text{MCD}(22, 13)$ [22 · (3) + 13 · (-5) = 1]
 111. Trova x, y con $14x + 5y = \text{MCD}(14, 5)$ [14 · (-1) + 5 · (3) = 1] 123. Trova x, y con $24x + 17y = \text{MCD}(24, 17)$ [24 · (5) + 17 · (-7) = 1]
 112. Trova x, y con $16x + 9y = \text{MCD}(16, 9)$ [16 · (4) + 9 · (-7) = 1] 124. Trova x, y con $28x + 19y = \text{MCD}(28, 19)$ [28 · (-2) + 19 · (3) = 1]

125. Trova x, y con $32x + 21y = \text{MCD}(32, 21)$
 $[32 \cdot (2) + 21 \cdot (-3) = 1]$
126. Trova x, y con $39x + 17y = \text{MCD}(39, 17)$
 $[39 \cdot (7) + 17 \cdot (-16) = 1]$
127. Trova x, y con $41x + 18y = \text{MCD}(41, 18)$
 $[41 \cdot (-7) + 18 \cdot (16) = 1]$
128. Trova x, y con $43x + 19y = \text{MCD}(43, 19)$
 $[43 \cdot (4) + 19 \cdot (-9) = 1]$
129. Trova x, y con $45x + 22y = \text{MCD}(45, 22)$
 $[45 \cdot (1) + 22 \cdot (-2) = 1]$
130. Trova x, y con $49x + 23y = \text{MCD}(49, 23)$
 $[49 \cdot (8) + 23 \cdot (-17) = 1]$

■ ■ ■ □ Numeri più grandi: la risalita è più lunga, il metodo lo stesso.

131. Trova x, y con $1071x + 462y = \text{MCD}(1071, 462)$ $[1071 \cdot (-3) + 462 \cdot (7) = 21]$
132. Trova x, y con $240x + 46y = \text{MCD}(240, 46)$
 $[240 \cdot (-9) + 46 \cdot (47) = 2]$
133. Trova x, y con $322x + 70y = \text{MCD}(322, 70)$
 $[322 \cdot (2) + 70 \cdot (-9) = 14]$
134. Trova x, y con $1180x + 482y = \text{MCD}(1180, 482)$ $[1180 \cdot (-29) + 482 \cdot (71) = 2]$
135. Trova x, y con $803x + 154y = \text{MCD}(803, 154)$ $[803 \cdot (5) + 154 \cdot (-26) = 11]$
136. Trova x, y con $612x + 342y = \text{MCD}(612, 342)$ $[612 \cdot (-5) + 342 \cdot (9) = 18]$
137. Trova x, y con $2322x + 654y = \text{MCD}(2322, 654)$ $[2322 \cdot (20) + 654 \cdot (-71) = 6]$
138. Trova x, y con $1769x + 551y = \text{MCD}(1769, 551)$ $[1769 \cdot (5) + 551 \cdot (-16) = 29]$
139. Trova x, y con $1024x + 405y = \text{MCD}(1024, 405)$ $[1024 \cdot (-176) + 405 \cdot (445) = 1]$
140. Trova x, y con $2431x + 1105y = \text{MCD}(2431, 1105)$ $[2431 \cdot (1) + 1105 \cdot (-2) = 221]$
141. Trova x, y con $3465x + 1287y = \text{MCD}(3465, 1287)$ $[3465 \cdot (3) + 1287 \cdot (-8) = 99]$
142. Trova x, y con $861x + 1281y = \text{MCD}(861, 1281)$ $[861 \cdot (3) + 1281 \cdot (-2) = 21]$
143. Trova x, y con $5040x + 1188y = \text{MCD}(5040, 1188)$ $[5040 \cdot (-4) + 1188 \cdot (17) = 36]$
144. Trova x, y con $966x + 429y = \text{MCD}(966, 429)$ $[966 \cdot (4) + 429 \cdot (-9) = 3]$
145. Trova x, y con $1155x + 429y = \text{MCD}(1155, 429)$ $[1155 \cdot (3) + 429 \cdot (-8) = 33]$

4. Equazioni diofantee lineari

Teoria: par. 5

■ ■ ■ □ Dì se l'equazione ha soluzioni intere e, se sì, scrivile tutte.

