

FORMULARIO: I NUMERI NATURALI

In ogni riquadro: la regola con le sue condizioni e un esempio con i numeri.

1 Espressioni: l'ordine delle operazioni

1.1 L'ordine in cui si eseguono le operazioni

1. parentesi, dalla più interna: $()$, poi $[]$, poi $\{ \}$
2. potenze
3. moltiplicazioni e divisioni, **da sinistra a destra**
4. addizioni e sottrazioni, **da sinistra a destra**

Moltiplicazione e divisione sono allo stesso livello. Idem addizione e sottrazione.

ESEMPIO

$$8 - 3 + 2 = 5 + 2 = 7 \quad (\text{non } 8 - 5 = 3)$$

$$24 : 4 : 2 = 6 : 2 = 3 \quad (\text{non } 24 : 2 = 12)$$

$$2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14 \quad (\text{non } 5 \cdot 4 = 20)$$

2 Proprietà delle operazioni

2.1 Commutativa

$$a + b = b + a \quad a \cdot b = b \cdot a$$

Vale per somma e prodotto. **Non** vale per sottrazione e divisione.

ESEMPIO

$$17 + 43 = 43 + 17 = 60 \quad 8 - 3 \neq 3 - 8$$

2.2 Associativa

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Serve per raggruppare i fattori comodi: si cercano le coppie che fanno 10, 100, 1000.

ESEMPIO

$$25 \cdot 36 = 25 \cdot (4 \cdot 9) = (25 \cdot 4) \cdot 9 = 100 \cdot 9 = 900$$

2.3 Distributiva

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

Si usa al contrario per moltiplicare per numeri vicini a 10, 100, 1000.

ESEMPIO

$$99 \cdot 47 = (100 - 1) \cdot 47 = 4700 - 47 = 4653$$

$$12 \cdot 105 = 12 \cdot (100 + 5) = 1200 + 60 = 1260$$

2.4 Invariantiva

$$a - b = (a + k) - (b + k) \quad a : b = (a \cdot k) : (b \cdot k)$$

Nella sottrazione si somma (o si sottrae) lo stesso numero a entrambi; nella divisione si moltiplica (o si divide) per lo stesso numero, non nullo.

ESEMPIO

$$1003 - 998 = 1005 - 1000 = 5$$

$$1200 : 400 = 12 : 4 = 3$$

3 Potenze

3.1 Definizione e casi particolari

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

$$a^1 = a \quad a^0 = 1 \ (a \neq 0) \quad 1^n = 1 \quad 0^n = 0 \ (n \neq 0)$$

0^0 non ha significato.

ESEMPIO

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \quad 7^0 = 1 \quad 0^4 = 0$$

3.2 Le cinque proprietà

Prodotto, stessa base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Quoziente, stessa base	$a^m : a^n = a^{m-n}$
Potenza di potenza	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Prodotto, stesso esponente	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Quoziente, stesso esponente	$a^n : b^n = (a : b)^n$

Nelle prime tre la base non cambia; nelle ultime due l'esponente non cambia. Per $a^m + a^n$ **non esiste** nessuna regola.

ESEMPIO

$$3^2 \cdot 3^4 = 3^6 \quad 3^5 : 3^2 = 3^3 \quad (3^2)^4 = 3^8$$

$$2^3 \cdot 5^3 = 10^3 = 1000 \quad 2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$$

4 Divisione con resto

4.1 La relazione fondamentale

$$D = d \cdot q + r \quad \text{con} \quad 0 \leq r < d$$

D dividendo, d divisore ($d \neq 0$), q quoziente, r resto. Se $r = 0$ la divisione è esatta e d divide D . La divisione per zero non esiste; $0 : d = 0$ invece va bene.

ESEMPIO

$$247 : 15 \longrightarrow q = 16, r = 7$$

$$\text{verifica: } 15 \cdot 16 + 7 = 247$$

5 Divisibilità

5.1 Criteri di divisibilità

2	ultima cifra pari
3	somma delle cifre divisibile per 3
4	ultime <i>due</i> cifre multiplo di 4
5	ultima cifra 0 o 5
8	ultime <i>tre</i> cifre multiplo di 8
9	somma delle cifre divisibile per 9
10	ultima cifra 0
11	(somma cifre posto dispari) – (somma cifre posto pari) uguale a 0 o multiplo di 11
25	ultime due cifre 00, 25, 50, 75

ESEMPIO

$$432 : 4 + 3 + 2 = 9 \Rightarrow \text{divisibile per 3 e per 9}$$

$$1316 : 16 \text{ multiplo di } 4 \Rightarrow 4 \mid 1316$$

$$4906 : (6 + 9) - (0 + 4) = 11 \Rightarrow 11 \mid 4906$$

5.2 Multipli e divisori

$$a \mid b \iff b : a \text{ è esatta} \iff b \text{ è multiplo di } a$$

I multipli di un numero sono infiniti, i divisori sono finiti. Ogni numero ha almeno i divisori 1 e se stesso.

