

SOLUZIONI: I NUMERI NATURALI

La numerazione è la stessa del file degli esercizi.

Sono svolti i **primi due esercizi di ogni blocco** — così ogni tipologia ha il suo modello — e **tutti quelli di livello ■■■■**. Per gli altri, nel file degli esercizi c'è il risultato: se non torna, il modello della stessa tipologia è qui.

1. Espressioni con le quattro operazioni

Esercizio 1.

→ $12 + 5 \cdot 3 = 12 + 15$ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)

→ $12 + 15 = 27$ (addizioni e sottrazioni, da sinistra a destra)

→ Risultato: **27**

Esercizio 2.

→ $20 - 4 \cdot 3 = 20 - 12$ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)

→ $20 - 12 = 8$ (addizioni e sottrazioni, da sinistra a destra)

→ Risultato: **8**

Esercizio 31.

→ $(15 + 9) : 4 = 24 : 4$ (si calcola la parentesi più interna)

→ $24 : 4 = 6$ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)

→ Risultato: **6**

Esercizio 32.

→ $(30 - 6) \cdot 2 = 24 \cdot 2$ (si calcola la parentesi più interna)

→ $24 \cdot 2 = 48$ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)

→ Risultato: **48**

Esercizio 65.

→ $\{[(12 - 5) \cdot 3 + 4] : 5\} \cdot 2 = \{[7 \cdot 3 + 4] : 5\} \cdot 2$ (si calcola la parentesi più interna)

→ $\{[7 \cdot 3 + 4] : 5\} \cdot 2 = \{25 : 5\} \cdot 2$

$$\rightarrow \{25 : 5\} \cdot 2 = 5 \cdot 2$$

$$\rightarrow 5 \cdot 2 = 10 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{10}$$

Esercizio 66.

$$\rightarrow \{[(24 : 6) + 8] \cdot 3 - 6\} : 6 = \{[4 + 8] \cdot 3 - 6\} : 6 \text{ (si calcola la parentesi pi\`u interna)}$$

$$\rightarrow \{[4 + 8] \cdot 3 - 6\} : 6 = \{12 \cdot 3 - 6\} : 6$$

$$\rightarrow \{12 \cdot 3 - 6\} : 6 = 30 : 6$$

$$\rightarrow 30 : 6 = 5 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{5}$$

Esercizio 80.

$$\rightarrow \{(2 \cdot 3 + 4) \cdot 5 - 10\} : 8 \cdot \{(9 : 3) + 6\} : 9 = \{10 \cdot 5 - 10\} : 8 \cdot \{3 + 6\} : 9 \text{ (si calcola la parentesi pi\`u interna)}$$

$$\rightarrow \{10 \cdot 5 - 10\} : 8 \cdot \{3 + 6\} : 9 = \{40 : 8\} \cdot \{9 : 9\}$$

$$\rightarrow \{40 : 8\} \cdot \{9 : 9\} = 5 \cdot 1$$

$$\rightarrow 5 \cdot 1 = 5 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{5}$$

Esercizio 81.

$$\rightarrow [(11 \cdot 11 - 21) : 10] \cdot \{(64 : 8) + 2\} : 5 = [100 : 10] \cdot \{8 + 2\} : 5 \text{ (si calcola la parentesi pi\`u interna)}$$

$$\rightarrow [100 : 10] \cdot \{8 + 2\} : 5 = 10 \cdot \{10 : 5\}$$

$$\rightarrow 10 \cdot \{10 : 5\} = 10 \cdot 2$$

$$\rightarrow 10 \cdot 2 = 20 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{20}$$

Esercizio 82.

$$\rightarrow \{[(15 \cdot 4) - (7 \cdot 5)] : 5\} \cdot \{(81 : 9) - 4\} = \{[60 - 35] : 5\} \cdot \{9 - 4\} \text{ (si calcola la parentesi pi\`u interna)}$$

$$\rightarrow \{[60 - 35] : 5\} \cdot \{9 - 4\} = \{25 : 5\} \cdot 5$$

$$\rightarrow \{25 : 5\} \cdot 5 = 5 \cdot 5$$

$$\rightarrow 5 \cdot 5 = 25 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

→ Risultato: **25**

Esercizio 83.

$$\rightarrow [(1000 : 8) : 5] \cdot \{[(6 \cdot 7) - 17] : 5\} = [125 : 5] \cdot \{[42 - 17] : 5\} \text{ (si calcola la parentesi più interna)}$$

$$\rightarrow [125 : 5] \cdot \{[42 - 17] : 5\} = 25 \cdot \{25 : 5\}$$

$$\rightarrow 25 \cdot \{25 : 5\} = 25 \cdot 5$$

$$\rightarrow 25 \cdot 5 = 125 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

→ Risultato: **125**

Esercizio 84.

$$\rightarrow \{[(17 \cdot 6) - (13 \cdot 4)] : 10\} \cdot \{[(121 : 11) + 4] : 5\} = \{[102 - 52] : 10\} \cdot \{[11 + 4] : 5\} \text{ (si calcola la parentesi più interna)}$$

$$\rightarrow \{[102 - 52] : 10\} \cdot \{[11 + 4] : 5\} = \{50 : 10\} \cdot \{15 : 5\}$$

$$\rightarrow \{50 : 10\} \cdot \{15 : 5\} = 5 \cdot 3$$

$$\rightarrow 5 \cdot 3 = 15 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