146. $6x + 15y = 9$ $[x = -6 + 5t, y = 3 - 2t]$
147. $3x + 5y = 7$ $[x = 14 + 5t, y = -7 - 3t]$
148. $4x + 6y = 10$ $[x = -5 + 3t, y = 5 - 2t]$
149. $7x + 11y = 1$ $[x = -3 + 11t, y = 2 - 7t]$

150. $5x + 3y = 8$ [$x = -8 + 3t, y = 16 - 5t$]
151. $9x + 12y = 15$ [$x = -5 + 4t, y = 5 - 3t$]
152. $8x + 14y = 6$ [$x = 6 + 7t, y = -3 - 4t$]
153. $10x + 15y = 25$ [$x = -5 + 3t, y = 5 - 2t$]
154. $12x + 18y = 30$ [$x = -5 + 3t, y = 5 - 2t$]
155. $13x + 7y = 5$ [$x = -5 + 7t, y = 10 - 13t$]
156. $21x + 14y = 35$ [$x = 5 + 2t, y = -5 - 3t$]
157. $17x + 5y = 3$ [$x = -6 + 5t, y = 21 - 17t$]
158. $11x + 9y = 4$ [$x = -16 + 9t, y = 20 - 11t$]
159. $25x + 15y = 10$ [$x = -2 + 3t, y = 4 - 5t$]
160. $16x + 10y = 8$ [$x = 8 + 5t, y = -12 - 8t$]
161. $6x + 15y = 7$ [nessuna soluzione]
162. $4x + 6y = 9$ [nessuna soluzione]
163. $8x + 12y = 14$ [nessuna soluzione]
164. $10x + 25y = 12$ [nessuna soluzione]
165. $9x + 6y = 4$ [nessuna soluzione]

■■■■ Numeri grandi: prima il criterio con il MCD, poi Bézout.

166. $105x + 42y = 21$ [$x = 1 + 2t, y = -2 - 5t$]
167. $91x + 65y = 13$ [$x = -2 + 5t, y = 3 - 7t$]
168. $144x + 90y = 18$ [$x = 2 + 5t, y = -3 - 8t$]
169. $221x + 187y = 34$ [$x = -10 + 11t, y = 12 - 13t$]
170. $1071x + 462y = 63$ [$x = -9 + 22t, y = 21 - 51t$]
171. $323x + 187y = 51$ [$x = -12 + 11t, y = 21 - 19t$]
172. $154x + 88y = 22$ [$x = -1 + 4t, y = 2 - 7t$]
173. $176x + 132y = 44$ [$x = 1 + 3t, y = -1 - 4t$]
174. $255x + 165y = 30$ [$x = 4 + 11t, y = -6 - 17t$]
175. $391x + 253y = 23$ [$x = 2 + 11t, y = -3 - 17t$]

5. Primi e fattorizzazione

Teoria: par. 6

■□□□ Il numero è primo? Ricorda che basta provare i divisori fino alla radice quadrata.

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| 176. 2 è primo? [sì] | 188. 39 è primo? [no] | 200. 79 è primo? [sì] |
| 177. 9 è primo? [no] | 189. 41 è primo? [sì] | 201. 83 è primo? [sì] |
| 178. 11 è primo? [sì] | 190. 49 è primo? [no] | 202. 87 è primo? [no] |
| 179. 15 è primo? [no] | 191. 51 è primo? [no] | 203. 89 è primo? [sì] |
| 180. 17 è primo? [sì] | 192. 53 è primo? [sì] | 204. 91 è primo? [no] |
| 181. 21 è primo? [no] | 193. 57 è primo? [no] | 205. 97 è primo? [sì] |
| 182. 23 è primo? [sì] | 194. 59 è primo? [sì] | 206. 101 è primo? [sì] |
| 183. 25 è primo? [no] | 195. 61 è primo? [sì] | 207. 111 è primo? [no] |
| 184. 29 è primo? [sì] | 196. 67 è primo? [sì] | 208. 113 è primo? [sì] |
| 185. 31 è primo? [sì] | 197. 71 è primo? [sì] | 209. 121 è primo? [no] |
| 186. 33 è primo? [no] | 198. 73 è primo? [sì] | 210. 127 è primo? [sì] |
| 187. 37 è primo? [sì] | 199. 77 è primo? [no] | |

■■□□ Scomponi in fattori primi.

