

I NUMERI INTERI

ARITMETICA

La regola dei segni, le somme algebriche,
le potenze con base negativa



Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima di partire	3
2	Perché i naturali non bastano	3
3	Ordinamento, opposto, valore assoluto	4
4	La somma algebrica	5
5	Togliere le parentesi	6
6	Prodotto e quoziente: la regola dei segni	7
7	Le potenze di un intero	9
8	Espressioni in $\mathbb{Z}$	10
9	Gli interi nella realtà	11

1 Cosa serve prima di partire

Questo capitolo continua i numeri naturali. Serve saper fare tre cose, e se qualcuna è incerta si ripassa qui, adesso: tutto il resto le usa a ogni riga.

Cosa devi già sapere

- **Le quattro operazioni e il loro ordine.** Prima le parentesi, poi le potenze, poi prodotti e divisioni da sinistra a destra, infine somme e sottrazioni da sinistra a destra. Quindi $2 + 3 \cdot 4 = 14$, e $8 - 3 + 2 = 7$.
- **Le potenze.** a^n è il prodotto di n fattori uguali ad a ; $a^0 = 1$ per $a \neq 0$. Le proprietà usate qui sono $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ e $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
- **La divisione esatta.** $12 : 4 = 3$ perché $4 \cdot 3 = 12$. In questo capitolo si fanno solo divisioni esatte: le altre arriveranno con le frazioni.

2 Perché i naturali non bastano

In $\mathbb{N}$ la sottrazione a volte non si può fare: $3 - 8$ non ha risposta. Non è un dettaglio da matematici, è un problema pratico. Il termometro scende sotto lo zero, un conto in banca va in rosso, un sottomarino sta sotto il livello del mare, Archimede è nato prima di Cristo. Tutte situazioni in cui serve un numero che dica **quanto** e **da quale parte**.

Formula 2.1: L'insieme dei numeri interi:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots \}$$

Ogni intero ha un **segno** e un **valore assoluto**. Il segno $+$ si può omettere: $+5$ si scrive anche 5.

Lo **zero non ha segno**: non è né positivo né negativo, e $-0 = 0$.

In $\mathbb{Z}$ la sottrazione si può *sempre* fare: è il motivo per cui questo insieme è stato costruito. La divisione, invece, ancora no ($7 : 2$ non è un intero): per quella serviranno i razionali.

Il conto in banca e i numeri col segno

Sull'estratto conto i prelievi hanno il segno meno e i versamenti il più. Il saldo è la somma algebrica di tutto. Se il saldo è -250 , non significa «meno di zero euro nel portafoglio»: significa un debito di 250. Il segno dice *da quale parte dello zero* si sta, il valore assoluto dice *quanto lontano*.

3 Ordinamento, opposto, valore assoluto

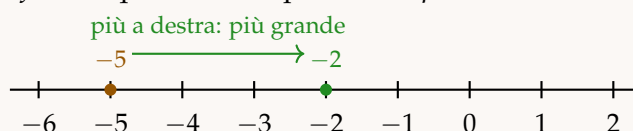
Formula 3.1: Come si confrontano due interi: Sulla retta orientata, è **più grande** il numero che sta **più a destra**.

- Ogni positivo è maggiore di ogni negativo, e maggiore di zero.
- Fra due negativi è maggiore quello col valore assoluto **minore**: $-2 > -5$.

Fra i negativi l'ordine si ribalta

$5 > 2$, ma $-5 < -2$.

Non è un capriccio: è quello che dice il termometro. Se stanotte ci sono -5 gradi e domani -2 , domani fa *meno freddo*, quindi la temperatura è *più alta*.



Formula 3.2: Opposto e valore assoluto: L'**opposto** di un intero a è il numero $-a$, che ha lo stesso valore assoluto e il segno contrario. La somma di due opposti è zero.

$$-(+7) = -7 \quad -(-7) = +7 \quad -0 = 0$$

Il **valore assoluto** di a , scritto $|a|$, è la sua distanza dallo zero: si ottiene togliendo il segno.

$$|+7| = 7 \quad |-7| = 7 \quad |0| = 0$$

Il valore assoluto **non è mai negativo**.

Esempio Svolto 3.1: Opposto e valore assoluto non sono la stessa cosa:

1. Un negativo. Sia $a = -4$.

$$\text{opposto: } -a = +4 \quad \text{valore assoluto: } |a| = 4$$

Qui coincidono, e nasce la confusione.

2. Un positivo. Sia $a = +4$.

$$\text{opposto: } -a = -4 \quad \text{valore assoluto: } |a| = +4$$

Adesso sono diversi: l'opposto cambia sempre il segno, il valore assoluto lo *toglie* sempre.

3. Il doppio segno.

$$-(-9) = +9$$

L'opposto dell'opposto è il numero di partenza: due «meno» si annullano.

$|a|$ **non è «a senza il trattino»**

Il valore assoluto si calcola *dopo* avere fatto i conti dentro le barre, non prima.

$$|3 - 8| = |-5| = 5 \quad \text{ma} \quad |3| - |8| = 3 - 8 = -5$$

Sono due cose diverse. Le barre del valore assoluto funzionano come una parentesi: prima si calcola dentro.

4 La somma algebrica

In $\mathbb{Z}$ addizione e sottrazione diventano un'unica operazione, la **somma algebrica**: sottrarre un numero è come aggiungere il suo opposto.

$$a - b = a + (-b)$$

Formula 4.1: Somma di due interi:

- **Segni concordi** (entrambi positivi o entrambi negativi): si sommano i valori assoluti e si tiene il segno comune.

$$(+3) + (+5) = +8 \qquad (-3) + (-5) = -8$$

- **Segni discordi**: si sottrae il valore assoluto minore dal maggiore e si tiene il segno di quello col valore assoluto **maggiore**.

$$(-8) + (+3) = -5 \qquad (+8) + (-3) = +5$$

Chi vince il segno è il più «forte» in valore assoluto.