→ Risultato: **15**

2. Calcolo veloce con le proprietà

Esercizio 85.

$$\rightarrow 25 \cdot 4 \cdot 7 = 100 \cdot 7 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow 100 \cdot 7 = 700$$

→ Risultato: **700**

Esercizio 86.

$$\rightarrow 5 \cdot 17 \cdot 2 = 85 \cdot 2 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow 85 \cdot 2 = 170$$

→ Risultato: **170**

Esercizio 107.

$$\rightarrow 25 \cdot 36 + 25 \cdot 4 = 900 + 25 \cdot 4 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow 900 + 25 \cdot 4 = 900 + 100$$

$$\rightarrow 900 + 100 = 1000 \text{ (addizioni e sottrazioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{1\,000}$$

Esercizio 108.

$$\rightarrow 17 \cdot 12 - 17 \cdot 2 = 204 - 17 \cdot 2 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow 204 - 17 \cdot 2 = 204 - 34$$

$$\rightarrow 204 - 34 = 170 \text{ (addizioni e sottrazioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{170}$$

3. Espressioni con le potenze**Esercizio 125.**

$$\rightarrow 3^2 \cdot 3^4 = 3^6 \text{ (stessa base: gli esponenti si sommano)}$$

$$\rightarrow \text{Controllo col valore numerico: } 729.$$

Esercizio 126.

$$\rightarrow 5^3 \cdot 5^2 = 5^5 \text{ (stessa base: gli esponenti si sommano)}$$

$$\rightarrow \text{Controllo col valore numerico: } 3\,125.$$

Esercizio 155.

$$\rightarrow 2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 \text{ (le potenze si eseguono prima di prodotti e somme)}$$

$$\rightarrow 8 \cdot 4 = 32 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{32}$$

Esercizio 156.

$$\rightarrow 3^2 \cdot 3^2 = 9 \cdot 9 \text{ (le potenze si eseguono prima di prodotti e somme)}$$

$$\rightarrow 9 \cdot 9 = 81 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{81}$$

Esercizio 183.

$$\rightarrow [(2^3 + 2^2) \cdot 2] : 6 = [12 \cdot 2] : 6 \text{ (si calcola la parentesi pi\`u interna)}$$

$$\rightarrow [12 \cdot 2] : 6 = 24 : 6$$

$$\rightarrow 24 : 6 = 4 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{4}$$

Esercizio 184.

$$\rightarrow [(3^3 - 3^2) : 6] \cdot 4 = [18 : 6] \cdot 4 \text{ (si calcola la parentesi pi\`u interna)}$$

$$\rightarrow [18 : 6] \cdot 4 = 3 \cdot 4$$

$$\rightarrow 3 \cdot 4 = 12 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{12}$$

Esercizio 199.

$$\rightarrow [(2^{10} : 2^7) \cdot 5^3] : (10^3 : 10) = [8 \cdot 5^3] : 100 \text{ (si calcola la parentesi pi\`u interna)}$$

$$\rightarrow [8 \cdot 5^3] : 100 = 1000 : 100$$

$$\rightarrow 1000 : 100 = 10 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{10}$$

Esercizio 200.

$$\rightarrow \{[(3^5 : 3^2) - 3^3] \cdot 100 + 7^2\} : 7 = \{[27 - 3^3] \cdot 100 + 7^2\} : 7 \text{ (si calcola la parentesi pi\`u interna)}$$

$$\rightarrow \{[27 - 3^3] \cdot 100 + 7^2\} : 7 = \{0 \cdot 100 + 7^2\} : 7$$

$$\rightarrow \{0 \cdot 100 + 7^2\} : 7 = 49 : 7$$

$$\rightarrow 49 : 7 = 7 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{7}$$

Esercizio 201.

$$\rightarrow [(2^4 \cdot 5^4) : 10^3] \cdot \{(6^3 : 6^2) - 1\} = [10000 : 10^3] \cdot \{6 - 1\} \text{ (si calcola la parentesi pi\`u interna)}$$

$$\rightarrow [10000 : 10^3] \cdot \{6 - 1\} = 10 \cdot 5$$

$$\rightarrow 10 \cdot 5 = 50 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{50}$$

Esercizio 202.

$$\rightarrow \{[(12^2 : 4^2) - 3^2] \cdot 11\} : 11 + 2^0 = \{[9 - 3^2] \cdot 11\} : 11 + 2^0 \text{ (si calcola la parentesi pi\`u interna)}$$

$$\rightarrow \{[9 - 3^2] \cdot 11\} : 11 + 2^0 = \{0 \cdot 11\} : 11 + 2^0$$

$$\rightarrow \{0 \cdot 11\} : 11 + 2^0 = 0 : 11 + 2^0$$

$$\rightarrow 0 : 11 + 2^0 = 0 : 11 + 1 \text{ (le potenze si eseguono prima di prodotti e somme)}$$

$$\rightarrow 0 : 11 + 1 = 0 + 1 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow 0 + 1 = 1 \text{ (addizioni e sottrazioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{1}$$

Esercizio 203.

$$\rightarrow [(5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3) : 5^4] = [625 : 5^4] \text{ (si calcola la parentesi pi\`u interna)}$$

$$\rightarrow [625 : 5^4] = 1$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{1}$$

Esercizio 204.

$$\rightarrow \{[(2^8 : 2^5)^2] - (7^2 + 3^2 + 1)\} : 5 = \{[8^2] - 59\} : 5 \text{ (si calcola la parentesi pi\`u interna)}$$

$$\rightarrow \{[8^2] - 59\} : 5 = \{64 - 59\} : 5$$

$$\rightarrow \{64 - 59\} : 5 = 5 : 5$$

$$\rightarrow 5 : 5 = 1 \text{ (prodotti e divisioni, da sinistra a destra)}$$

$$\rightarrow \text{Risultato: } \mathbf{1}$$

4. Divisione con resto

Esercizio 205.