- | | |
|--|--|
| 211. Scomponi 360 in fattori primi [$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$] | 219. Scomponi 1001 in fattori primi [$7 \cdot 11 \cdot 13$] |
| 212. Scomponi 720 in fattori primi [$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$] | 220. Scomponi 1728 in fattori primi [$2^6 \cdot 3^3$] |
| 213. Scomponi 1024 in fattori primi [2^{10}] | 221. Scomponi 2025 in fattori primi [$3^4 \cdot 5^2$] |
| 214. Scomponi 945 in fattori primi [$3^3 \cdot 5 \cdot 7$] | 222. Scomponi 3600 in fattori primi [$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$] |
| 215. Scomponi 2310 in fattori primi [$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$] | 223. Scomponi 4096 in fattori primi [2^{12}] |
| 216. Scomponi 1260 in fattori primi [$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$] | 224. Scomponi 5544 in fattori primi [$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$] |
| 217. Scomponi 500 in fattori primi [$2^2 \cdot 5^3$] | 225. Scomponi 9009 in fattori primi [$3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$] |
| 218. Scomponi 864 in fattori primi [$2^5 \cdot 3^3$] | |

6. Numero e somma dei divisori

Teoria: par. 7

■□□□ Quanti divisori ha il numero? Usa la formula, non l'elenco.

- | | | |
|-------------------|--------------------|--------------------|
| 226. $d(12)$ [6] | 238. $d(56)$ [8] | 250. $d(120)$ [16] |
| 227. $d(18)$ [6] | 239. $d(60)$ [12] | 251. $d(125)$ [4] |
| 228. $d(20)$ [6] | 240. $d(64)$ [7] | 252. $d(128)$ [8] |
| 229. $d(24)$ [8] | 241. $d(72)$ [12] | 253. $d(144)$ [15] |
| 230. $d(28)$ [6] | 242. $d(75)$ [6] | 254. $d(150)$ [12] |
| 231. $d(30)$ [8] | 243. $d(80)$ [10] | 255. $d(160)$ [12] |
| 232. $d(36)$ [9] | 244. $d(81)$ [5] | 256. $d(6)$ [4] |
| 233. $d(40)$ [8] | 245. $d(84)$ [12] | 257. $d(8)$ [4] |
| 234. $d(45)$ [6] | 246. $d(90)$ [12] | 258. $d(9)$ [3] |
| 235. $d(48)$ [10] | 247. $d(96)$ [12] | 259. $d(10)$ [4] |
| 236. $d(50)$ [6] | 248. $d(100)$ [9] | 260. $d(16)$ [5] |
| 237. $d(54)$ [8] | 249. $d(108)$ [12] | |

■■□□ Quanti sono e quanto fanno sommati.

- | | |
|---|---|
| 261. $d(360)$ e $\sigma(360)$ [$d = 24, \sigma = 1170$] | 273. $d(900)$ e $\sigma(900)$ [$d = 27, \sigma = 2821$] |
| 262. $d(400)$ e $\sigma(400)$ [$d = 15, \sigma = 961$] | 274. $d(960)$ e $\sigma(960)$ [$d = 28, \sigma = 3048$] |
| 263. $d(480)$ e $\sigma(480)$ [$d = 24, \sigma = 1512$] | 275. $d(1000)$ e $\sigma(1000)$ [$d = 16, \sigma = 2340$] |
| 264. $d(500)$ e $\sigma(500)$ [$d = 12, \sigma = 1092$] | 276. $d(1024)$ e $\sigma(1024)$ [$d = 11, \sigma = 2047$] |
| 265. $d(540)$ e $\sigma(540)$ [$d = 24, \sigma = 1680$] | 277. $d(1080)$ e $\sigma(1080)$ [$d = 32, \sigma = 3600$] |
| 266. $d(600)$ e $\sigma(600)$ [$d = 24, \sigma = 1860$] | 278. $d(1200)$ e $\sigma(1200)$ [$d = 30, \sigma = 3844$] |
| 267. $d(625)$ e $\sigma(625)$ [$d = 5, \sigma = 781$] | 279. $d(1260)$ e $\sigma(1260)$ [$d = 36, \sigma = 4368$] |
| 268. $d(648)$ e $\sigma(648)$ [$d = 20, \sigma = 1815$] | 280. $d(1296)$ e $\sigma(1296)$ [$d = 25, \sigma = 3751$] |
| 269. $d(720)$ e $\sigma(720)$ [$d = 30, \sigma = 2418$] | 281. $d(1440)$ e $\sigma(1440)$ [$d = 36, \sigma = 4914$] |
| 270. $d(756)$ e $\sigma(756)$ [$d = 24, \sigma = 2240$] | 282. $d(1500)$ e $\sigma(1500)$ [$d = 24, \sigma = 4368$] |
| 271. $d(800)$ e $\sigma(800)$ [$d = 18, \sigma = 1953$] | 283. $d(1728)$ e $\sigma(1728)$ [$d = 28, \sigma = 5080$] |
| 272. $d(840)$ e $\sigma(840)$ [$d = 32, \sigma = 2880$] | 284. $d(2000)$ e $\sigma(2000)$ [$d = 20, \sigma = 4836$] |

