

FORMULARIO: I NUMERI INTERI

In ogni riquadro: la regola con le sue condizioni e un esempio con i numeri.

1 L'insieme e i suoi numeri

1.1 L'insieme $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots \}$$

Ogni intero ha un segno e un valore assoluto. Il $+$ si può omettere. Lo **zero non ha segno**: non è né positivo né negativo, e $-0 = 0$.

ESEMPIO

$$+7 = 7 \quad -0 = 0 \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

1.2 Ordinamento

È maggiore il numero che sta **più a destra** sulla retta. Fra due negativi è maggiore quello col valore assoluto **minore**.

ESEMPIO

$$-2 > -5 \quad 0 > -1 \quad +1 > -100$$

Il termometro non sbaglia: -2 gradi è meno freddo di -5 .

1.3 Opposto e valore assoluto

L'**opposto** di a è $-a$: stesso valore assoluto, segno contrario. La somma di due opposti è zero.

Il **valore assoluto** $|a|$ è la distanza dallo zero: non è mai negativo. Le barre funzionano come una parentesi: prima si calcola dentro.

ESEMPIO

$$\begin{aligned} -(-7) &= +7 & |-7| &= 7 & |+7| &= 7 \\ |3-8| &= |-5| = 5 & \text{ma} & & |3|-|8| &= -5 \end{aligned}$$

2 Somma algebrica

2.1 Sottrarre è aggiungere l'opposto

$$a - b = a + (-b)$$

Addizione e sottrazione diventano un'unica operazione: la **somma algebrica**. Si può quindi riordinare e raggruppare liberamente.

ESEMPIO

$$8 - (-3) = 8 + 3 = 11 \quad 5 - 9 = 5 + (-9) = -4$$

2.2 Somma di due interi

Segni concordi

Si sommano i valori assoluti, si tiene il segno comune.

Segni discordi

Si sottrae il valore assoluto minore dal maggiore, si tiene il segno di quello *maggiore*.

ESEMPIO

$$(-3) + (-5) = -8$$

$$(-8) + (+3) = -5$$

$$(+3) + (+5) = +8$$

$$(+8) + (-3) = +5$$

2.3 Somme lunghe: si raggruppa

Si sommano fra loro tutti i positivi, poi tutti i negativi, poi si fa la differenza tenendo il segno del totale maggiore in valore assoluto.

ESEMPIO

$$-7 + 12 - 5 - 3 + 9$$

$$\text{positivi } 12 + 9 = 21 \quad \text{negativi } -7 - 5 - 3 = -15$$

$$21 - 15 = +6$$

3 Parentesi

3.1 Togliere le parentesi

$$a + (b - c) = a + b - c$$

$$a - (b - c) = a - b + c$$

Col $+$ davanti i segni restano; col $-$ davanti si invertono **tutti** i segni interni, non solo il primo.

ESEMPIO

$$10 + (4 - 7 + 2) = 10 + 4 - 7 + 2 = 9$$

$$5 - (3 - 8 + 2) = 5 - 3 + 8 - 2 = 8$$

4 Prodotto e quoziente

4.1 La regola dei segni

primo	secondo	risultato	esempio
+	+	+	$(+3) \cdot (+4) = +12$
+	-	-	$(+3) \cdot (-4) = -12$
-	+	-	$(-3) \cdot (+4) = -12$
-	-	+	$(-3) \cdot (-4) = +12$

Segni uguali danno $+$, segni diversi danno $-$. Identica per la divisione.

ESEMPIO

$$(-36) : (-4) = +9 \quad (+36) : (-4) = -9$$

4.2 Più fattori: si contano i segni

Numero **pari** di fattori negativi $\rightarrow$ prodotto positivo. Numero **dispari** $\rightarrow$ prodotto negativo. Se un fattore è zero, il prodotto è zero.

ESEMPIO

$$(-2) \cdot (+3) \cdot (-1) \cdot (-5) = -30$$

tre fattori negativi: dispari, quindi negativo; $2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 = 30$.

5 Potenze

5.1 Il segno di una potenza

Base positiva: risultato positivo. Base **negativa**: esponente **pari** → positivo; esponente **dispari** → negativo.