→ Cerco quante volte il 5 sta nel 47: $5 \cdot 9 = 45$. (il prodotto più grande che non supera il dividendo)

→ $q = 9$ e $r = 47 - 45 = 2$.

→ Controllo con $D = d \cdot q + r$: $5 \cdot 9 + 2 = 47$.

→ Il resto è minore del divisore ($2 < 5$): va bene.

Esercizio 206.

→ Cerco quante volte il 7 sta nel 83: $7 \cdot 11 = 77$. (il prodotto più grande che non supera il dividendo)

→ $q = 11$ e $r = 83 - 77 = 6$.

→ Controllo con $D = d \cdot q + r$: $7 \cdot 11 + 6 = 83$.

→ Il resto è minore del divisore ($6 < 7$): va bene.

Esercizio 220.

→ Cerco quante volte il 15 sta nel 247: $15 \cdot 16 = 240$. (il prodotto più grande che non supera il dividendo)

→ $q = 16$ e $r = 247 - 240 = 7$.

→ Controllo con $D = d \cdot q + r$: $15 \cdot 16 + 7 = 247$.

→ Il resto è minore del divisore ($7 < 15$): va bene.

Esercizio 221.

→ Cerco quante volte il 23 sta nel 508: $23 \cdot 22 = 506$. (il prodotto più grande che non supera il dividendo)

→ $q = 22$ e $r = 508 - 506 = 2$.

→ Controllo con $D = d \cdot q + r$: $23 \cdot 22 + 2 = 508$.

→ Il resto è minore del divisore ($2 < 23$): va bene.

Esercizio 232.

→ La relazione da usare è $D = d \cdot q + r$. (sempre quella)

→ $D = 17 \cdot 23 + 5 = 391 + 5 = 396$

→ Controllo che il resto sia minore del divisore: $5 < 17$.

Esercizio 233.

→ La relazione da usare è $D = d \cdot q + r$. (sempre quella)

→ $D = 31 \cdot 14 + 12 = 434 + 12 = \mathbf{446}$

→ Controllo che il resto sia minore del divisore: $12 < 31$.

Esercizio 238.

→ Cerco quante volte il 7 sta nel 1 000 000: $7 \cdot 142\,857 = 999\,999$. (il prodotto più grande che non supera il dividendo)

→ $q = 142\,857$ e $r = 1\,000\,000 - 999\,999 = 1$.

→ Controllo con $D = d \cdot q + r$: $7 \cdot 142\,857 + 1 = \mathbf{1\,000\,000}$.

→ Il resto è minore del divisore ($1 < 7$): va bene.

Esercizio 239.

→ Cerco quante volte il 678 sta nel 12 345: $678 \cdot 18 = 12\,204$. (il prodotto più grande che non supera il dividendo)

→ $q = 18$ e $r = 12\,345 - 12\,204 = 141$.

→ Controllo con $D = d \cdot q + r$: $678 \cdot 18 + 141 = \mathbf{12\,345}$.

→ Il resto è minore del divisore ($141 < 678$): va bene.

Esercizio 240.

→ Se il resto diviso 7 è 5, il numero si scrive $n = 7k + 5$. (tutti i numeri con quel resto)

→ Se k è pari, $k = 2h$: allora $n = 14h + 5$, e il resto diviso 14 è 5.

→ Se k è dispari, $k = 2h + 1$: allora $n = 14h + 12$, e il resto è 12.

→ Risposta: **5** oppure **12**, non c'è un solo caso. (dividere per un multiplo non determina il resto)

Esercizio 241.

→ Diviso 4 dà resto 3: manca 1 per arrivare a un multiplo di 4.

→ Diviso 5 dà resto 4: manca 1 per arrivare a un multiplo di 5.

→ Allora $n + 1$ è multiplo sia di 4 sia di 5, cioè di $\text{mcm}(4, 5) = 20$. (il trucco: si guarda quanto manca, non quanto avanza)

→ Il più piccolo caso è $n + 1 = 20$, quindi $n = 19$.

→ Controllo: $19 : 4$ dà resto 3, $19 : 5$ dà resto 4.

Esercizio 242.

→ Perché se fosse $r = d$, il divisore ci starebbe ancora una volta.

→ Esempio: $12 : 4$ non si scrive « $q = 2, r = 4$ », anche se $4 \cdot 2 + 4 = 12$. (quella scrittura non sbaglia i conti, sbaglia come divisione)

→ La condizione $0 \leq r < d$ serve proprio a rendere unica la coppia (q, r) . (senza di lei ci sarebbero infinite scritture)

5. Criteri di divisibilità

Esercizio 243.

→ Criterio del 4: guardo le ultime due cifre.