285. $d(2160)$ e $\sigma(2160)$ [$d = 40, \sigma = 7440$]

7. Congruenze: calcoli modulari

Teoria: par. 8

■ ■ ■ ■ Calcola il prodotto modulo m senza fare la moltiplicazione: riduci prima i fattori.

286. $17 \cdot 23 \pmod{5}$ [1] 290. $19 \cdot 37 \pmod{6}$ [1] 294. $24 \cdot 38 \pmod{12}$ [0]

287. $13 \cdot 29 \pmod{7}$ [6] 291. $33 \cdot 41 \pmod{8}$ [1] 295. $45 \cdot 56 \pmod{13}$ [11]

288. $25 \cdot 31 \pmod{4}$ [3] 292. $52 \cdot 67 \pmod{10}$ [4]

289. $47 \cdot 53 \pmod{9}$ [7] 293. $71 \cdot 83 \pmod{11}$ [8]

■ ■ ■ ■ Con il parametro: si scrive $d(n)$ in funzione di k e si risolve.

296. Per quale valore di k il numero $2^3 \cdot 3^k$ ha esattamente 12 divisori? [$k = 2$] 301. Per quale valore di k il numero $3^2 \cdot 2^k$ ha esattamente 21 divisori? [$k = 6$]

297. Per quale valore di k il numero $2^2 \cdot 3^k$ ha esattamente 15 divisori? [$k = 4$] 302. Per quale valore di k il numero $5^1 \cdot 2^k$ ha esattamente 14 divisori? [$k = 6$]

298. Per quale valore di k il numero $3^1 \cdot 5^k$ ha esattamente 8 divisori? [$k = 3$] 303. Per quale valore di k il numero $2^5 \cdot 3^k$ ha esattamente 24 divisori? [$k = 3$]

299. Per quale valore di k il numero $2^4 \cdot 5^k$ ha esattamente 20 divisori? [$k = 3$] 304. Per quale valore di k il numero $7^1 \cdot 3^k$ ha esattamente 12 divisori? [$k = 5$]

300. Per quale valore di k il numero $2^1 \cdot 7^k$ ha esattamente 10 divisori? [$k = 4$] 305. Per quale valore di k il numero $2^2 \cdot 5^k$ ha esattamente 18 divisori? [$k = 5$]

■ ■ ■ ■ Trova il resto della potenza cercando il ciclo. Con modulo 10 il risultato è l'ultima cifra.

306. $7^{100} \pmod{10}$ [1] 313. $2^{20} \pmod{7}$ [4] 320. $2^{16} \pmod{15}$ [1]

307. $3^{50} \pmod{10}$ [9] 314. $3^{15} \pmod{5}$ [2] 321. $11^{20} \pmod{6}$ [1]

308. $2^{30} \pmod{10}$ [4] 315. $5^{12} \pmod{6}$ [1] 322. $13^{10} \pmod{4}$ [1]

309. $9^{25} \pmod{10}$ [9] 316. $2^{10} \pmod{11}$ [1] 323. $6^{30} \pmod{7}$ [1]

310. $4^{17} \pmod{10}$ [4] 317. $3^{20} \pmod{7}$ [2] 324. $12^{15} \pmod{5}$ [3]