ESEMPIO

$$\begin{aligned} (-2)^4 &= +16 & (-2)^3 &= -8 \\ (-1)^n &= +1 \text{ se } n \text{ pari,} & (-1)^n &= -1 \text{ se } n \text{ dispari} \end{aligned}$$

5.2 $-a^n$ non è $(-a)^n$

Senza parentesi il meno **non fa parte della base**: la potenza si esegue prima, il meno dopo.

$$-a^n = -(a^n)$$

ESEMPIO

$$\begin{aligned} (-2)^4 &= +16 & -2^4 &= -(2^4) = -16 \\ (-2)^3 &= -8 & -2^3 &= -8 \quad (\text{qui coincidono: non fidarsi}) \end{aligned}$$

5.3 Le proprietà valgono ancora

Le cinque proprietà delle potenze funzionano identiche in $\mathbb{Z}$, purché la base sia la stessa *parentesi compresa*.

ESEMPIO

$$\begin{aligned} (-2)^3 \cdot (-2)^2 &= (-2)^5 = -32 \\ (-2)^3 \cdot 2^2 &\text{ non si semplifica: le basi sono } -2 \text{ e } 2. \end{aligned}$$

6 Espressioni e problemi

6.1 Ordine delle operazioni

Lo stesso dei naturali: parentesi (dalla più interna), potenze, prodotti e divisioni da sinistra a destra, somme algebriche. Il segno di ogni risultato si decide **prima** di scriverlo.

ESEMPIO

$$\{ [(-3) \cdot 4 + 20] : (-2) \}^2 - 5$$

$$= \{[-12 + 20] : (-2)\}^2 - 5 = (-4)^2 - 5 = 16 - 5 = 11$$

6.2 Differenze fra due quote

La differenza è sempre **arrivo meno partenza**, e i negativi vanno fra parentesi.

$$\Delta = a_{\text{fine}} - a_{\text{inizio}}$$

ESEMPIO

Da -8 gradi a $+5$ gradi:

$$(+5) - (-8) = 5 + 8 = 13 \text{ gradi}$$

Non $8 - 5 = 3$: i due numeri stanno da parti opposte dello zero.

6.3 Controllare il segno prima del valore

Nelle espressioni lunghe il segno si sbaglia più spesso del conto. Conviene deciderlo *prima*, guardando solo i segni:

- quanti fattori negativi ci sono nel prodotto? pari $\rightarrow +$, dispari $\rightarrow -$;
- la potenza ha base negativa? esponente pari $\rightarrow +$, dispari $\rightarrow -$;
- nella somma, chi ha il valore assoluto maggiore decide il segno.

ESEMPIO

In $(-2)^3 \cdot (-5)$ il segno si sa subito: base negativa con esponente dispari dà negativo, e negativo per negativo dà positivo. Il risultato è positivo, e vale $8 \cdot 5 = 40$.

6.4 Quali operazioni si possono sempre fare

In $\mathbb{Z}$ addizione, sottrazione e moltiplicazione si possono **sempre** fare: il risultato è ancora un intero. La divisione no.

ESEMPIO

$$3 - 8 = -5 \in \mathbb{Z} \quad (-2) \cdot 7 = -14 \in \mathbb{Z}$$

$$7 : 2 \notin \mathbb{Z} \quad (\text{serviranno i razionali})$$

Come si traduce un problema

positivo

sopra il livello del mare, salire
 versamento, guadagno, credito
 sopra lo zero termico
 dopo Cristo, anni futuri
 piani sopra il terra

negativo

sotto il livello del mare, scendere
 prelievo, spesa, debito
 sotto lo zero termico
 prima di Cristo, anni passati
 piani interrati

Prima si decide *dove sta lo zero*, poi si scrive la somma algebrica. Nel calendario storico l'anno zero non esiste: fra il -63 e il $+14$ sono passati 76 anni, non 77.

I quattro errori che costano di più

- $-5 < -2$: fra i negativi l'ordine si ribalta.
- $5 - (3 - 8 + 2) = 5 - 3 + 8 - 2$: il meno cambia *tutti* i segni.
- $(-2)^4 = +16$ ma $-2^4 = -16$.
- $(-3) + (-4) = -7$: la regola dei segni non riguarda le somme.