→ Le ultime 2 cifre formano 46, che non è multiplo di 4.

→ Risposta: **no**.

Esercizio 244.

→ Criterio del 5: guardo l'ultima cifra.

→ L'ultima cifra è 5.

→ Risposta: **sì**.

Esercizio 263.

→ Il numero è $\overline{3\square4}$ e serve il criterio del 9.

→ Provo le cifre da 0 a 9 e tengo quelle che funzionano. (sono solo dieci prove)

→ Vanno bene: 2.

→ Controllo su una: 324 diviso 9 è esatto (36).

Esercizio 264.

- Il numero è $\overline{1\square2}$ e serve il criterio del 3.
 - Provo le cifre da 0 a 9 e tengo quelle che funzionano. (sono solo dieci prove)
 - Vanno bene: 0, 3, 6, 9.
 - Controllo su una: $102 \div 3$ è esatto (34).
-

Esercizio 281.

- Somma delle cifre: $3 + 9 + 6 + 0 = 18$.
 - Ultima cifra 0, ultime due 60, ultime tre 960.
 - Passando i criteri uno per uno: 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11.
 - Controllo su uno: $3960 : 11 = 360$.
-

Esercizio 282.

- Somma delle cifre: $5 + 5 + 4 + 4 = 18$.
 - Ultima cifra 4, ultime due 44, ultime tre 544.
 - Passando i criteri uno per uno: 2, 3, 4, 8, 9, 11.
 - Controllo su uno: $5544 : 11 = 504$.
-

Esercizio 289.

- Somma delle cifre: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.
 - Ultima cifra 6, ultime due 56, ultime tre 456.
 - Passando i criteri uno per uno: 2, 3, 4, 8.
 - Controllo su uno: $123456 : 8 = 15432$.
-

Esercizio 290.

- Somma delle cifre: $1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 = 2$.
- Ultima cifra 1, ultime due 01, ultime tre 001.
- Nessuno dei criteri funziona: la risposta è **nessuno**.

→ Non significa che sia primo. $1\,000\,001 = 101 \cdot 9901$: i suoi fattori sono più grandi di quelli che i criteri sanno riconoscere. (i criteri elementari non bastano sempre)

Esercizio 291.

→ Somma delle cifre: $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 39$.

→ Ultima cifra 4, ultime due 54, ultime tre 654.

→ Passando i criteri uno per uno: 2, 3.

→ Controllo su uno: $987\,654 : 3 = 329\,218$.

Esercizio 292.

→ Somma delle cifre: $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$.

→ Ultima cifra 1, ultime due 11, ultime tre 111.

→ Passando i criteri uno per uno: 3, 11.

→ Controllo su uno: $111\,111 : 11 = 10\,101$.

6. Numeri primi e scomposizione**Esercizio 293.**

→ Divido per i primi in ordine, finché arrivo a 1.

→ $24 : 2 = 12$, $12 : 2 = 6$, $6 : 2 = 3$, $3 : 3 = 1$

→ Raccolgo con le potenze: $24 = 2^3 \cdot 3$

→ Controllo: il prodotto $2^3 \cdot 3$ rifa' 24.

Esercizio 294.

→ Divido per i primi in ordine, finché arrivo a 1.

→ $36 : 2 = 18$, $18 : 2 = 9$, $9 : 3 = 3$, $3 : 3 = 1$

→ Raccolgo con le potenze: $36 = 2^2 \cdot 3^2$

→ Controllo: il prodotto $2^2 \cdot 3^2$ rifa' 36.

Esercizio 313.

- Divido per i primi in ordine, finché arrivo a 1.
- $360 : 2 = 180, 180 : 2 = 90, 90 : 2 = 45, 45 : 3 = 15, 15 : 3 = 5, 5 : 5 = 1$
- Raccolgo con le potenze: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$
- Controllo: il prodotto $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ rifa' 360.
-

Esercizio 314.

- Divido per i primi in ordine, finché arrivo a 1.
- $420 : 2 = 210, 210 : 2 = 105, 105 : 3 = 35, 35 : 5 = 7, 7 : 7 = 1$
- Raccolgo con le potenze: $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
- Controllo: il prodotto $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ rifa' 420.
-

Esercizio 331.

- Prima la scomposizione: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.
- Si aggiunge 1 a ogni esponente e si moltiplica: $(3 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.
- Ogni primo può comparire in un divisore con esponente da 0 all'esponente massimo: da qui il +1.
(e' il motivo della formula)
-

Esercizio 332.

- Prima la scomposizione: $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.
- Si aggiunge 1 a ogni esponente e si moltiplica: $(4 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.
- Ogni primo può comparire in un divisore con esponente da 0 all'esponente massimo: da qui il +1.
(e' il motivo della formula)
-

Esercizio 339.

- $\sqrt{91} \approx 9.5$, quindi provo i primi fino a 9.
- Il primo che funziona e' 7: $91 : 7 = 13$.
- Quindi 91 e' **composto**: $91 = 7 \cdot 13$.
-

Esercizio 340.

→ $\sqrt{187} \approx 13.7$, quindi provo i primi fino a 13.

→ Il primo che funziona è 11: $187 : 11 = 17$.

→ Quindi 187 è **composto**: $187 = 11 \cdot 17$.

Esercizio 341.

→ $\sqrt{221} \approx 14.9$, quindi provo i primi fino a 14.