311. $8^{40} \pmod{10}$ [6] 318. $4^{15} \pmod{9}$ [1] 325. $10^{20} \pmod{3}$ [1]

312. $6^{99} \pmod{10}$ [6] 319. $7^{12} \pmod{5}$ [1]

■■■□ **Esponenti grandi: conviene il piccolo teorema di Fermat (par. 11), ma si può anche cercare il ciclo.**

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 326. $2^{200} \pmod{13}$ [9] | 330. $11^{45} \pmod{23}$ [11] | 334. $5^{100} \pmod{41}$ [1] |
| 327. $3^{100} \pmod{17}$ [13] | 331. $2^{128} \pmod{29}$ [25] | 335. $6^{50} \pmod{43}$ [36] |
| 328. $5^{64} \pmod{11}$ [9] | 332. $3^{243} \pmod{31}$ [27] | |
| 329. $7^{81} \pmod{19}$ [1] | 333. $13^{27} \pmod{37}$ [31] | |

8. Criteri di divisibilità

Teoria: par. 9

■■■□ **Usa il criterio, e di' quale: somma delle cifre (3 e 9) o somma a segni alterni (11).**

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 336. 4725 è divisibile per 9? [sì] | 349. 345678 è divisibile per 9? [no] |
| 337. 12345 è divisibile per 3? [sì] | 350. 876543 è divisibile per 3? [sì] |
| 338. 918082 è divisibile per 11? [sì] | 351. 191919 è divisibile per 11? [no] |
| 339. 123456 è divisibile per 9? [no] | 352. 505050 è divisibile per 9? [no] |
| 340. 1234567 è divisibile per 3? [no] | 353. 777777 è divisibile per 11? [sì] |
| 341. 98765 è divisibile per 11? [no] | 354. 642135 è divisibile per 9? [no] |
| 342. 54321 è divisibile per 3? [sì] | 355. 818181 è divisibile per 11? [no] |
| 343. 111111 è divisibile per 11? [sì] | 356. 369369 è divisibile per 3? [sì] |
| 344. 999999 è divisibile per 9? [sì] | 357. 159753 è divisibile per 3? [sì] |
| 345. 13579 è divisibile per 3? [no] | 358. 246810 è divisibile per 9? [no] |
| 346. 24680 è divisibile per 11? [no] | 359. 135790 è divisibile per 11? [no] |
| 347. 100001 è divisibile per 11? [sì] | 360. 864297 è divisibile per 9? [sì] |
| 348. 222222 è divisibile per 3? [sì] | |

9. Inverso modulare ed equazioni congruenziali

Teoria: par. 10

■■■□ **Trova l'inverso modulare, o di perché non esiste.**

- | | | |
|--|--|--|
| 361. L'inverso di 7 modulo 26
[15] | 366. L'inverso di 9 modulo 20
[9] | 371. L'inverso di 6 modulo 25
[21] |
| 362. L'inverso di 3 modulo 10
[7] | 367. L'inverso di 13 modulo 21
[13] | 372. L'inverso di 10 modulo 27
[19] |
| 363. L'inverso di 5 modulo 12
[5] | 368. L'inverso di 17 modulo 24
[17] | 373. L'inverso di 14 modulo 33
[26] |
| 364. L'inverso di 11 modulo 30
[11] | 369. L'inverso di 4 modulo 9
[7] | 374. L'inverso di 19 modulo 35
[24] |
| 365. L'inverso di 7 modulo 15
[13] | 370. L'inverso di 8 modulo 15
[2] | 375. L'inverso di 23 modulo 40
[7] |

■■■□ Risolvi la congruenza: quante classi di soluzioni ci sono?

- | | |
|---|---|
| 376. $7x \equiv 3 \pmod{26}$ [$x \equiv 19 \pmod{26}$] | 382. $9x \equiv 6 \pmod{15}$ [$x \equiv 4 \pmod{5}$ (3 classi mod 15)] |
| 377. $3x \equiv 4 \pmod{10}$ [$x \equiv 8 \pmod{10}$] | |
| 378. $5x \equiv 2 \pmod{12}$ [$x \equiv 10 \pmod{12}$] | 383. $8x \equiv 12 \pmod{20}$ [$x \equiv 4 \pmod{5}$ (4 classi mod 20)] |
| 379. $11x \equiv 5 \pmod{30}$ [$x \equiv 25 \pmod{30}$] | |
| 380. $4x \equiv 6 \pmod{10}$ [$x \equiv 4 \pmod{5}$ (2 classi mod 10)] | 384. $14x \equiv 21 \pmod{35}$ [$x \equiv 4 \pmod{5}$ (7 classi mod 35)] |
| 381. $6x \equiv 4 \pmod{10}$ [$x \equiv 4 \pmod{5}$ (2 classi mod 10)] | 385. $12x \equiv 18 \pmod{30}$ [$x \equiv 4 \pmod{5}$ (6 classi mod 30)] |