ESEMPIO

$$3 \mid 12 \text{ perché } 12 : 3 = 4$$

$$\text{divisori di } 12 : 1, 2, 3, 4, 6, 12$$

6 Numeri primi e scomposizione

6.1 Numeri primi

Un naturale maggiore di 1 è **primo** se ha esattamente due divisori (1 e se stesso), **composto** se ne ha più di due.

1 non è primo e non è composto. **2 è primo**, unico primo pari. Per stabilire se n è primo basta provare i primi fino a $\sqrt{n}$.

ESEMPIO

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

91 è primo? $\sqrt{91} \approx 9,5$: provo 2, 3, 5, 7 e trovo $91 = 7 \cdot 13$. Non è primo.

6.2 Teorema fondamentale dell'aritmetica

Ogni naturale maggiore di 1 si scrive in **un solo modo** come prodotto di primi (a meno dell'ordine).

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$$

Si scrive con i fattori in ordine crescente e con le potenze.

ESEMPIO

$$\begin{aligned} 360 &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 & 84 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \\ 1001 &= 7 \cdot 11 \cdot 13 \end{aligned}$$

6.3 Numero dei divisori

Se $n = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$, allora n ha

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$$

divisori. Si aggiunge 1 a ogni esponente, poi si moltiplica.

ESEMPIO

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \Rightarrow (3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24 \text{ divisori}$$

7 MCD e mcm**7.1 MCD e mcm dalla scomposizione**

MCD	primi comuni , con l'esponente minore
mcm	primi comuni e non comuni , con l'esponente maggiore

Se $\text{MCD}(a, b) = 1$ i numeri si dicono **primi fra loro**. Il MCD è minore o uguale al più piccolo dei dati, il mcm è maggiore o uguale al più grande.

ESEMPIO

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\text{MCD} = 2^2 \cdot 3 = 12 \quad \text{mcm} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$$

7.2 La verifica che smaschera gli errori

Per **due** numeri vale sempre

$$\text{MCD}(a, b) \cdot \text{mcm}(a, b) = a \cdot b$$

Attenzione: con tre o più numeri questa relazione **non** vale.

ESEMPIO

$$12 \cdot 2520 = 30\,240 \quad 360 \cdot 84 = 30\,240 \quad \checkmark$$

7.3 Algoritmo di Euclide

Si divide il maggiore per il minore, poi il divisore per il resto, e si continua. **L'ultimo resto non nullo è il MCD.** Serve quando i numeri sono troppo grandi da scomporre.

ESEMPIO

$$1071 = 2 \cdot 462 + 147$$

$$462 = 3 \cdot 147 + 21$$

$$147 = 7 \cdot 21 + 0$$

$$\text{MCD}(1071, 462) = 21$$

Nei problemi: MCD o mcm?

MCD

Si taglia, si sparte, si raggruppa qualcosa che c'è già.

Le quantità date vengono *divise*.

Il risultato è **più piccolo** dei dati.

Piastrelle quadrate più grandi possibile; pacchi tutti uguali col massimo di pezzi; segmenti uguali più lunghi possibile.

mcm

Si aspetta che due cicli si ritrovino, o si cerca una quantità che contenga più gruppi interi.

Le quantità date vengono *ripetute*.

Il risultato è **più grande** dei dati.

Due autobus che ripartono insieme; ingranaggi che tornano al punto di partenza; il più piccolo numero divisibile per...

I tre errori che costano di più

- $8 - 3 + 2 = 7$, non 3. Si va da sinistra.
- $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$, non 4^7 . E $2^3 + 2^4 = 24$, non 2^7 .
- Nei problemi: si sparte $\rightarrow$ MCD, si aspetta $\rightarrow$ mcm. Il MCD è piccolo, il mcm è grande.