→ Il primo che funziona è 13: $221 : 13 = 17$.

→ Quindi 221 è **composto**: $221 = 13 \cdot 17$.

Esercizio 342.

→ $\sqrt{397} \approx 19.9$, quindi basta provare i primi fino a 19.

→ Provo 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19: nessuno divide 397.

→ Quindi 397 è **primo**.

7. MCD e mcm**Esercizio 343.**

→ Le due scomposizioni: $12 = 2^2 \cdot 3$ e $18 = 2 \cdot 3^2$.

→ MCD: primi comuni con l'esponente minore. $2 \cdot 3 = 6$.

→ mcm: tutti i primi con l'esponente maggiore. $2^2 \cdot 3^2 = 36$.

→ Controllo: $6 \cdot 36 = 216$ e $12 \cdot 18 = 216$. (vale solo per due numeri)

Esercizio 344.

→ Le due scomposizioni: $20 = 2^2 \cdot 5$ e $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

→ MCD: primi comuni con l'esponente minore. $2 \cdot 5 = 10$.

→ mcm: tutti i primi con l'esponente maggiore. $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

→ Controllo: $10 \cdot 60 = 600$ e $20 \cdot 30 = 600$. (vale solo per due numeri)

Esercizio 361.

- Le due scomposizioni: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ e $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$.
- MCD: primi comuni con l'esponente minore. $2^2 \cdot 3 = \mathbf{12}$.
- mcm: tutti i primi con l'esponente maggiore. $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = \mathbf{2\,520}$.
- Controllo: $12 \cdot 2\,520 = 30\,240$ e $360 \cdot 84 = 30\,240$. (vale solo per due numeri)
-

Esercizio 362.

- Le due scomposizioni: $144 = 2^4 \cdot 3^2$ e $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$.
- MCD: primi comuni con l'esponente minore. $2^4 \cdot 3 = \mathbf{48}$.
- mcm: tutti i primi con l'esponente maggiore. $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = \mathbf{720}$.
- Controllo: $48 \cdot 720 = 34\,560$ e $144 \cdot 240 = 34\,560$. (vale solo per due numeri)
-

Esercizio 379.

- Le due scomposizioni: $1\,071 = 3^2 \cdot 7 \cdot 17$ e $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$.
- MCD: primi comuni con l'esponente minore. $3 \cdot 7 = \mathbf{21}$.
- Con Euclide si arriva allo stesso 21 senza scomporre.
-

Esercizio 380.

- Le due scomposizioni: $2\,244 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17$ e $1\,122 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17$.
- MCD: primi comuni con l'esponente minore. $2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17 = \mathbf{1\,122}$.
- Con Euclide si arriva allo stesso 1 122 senza scomporre.
-

Esercizio 389.

- Le due scomposizioni: $1\,024 = 2^{10}$ e $243 = 3^5$.
- Non hanno primi in comune: sono primi fra loro, MCD = **1**.
- mcm: tutti i primi con l'esponente maggiore. $2^{10} \cdot 3^5 = \mathbf{248\,832}$.
- Controllo: $1 \cdot 248\,832 = 248\,832$ e $1\,024 \cdot 243 = 248\,832$. (vale solo per due numeri)
-

Esercizio 390.

- Le due scomposizioni: $1\,234 = 2 \cdot 617$ e $4\,321 = 29 \cdot 149$.
- Non hanno primi in comune: sono primi fra loro, $\text{MCD} = 1$.
- mcm: tutti i primi con l'esponente maggiore. $2 \cdot 29 \cdot 149 \cdot 617 = 5\,332\,114$.
- Controllo: $1 \cdot 5\,332\,114 = 5\,332\,114$ e $1\,234 \cdot 4\,321 = 5\,332\,114$. (vale solo per due numeri)
-

Esercizio 391.

- Le due scomposizioni: $999\,999 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ e $123\,456 = 2^6 \cdot 3 \cdot 643$.
- MCD: primi comuni con l'esponente minore. $3 = 3$.
- mcm: tutti i primi con l'esponente maggiore. $2^6 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 643 = 41\,151\,958\,848$.
- Controllo: $3 \cdot 41\,151\,958\,848 = 123\,455\,876\,544$ e $999\,999 \cdot 123\,456 = 123\,455\,876\,544$. (vale solo per due numeri)
-

Esercizio 392.

- Le due scomposizioni: $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ e $1\,024 = 2^{10}$.
- MCD: primi comuni con l'esponente minore. $2^4 = 16$.
- mcm: tutti i primi con l'esponente maggiore. $2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 = 46\,080$.
- Controllo: $16 \cdot 46\,080 = 737\,280$ e $720 \cdot 1\,024 = 737\,280$. (vale solo per due numeri)
-

8. Problemi: spartire o ritrovarsi**Esercizio 393.**

- Il lato deve stare un numero intero di volte nel 240 e nel 180: è un divisore comune.
- Lo voglio il più grande possibile, quindi serve il **MCD**. (si sta spartendo una quantità che c'è già)
- $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ e $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.
- MCD: primi comuni con l'esponente minore, $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ cm.
- Controllo: $240 : 60 = 4$ e $180 : 60 = 3$, entrambe esatte.
-

Esercizio 394.

- Lungo un lato ci stanno $240 : 60 = 4$ piastrelle.

→ Lungo l'altro $180 : 60 = 3$.