■■■■ Qui il MCD fra coefficiente e modulo non è 1: si divide tutto, modulo compreso.

- | | |
|--|--|
| 386. $35x \equiv 14 \pmod{91}$ [$x \equiv 3 \pmod{13}$ (7 classi mod 91)] | 391. $28x \equiv 21 \pmod{49}$ [$x \equiv 6 \pmod{7}$ (7 classi mod 49)] |
| 387. $24x \equiv 18 \pmod{30}$ [$x \equiv 2 \pmod{5}$ (6 classi mod 30)] | 392. $26x \equiv 13 \pmod{39}$ [$x \equiv 2 \pmod{3}$ (13 classi mod 39)] |
| 388. $45x \equiv 15 \pmod{60}$ [$x \equiv 3 \pmod{4}$ (15 classi mod 60)] | 393. $40x \equiv 24 \pmod{56}$ [$x \equiv 2 \pmod{7}$ (8 classi mod 56)] |
| 389. $33x \equiv 22 \pmod{55}$ [$x \equiv 4 \pmod{5}$ (11 classi mod 55)] | 394. $15x \equiv 25 \pmod{35}$ [$x \equiv 4 \pmod{7}$ (5 classi mod 35)] |
| 390. $18x \equiv 12 \pmod{42}$ [$x \equiv 3 \pmod{7}$ (6 classi mod 42)] | 395. $22x \equiv 33 \pmod{55}$ [$x \equiv 4 \pmod{5}$ (11 classi mod 55)] |

10. Piccolo Fermat e teorema di Eulero

Teoria: par. 11

■ ■ ■ □ Modulo primo: riduci l'esponente con il piccolo teorema di Fermat.

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 396. $2^{100} \pmod{13}$ [3] | 403. $2^{64} \pmod{29}$ [24] | 410. $7^{500} \pmod{59}$ [21] |
| 397. $3^{200} \pmod{7}$ [2] | 404. $5^{81} \pmod{31}$ [1] | 411. $2^{500} \pmod{61}$ [47] |
| 398. $5^{150} \pmod{11}$ [1] | 405. $13^{121} \pmod{37}$ [19] | 412. $5^{200} \pmod{67}$ [25] |
| 399. $7^{300} \pmod{17}$ [13] | 406. $10^{250} \pmod{41}$ [1] | 413. $3^{300} \pmod{71}$ [32] |
| 400. $2^{1000} \pmod{19}$ [17] | 407. $6^{100} \pmod{43}$ [6] | 414. $2^{400} \pmod{73}$ [16] |
| 401. $3^{500} \pmod{23}$ [13] | 408. $2^{2024} \pmod{47}$ [1] | 415. $11^{200} \pmod{79}$ [49] |
| 402. $11^{100} \pmod{13}$ [3] | 409. $3^{1000} \pmod{53}$ [10] | |

■ ■ ■ □ Modulo non primo, ma base coprima: si usa Eulero, con $\varphi(m)$ al posto di $p - 1$.

- | | | |
|--------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 416. $3^{40} \pmod{100}$ [1] | 420. $11^{50} \pmod{100}$ [1] | 424. $5^{12} \pmod{21}$ [1] |
| 417. $7^{100} \pmod{100}$ [1] | 421. $7^{24} \pmod{25}$ [1] | 425. $7^{30} \pmod{45}$ [19] |
| 418. $3^{1000} \pmod{100}$ [1] | 422. $3^{20} \pmod{25}$ [1] | |
| 419. $9^{200} \pmod{100}$ [1] | 423. $2^{20} \pmod{27}$ [4] | |

■ ■ ■ ■ Qui $\varphi(m)$ va calcolato dalla fattorizzazione prima di poter ridurre l'esponente.