→ In tutto $4 \cdot 3 = 12$ piastrelle. (è un rettangolo di piastrelle, quindi si moltiplica)

Esercizio 407.

→ Il quadrato ha lato 90 cm: era il mcm di 30 e 45.

→ In orizzontale ci stanno $90 : 30 = 3$ mattonelle, in verticale $90 : 45 = 2$.

→ In tutto $3 \cdot 2 = 6$ mattonelle.

→ Controllo con le aree: $90 \cdot 90 = 8100$ e $30 \cdot 45 = 1350$; $8100 : 1350 = 6$. (due strade allo stesso numero)

Esercizio 408.

→ I pezzi devono stare interi in tutte tre le corde: serve il MCD dei tre numeri. (si taglia, quindi MCD)

→ $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$.

→ Primi comuni con l'esponente minore: $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ cm.

→ Quanti pezzi: $120 : 60 + 180 : 60 + 300 : 60 = 2 + 3 + 5 = 10$.

Esercizio 423.

→ Per due numeri vale sempre $\text{MCD} \cdot \text{mcm} = a \cdot b$. (la relazione da ricordare)

→ Quindi $a \cdot b = 15 \cdot 1260 = 18900$.

→ Uno dei due è 180, allora l'altro è $18900 : 180 = 105$.

→ Controllo: $\text{MCD}(180, 105) = 15$ e $\text{mcm}(180, 105) = 1260$.

Esercizio 424.

→ Il prodotto dei due numeri è $6 \cdot 36 = 216$, e ognuno è multiplo di 6.

→ Scrivo $a = 6h$ e $b = 6k$ con h e k primi fra loro: allora $36hk = 216$, cioè $hk = 6$. (il MCD si porta fuori)

→ Le coppie (h, k) primi fra loro con prodotto 6 sono $(1, 6)$ e $(2, 3)$.

→ Quindi le coppie cercate sono $(6, 36)$ e $(12, 18)$: sono 2.

→ $(18, 12)$ è la stessa coppia scambiata, non se ne conta un'altra.

Esercizio 425.

- Diviso 6 resto 4: mancano 2 al multiplo di 6 successivo.
 - Diviso 9 resto 7: mancano 2 al multiplo di 9 successivo.
 - Allora $n + 2$ è multiplo di 6 e di 9, quindi di $\text{mcm}(6, 9) = 18$. (stesso trucco dell'esercizio 241)
 - Il più piccolo caso è $n + 2 = 18$, quindi $n = 16$.
 - Controllo: $16 : 6$ dà resto 4, $16 : 9$ dà resto 7.
-

Esercizio 426.

- «Primi fra loro» vuol dire $\text{MCD} = 1$: nelle scomposizioni non c'è nessun primo in comune.
 - Il mcm prende tutti i primi, comuni e non comuni, con l'esponente maggiore.
 - Non essendocene di comuni, li prende tutti come sono: il mcm è il prodotto di tutte le potenze, cioè $a \cdot b$.
 - Verifica con la relazione: $1 \cdot \text{mcm} = a \cdot b$.
-

Esercizio 427.

- **Falso.** La relazione $\text{MCD} \cdot \text{mcm} = a \cdot b$ vale *solo per due numeri*. (è la trappola dell'esercizio)
 - Controesempio: 4, 4 e 120 hanno MCD 4 e prodotto 1 920, ma il mcm è 120, non 480.
 - Con tre numeri servono le scomposizioni: non c'è scorciatoia.
-

Esercizio 428.

- Il lato deve dividere 180 e 300, e anche 240 e 420.
 - $\text{MCD}(180, 300) = 60$ e $\text{MCD}(240, 420) = 60$.
 - Serve un divisore comune a entrambi i risultati: $\text{MCD}(60, 60) = 60$ cm.
 - In generale si fa il MCD di tutti e quattro i numeri insieme. (il MCD di più numeri si può calcolare a coppie)
-

Esercizio 429.

- Si rivedono insieme dopo un numero di anni multiplo di 76 e di 84: serve il **mcm**. (si aspetta che due cicli si ritrovino)
- $76 = 2^2 \cdot 19$ e $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$.

$$\rightarrow \text{mcm} = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19 = 1\,596 \text{ anni.}$$

$$\rightarrow 1900 + 1596 = \mathbf{3496}.$$

Esercizio 430.

$\rightarrow$ Un numero ha esattamente tre divisori solo se è il quadrato di un primo. (dalla formula serve $a + 1 = 3$, cioè $a = 2$)

$\rightarrow$ Infatti p^2 ha i divisori $1, p$ e p^2 : tre.

$\rightarrow$ I quadrati di primi minori di 100: 4, 9, 25, 49.

$\rightarrow 121 = 11^2$ è già oltre 100, quindi sono **4**.

Esercizio 431.

$\rightarrow$ Se il resto è sempre 1, allora $n - 1$ è divisibile per 2, 3, 4, 5, 6.

$\rightarrow$ Quindi $n - 1$ è multiplo di $\text{mcm}(2, 3, 4, 5, 6) = 60$.

$\rightarrow$ Il primo caso utile è $n - 1 = 60$, cioè $n = \mathbf{61}$. (con $n - 1 = 0$ si otterrebbe $n = 1$, caso degenere)

$\rightarrow$ Controllo: $61 = 60 + 1$, e 60 è divisibile per tutti e cinque.