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 426. $13^{24} \pmod{35}$ [1] | 430. $23^{12} \pmod{55}$ [1] | 434. $41^{16} \pmod{57}$ [55] |
| 427. $11^{40} \pmod{63}$ [25] | 431. $29^{20} \pmod{39}$ [22] | 435. $43^{20} \pmod{65}$ [16] |
| 428. $17^{20} \pmod{32}$ [1] | 432. $31^{24} \pmod{49}$ [1] | |
| 429. $19^{30} \pmod{44}$ [1] | 433. $37^{10} \pmod{51}$ [25] | |

11. Teorema cinese del resto

Teoria: par. 12

■ ■ ■ □ Risolvi il sistema di congruenze per sostituzione.

436. $x \equiv 2 \pmod{3}, x \equiv 3 \pmod{5} [x \equiv 8 \pmod{15}]$
437. $x \equiv 1 \pmod{2}, x \equiv 2 \pmod{3} [x \equiv 5 \pmod{6}]$
438. $x \equiv 3 \pmod{4}, x \equiv 2 \pmod{5} [x \equiv 7 \pmod{20}]$
439. $x \equiv 1 \pmod{3}, x \equiv 4 \pmod{7} [x \equiv 4 \pmod{21}]$
440. $x \equiv 2 \pmod{5}, x \equiv 3 \pmod{8} [x \equiv 27 \pmod{40}]$
441. $x \equiv 4 \pmod{9}, x \equiv 1 \pmod{4} [x \equiv 13 \pmod{36}]$
442. $x \equiv 5 \pmod{6}, x \equiv 3 \pmod{7} [x \equiv 17 \pmod{42}]$
443. $x \equiv 2 \pmod{7}, x \equiv 6 \pmod{11} [x \equiv 72 \pmod{77}]$
444. $x \equiv 3 \pmod{10}, x \equiv 5 \pmod{9} [x \equiv 23 \pmod{90}]$
445. $x \equiv 1 \pmod{5}, x \equiv 6 \pmod{13} [x \equiv 6 \pmod{65}]$
446. $x \equiv 4 \pmod{11}, x \equiv 7 \pmod{12} [x \equiv 103 \pmod{132}]$
447. $x \equiv 0 \pmod{3}, x \equiv 2 \pmod{7} [x \equiv 9 \pmod{21}]$
448. $x \equiv 6 \pmod{7}, x \equiv 2 \pmod{9} [x \equiv 20 \pmod{63}]$
449. $x \equiv 3 \pmod{8}, x \equiv 5 \pmod{11} [x \equiv 27 \pmod{88}]$
450. $x \equiv 1 \pmod{6}, x \equiv 4 \pmod{13} [x \equiv 43 \pmod{78}]$

■■■■ Tre congruenze: si uniscono due per volta.

451. $x \equiv 2 \pmod{3}, x \equiv 3 \pmod{5}, x \equiv 2 \pmod{7} [x \equiv 23 \pmod{105}]$
452. $x \equiv 1 \pmod{3}, x \equiv 2 \pmod{5}, x \equiv 3 \pmod{7} [x \equiv 52 \pmod{105}]$
453. $x \equiv 2 \pmod{4}, x \equiv 3 \pmod{5}, x \equiv 1 \pmod{7} [x \equiv 78 \pmod{140}]$
454. $x \equiv 1 \pmod{2}, x \equiv 2 \pmod{3}, x \equiv 4 \pmod{5} [x \equiv 29 \pmod{30}]$
455. $x \equiv 3 \pmod{5}, x \equiv 4 \pmod{7}, x \equiv 2 \pmod{9} [x \equiv 263 \pmod{315}]$
456. $x \equiv 1 \pmod{4}, x \equiv 3 \pmod{7}, x \equiv 5 \pmod{11} [x \equiv 269 \pmod{308}]$
457. $x \equiv 2 \pmod{3}, x \equiv 1 \pmod{8}, x \equiv 4 \pmod{11} [x \equiv 257 \pmod{264}]$
458. $x \equiv 5 \pmod{7}, x \equiv 2 \pmod{9}, x \equiv 3 \pmod{13} [x \equiv 614 \pmod{819}]$
459. $x \equiv 1 \pmod{5}, x \equiv 2 \pmod{7}, x \equiv 3 \pmod{11} [x \equiv 366 \pmod{385}]$
460. $x \equiv 4 \pmod{9}, x \equiv 3 \pmod{10}, x \equiv 7 \pmod{13} [x \equiv 553 \pmod{1170}]$

12. Da gara: vero o falso, errori, dimostrazioni

Teoria: par. 13

■■□□ Vero o falso? Dove è falso, trova un controesempio.