Esercizio 432.

$\rightarrow$ Tornano a combaciare dopo $\text{mcm}(n, n + 1)$ denti.

$\rightarrow$ Due numeri consecutivi sono sempre primi fra loro: un divisore comune d dovrebbe dividere anche la loro differenza, che è 1. (è il passaggio chiave)

$\rightarrow$ Quindi $\text{MCD}(n, n + 1) = 1$.

$\rightarrow$ Per numeri primi fra loro il mcm è il prodotto: **$n(n + 1)$** denti.

9. Problemi con le quattro operazioni**Esercizio 433.**

$\rightarrow$ 30 bottiglie sono $30 : 6 = 5$ pacchi.

$\rightarrow$ Cinque pacchi costano $5 \cdot 9 = \mathbf{45}$ euro.

$\rightarrow$ Controllo: una bottiglia costa $9 : 6 = 1,50$ euro, e $30 \cdot 1,50 = 45$. (due strade allo stesso numero)

Esercizio 434.

→ Raccolgono $24 \cdot 7 = 168$ euro.

→ La gita costa 150, quindi avanzano $168 - 150 = \mathbf{18}$ euro.

→ Tutto in una riga: $24 \cdot 7 - 150$. (prima il prodotto, poi la sottrazione)

Esercizio 449.

→ Scatole in tutto: $18 \cdot 48 = 864$.

→ Bottiglie in tutto: $864 \cdot 12 = 10\,368$.

→ Togliendo le rotte: $10\,368 - 36 = \mathbf{10\,332}$.

→ Espressione: $18 \cdot 48 \cdot 12 - 36$. (la sottrazione per ultima)

Esercizio 450.

→ Insieme le due pompe tolgono $80 + 70 = 150$ litri al minuto. (le portate si sommano)

→ $4\,500 : 150 = \mathbf{30}$ minuti.

→ Controllo: in 30 minuti la prima toglie 2 400 litri e la seconda 2 100; $2\,400 + 2\,100 = 4\,500$.

Esercizio 463.

→ Spesa: $250 \cdot 2 = 500$ euro.

→ Rose vendute: $250 - 30 = 220$.

→ Incasso: $220 \cdot 5 = 1\,100$ euro.

→ Guadagno: $1\,100 - 500 = \mathbf{600}$ euro. (si sottrae la spesa di tutte le rose, comprese quelle buttate)

Esercizio 464.

→ Ogni squadra gioca contro le altre 7: sembrano $8 \cdot 7 = 56$ partite.

→ Ma così ogni partita è contata due volte, una per ciascuna squadra. (è l'errore tipico)

→ Quindi le partite sono $56 : 2 = \mathbf{28}$.

→ Controllo su un caso piccolo: con 3 squadre la formula dà $3 \cdot 2 : 2 = 3$, e a mano sono proprio 3. (un caso piccolo controlla la formula)

Esercizio 465.

→ Pagine da 1 a 9: una cifra ciascuna, 9 cifre.

→ Da 10 a 99: sono 90 pagine da due cifre, 180 cifre.

→ Da 100 a 150: sono 51 pagine da tre cifre, 153 cifre. ($150 - 100 + 1 = 51$, non 50)

→ In tutto $9 + 180 + 153 = \mathbf{342}$ cifre.

Esercizio 466.

→ Da lunedì a domenica passano 6 giorni, non 7. (si contano gli intervalli, non i nomi dei giorni)

→ Ritardo: $3 \cdot 6 = \mathbf{18}$ minuti.

Esercizio 467.

→ Se fossero tutte da 2 euro: $17 \cdot 2 = 34$ euro.

→ Mancano $61 - 34 = 27$ euro.

→ Ogni moneta da 5 al posto di una da 2 aggiunge 3 euro: $27 : 3 = \mathbf{9}$ monete da 5. (metodo della falsa ipotesi)

→ Controllo: $9 \cdot 5 + 8 \cdot 2 = 45 + 16 = 61$, e le monete sono 17.

Esercizio 468.

→ Il treno percorre la galleria *più* la propria lunghezza. (il muso entra, la coda esce: sono due lunghezze)

→ Spazio totale: $620 + 180 = 800$ m.

→ Tempo: $800 : 20 = \mathbf{40}$ secondi.

Esercizio 469.

→ Accoppio il primo con l'ultimo: $1 + 100 = 101$; poi $2 + 99 = 101$, e così via. (è il trucco di Gauss)

→ Le coppie sono $100 : 2 = 50$.

→ Somma: $50 \cdot 101 = \mathbf{5\,050}$.

→ In generale la somma da 1 a n vale $\frac{n(n+1)}{2}$.

Esercizio 470.

- «Due alla volta e arriva in cima»: il numero dei gradini è pari.
- «Tre alla volta e ne avanza uno»: diviso 3 dà resto 1.
- Numeri pari sotto 20 che diviso 3 danno resto 1: 4, 10, 16.
- Con più di dieci gradini resta solo **16**. (senza quel vincolo le risposte sarebbero tre)
-

Esercizio 471.

- In un minuto il rubinetto mette $\frac{1}{12}$ della vasca, lo scarico ne toglie $\frac{1}{18}$.
- Insieme: $\frac{1}{12} - \frac{1}{18} = \frac{3-2}{36} = \frac{1}{36}$ di vasca al minuto. (denominatore comune 36, che è il mcm)
- Se in un minuto se ne riempie $\frac{1}{36}$, per tutta la vasca servono **36** minuti.
-

Esercizio 472.