461. $3 \mid 12$ [vero]
462. $12 \mid 3$ [falso]
463. $5 \mid 0$ [vero]
464. $0 \mid 5$ [falso]
465. se $a \mid b$ e $b \mid c$ allora $a \mid c$ [vero]
466. se $a \mid bc$ allora $a \mid b$ oppure $a \mid c$ [falso]
467. se p è primo e $p \mid ab$ allora $p \mid a$ oppure $p \mid b$ [vero]
468. 1 è un numero primo [falso]
469. 2 è l'unico primo pari [vero]
470. ogni numero con un numero dispari di divisori è un quadrato [vero]
471. $d(n)$ è sempre pari [falso]
472. da $6 \equiv 2 \pmod{4}$ segue $3 \equiv 1 \pmod{4}$ [falso]
473. $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ vale per ogni m [falso]
474. l'inverso di a modulo m esiste sempre [falso]
475. l'inverso di a modulo m esiste se $\text{MCD}(a, m) = 1$ [vero]
476. $ax + by = c$ ha soluzioni intere solo se $\text{MCD}(a, b) \mid c$ [vero]
477. il teorema cinese del resto vale con moduli qualsiasi [falso]
478. $\varphi(p) = p - 1$ per ogni primo p [vero]
479. $\sigma(n)$ conta quanti sono i divisori di n [falso]
480. se n è primo allora $d(n) = 2$ [vero]

■■■□ Trova l'errore: ogni riga contiene un ragionamento sbagliato. Di' che cosa non va.

481. $12 \mid 3$ perché $12 : 3 = 4$ [$3 \mid 12$]
482. da $6 \equiv 2 \pmod{4}$ segue $3 \equiv 1 \pmod{4}$ [si divide anche il modulo: $3 \equiv 1 \pmod{2}$]
483. $6x + 15y = 7$ ha soluzione $x = 2, y = -1/3$ [nessuna soluzione]
484. $3^3 \equiv 1 \pmod{4}$ per il piccolo teorema di Fermat [$3^3 \equiv 3 \pmod{4}$]
485. i divisori di 36 sono 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 36: sono 8 [9]
486. $\sigma(12) = 6$ perché 12 ha 6 divisori [$\sigma(12) = 28$]
487. l'inverso di 4 modulo 8 è 2 [non esiste]
488. $\text{MCD}(1071, 462) = 3$ perché entrambi sono divisibili per 3 [21]
489. $x \equiv 1 \pmod{4}$ e $x \equiv 2 \pmod{6}$ hanno soluzione per il teorema cinese [nessuna soluzione]
490. 211 non è primo perché è dispari [211 è primo]

■■■■ Dimostrazioni: sono i problemi tipici delle gare. Le tre mosse del par. 13 bastano per tutte.

491. Dimostra che $n^2 + 1$ non è mai divisibile per 3. [vedi soluzione]
492. Dimostra che il prodotto di due interi consecutivi è sempre pari. [vedi soluzione]

493. Dimostra che $d(n)$ è dispari se e solo se n è un quadrato perfetto. [vedi soluzione]
494. Dimostra che se p è primo e $p > 3$, allora $p^2 - 1$ è divisibile per 24. [vedi soluzione]
495. Dimostra che la somma di tre interi consecutivi è divisibile per 3. [vedi soluzione]
496. Dimostra che un numero e la somma delle sue cifre danno lo stesso resto modulo 9. [vedi soluzione]
497. Dimostra che se $\text{MCD}(a, b) = 1$ e $a \mid bc$, allora $a \mid c$. [vedi soluzione]
498. Dimostra che esistono infiniti numeri primi. [vedi soluzione]
499. Dimostra che $2^n - 1$ non è mai un quadrato perfetto per $n > 1$. [vedi soluzione]
500. Dimostra che se n è dispari, allora $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$. [vedi soluzione]