- Per rendere grande il prodotto, le cifre grandi vanno nelle decine.
- Quindi 4 e 3 nelle decine, 2 e 1 nelle unità: restano $41 \cdot 32$ e $42 \cdot 31$.
- $41 \cdot 32 = 1\,312$ e $42 \cdot 31 = 1\,302$.
- Il massimo è **1 312** = $41 \cdot 32$. (a parità di decine conviene bilanciare le unità)
-

10. Vero o falso, trova l'errore, a ritroso**Esercizio 473.**

- **Falso**. Addizione e sottrazione hanno la stessa priorità: si va da sinistra.
- $8 - 3 + 2 = 5 + 2 = 7$.
- Chi fa prima $3 + 2$ ottiene 3: è l'errore più comune del capitolo.
-

Esercizio 474.

- **Falso**. Nel prodotto di potenze di uguale base la base *non* cambia.
- $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$.
- Per convincersi: sono sette fattori uguali a 2.
-

Esercizio 481.

- L'errore è aver fatto la somma prima del prodotto.
 - La moltiplicazione ha la priorità: $5 + 3 \cdot 2 = 5 + 6 = 11$.
-

Esercizio 482.

- L'errore è distribuire il quadrato sulla somma: non esiste nessuna regola così.
 - $(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$, mentre $2^2 + 3^2 = 13$: sono diversi.
 - Un controesempio numerico basta a smontare una regola inventata.
-

Esercizio 491.

- **Falso.** Il MCD divide entrambi i numeri, quindi divide anche il mcm.
 - Qui 8 non divide 12: due numeri così non esistono.
 - Regola pratica da ricordare: il MCD divide sempre il mcm.
-

Esercizio 492.

- **Vero.** Fra tre numeri consecutivi c'è sempre almeno un multiplo di 2.
 - E c'è sempre esattamente un multiplo di 3. (i multipli di 3 si incontrano ogni tre numeri)
 - Il prodotto contiene allora un fattore 2 e un fattore 3: è divisibile per 6.
 - Esempio: $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 = 6 \cdot 20$.
-

Esercizio 493.

- **Vero.** Se $a \mid b$ allora $b = ah$; se $b \mid c$ allora $c = bk$.
 - Sostituendo: $c = ahk$, quindi $a \mid c$.
 - Esempio: $3 \mid 12$ e $12 \mid 60$, e infatti $3 \mid 60$.
-

Esercizio 494.

- L'errore è essersi fermati troppo presto.
- Vanno provati i primi fino a $\sqrt{91} \approx 9,5$: quindi anche il 7.

→ $91 : 7 = 13$, quindi $91 = 7 \cdot 13$: è composto.

Esercizio 495.

→ L'errore è aver diviso gli esponenti invece di sottrarli.

→ $2^{10} : 2^5 = 2^{10-5} = 2^5 = 32$.

→ Controllo: $1024 : 32 = 32$.

Esercizio 496.

→ L'errore è applicare la regola fuori dal suo campo.

→ $a^0 = 1$ vale per ogni $a \neq 0$: la condizione fa parte della regola.

→ 0^0 non è definito: non vale né 0 né 1. (le condizioni accanto a una formula non sono decorazioni)

Esercizio 497.

→ Il numero dei divisori è il prodotto degli esponenti aumentati di 1.

→ Per averne 6: un solo primo con esponente 5 (p^5), oppure due primi con esponenti 2 e 1 (p^2q), perché $6 = 6$ e $6 = 3 \cdot 2$.

→ Il più piccolo del primo tipo è $2^5 = 32$; del secondo $2^2 \cdot 3 = 12$.

→ Il più piccolo in assoluto è **12**.

→ Controllo: i divisori di 12 sono 1, 2, 3, 4, 6, 12: sei.

Esercizio 498.

→ Se il MCD è 10, entrambi sono multipli di 10: $a = 10h$, $b = 10k$ con h, k primi fra loro.

→ Dalla somma: $10h + 10k = 50$, quindi $h + k = 5$.

→ Coppie con somma 5 e primi fra loro: (1, 4) e (2, 3).

→ Quindi **(10, 40)** oppure **(20, 30)**.

→ Controllo: $\text{MCD}(10, 40) = 10$ e $\text{MCD}(20, 30) = 10$.

Esercizio 499.

-
- Un numero pari si scrive come $2h$, con h naturale. (è la definizione di pari)
 - Due numeri pari: $2h$ e $2k$.
 - La loro somma è $2h + 2k = 2(h + k)$. (distributiva al contrario)
 - È il doppio di un naturale, quindi è pari.
 - Lo stesso ragionamento con $2h + 1$ e $2k + 1$ mostra che la somma di due dispari è pari. (vale la pena provarlo)
-

Esercizio 500.

- Un numero di quattro cifre uguali si scrive $\overline{cccc} = c \cdot 1111$.
 - E $1111 = 11 \cdot 101$.
 - Quindi $\overline{cccc} = c \cdot 11 \cdot 101$: è divisibile per 11 e per 101 qualunque sia c .
 - Esempio: $7777 = 7 \cdot 11 \cdot 101$. Risposta: **sì**.
-