Metodo 4.1: Somme algebriche lunghe: si raggruppa: Con cinque o sei termini, farli a coppie da sinistra è lento e si sbaglia.

1. Sommo fra loro **tutti i positivi**.
2. Sommo fra loro **tutti i negativi**.
3. Faccio la differenza fra i due totali e tengo il segno del più grande in valore assoluto.

Funziona perché la somma algebrica è commutativa e associativa: si può riordinare come si vuole.

Esempio Svolto 4.1: Una somma algebrica lunga, nei due modi:

Calcoliamo $-7 + 12 - 5 - 3 + 9$.

1. **Da sinistra a destra**, un passo alla volta:

$$-7 + 12 = +5 \rightarrow 5 - 5 = 0 \rightarrow 0 - 3 = -3 \rightarrow -3 + 9 = +6$$

2. **Raggruppando**, che è più veloce e più sicuro:

$$\text{positivi: } 12 + 9 = 21 \quad \text{negativi: } -7 - 5 - 3 = -15$$

$$21 - 15 = +6$$

3. **Controllo.** I due modi danno lo stesso numero: se non fosse così, c'è un errore in uno dei due, e conviene rifare il secondo.

La regola dei segni non vale per le somme

La regola «meno per meno fa più» riguarda *prodotti e quozienti*. Nelle somme non c'entra niente:

$$(-3) + (-4) = -7 \quad \text{non} \quad +7$$

Due debiti fanno un debito più grande. Se ci si confonde, si torni al termometro: scendo di 3 gradi e poi di altri 4, sono scesi 7.

5 Togliere le parentesi

Questa sezione è breve e vale metà del capitolo: è il passaggio in cui si perdono più punti nelle verifiche.

Formula 5.1: Le due regole:

- Parentesi preceduta dal segno $+$: si toglie e **tutti i segni restano** come sono.

$$a + (b - c) = a + b - c$$

- Parentesi preceduta dal segno $-$: si toglie e **tutti i segni dentro si invertono**.

$$a - (b - c) = a - b + c$$

Il motivo della seconda: $-(b - c)$ è l'opposto di $(b - c)$, e l'opposto di una differenza è la differenza scambiata.

Esempio Svolto 5.1: I due casi in fila:**1. Parentesi col più.**

$$10 + (4 - 7 + 2) = 10 + 4 - 7 + 2 = 9$$

2. Parentesi col meno.

$$5 - (3 - 8 + 2) = 5 - 3 + 8 - 2 = 8$$

Tutti e tre i segni dentro sono cambiati: il 3 era positivo ed è diventato negativo, l'8 era negativo ed è diventato positivo, il 2 era positivo ed è diventato negativo.

3. Controllo. Si può verificare calcolando prima dentro la parentesi: $3 - 8 + 2 = -3$, e $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$. Torna.

Il meno davanti cambia tutti i segni

L'errore più diffuso del capitolo:

$$5 - (3 - 8 + 2) \neq 5 - 3 - 8 + 2$$

A destra sono stati cambiati solo alcuni segni. Il risultato sbagliato è -4 invece di 8 .

Il rimedio: prima di togliere la parentesi, si scrive il meno sopra ogni termine interno. Costa due secondi e salva mezzo compito.

Il doppio segno

$$8 - (-3) = 8 + 3 = 11$$

Due segni meno consecutivi diventano un più. Non si scrive mai $8 - -3$: il negativo va fra parentesi.

Il senso concreto: togliere un debito di 3 euro è come guadagnare 3 euro.

6 Prodotto e quoziente: la regola dei segni

Formula 6.1: La regola dei segni: Si moltiplicano (o si dividono) i valori assoluti, e il segno si decide così:

primo	secondo	risultato	esempio
+	+	+	$(+3) \cdot (+4) = +12$
+	-	-	$(+3) \cdot (-4) = -12$
-	+	-	$(-3) \cdot (+4) = -12$
-	-	+	$(-3) \cdot (-4) = +12$

In breve: **segni uguali** danno +, **segni diversi** danno -. Vale identica per la divisione.

Esempio Svolto 6.1: Perché meno per meno fa più:

Non è una convenzione arbitraria: è l'unica scelta che non rompe la proprietà distributiva. Ecco la dimostrazione, e sta in quattro righe.

1. Un punto fermo. Qualunque numero moltiplicato per zero fa zero. Quindi

$$(-3) \cdot 0 = 0$$

2. Scrivo lo zero in un modo furbo: $0 = 4 + (-4)$.

$$(-3) \cdot [4 + (-4)] = 0$$

3. Applico la distributiva.

$$(-3) \cdot 4 + (-3) \cdot (-4) = 0$$

4. Il primo pezzo lo sappiamo già: $(-3) \cdot 4 = -12$, perché è una somma di quattro volte -3 . Allora

$$-12 + (-3) \cdot (-4) = 0 \implies (-3) \cdot (-4) = +12$$

Se «meno per meno» facesse meno, la distributiva sarebbe falsa. Non c'era altra scelta.

Formula 6.2: Prodotti con più fattori: Con tre o più fattori non serve procedere a coppie: si guarda **quanti fattori negativi** ci sono.

- Numero **pari** di fattori negativi $\rightarrow$ risultato **positivo**.
- Numero **dispari** $\rightarrow$ risultato **negativo**.

E se un solo fattore è zero, il prodotto è zero, qualunque siano i segni.

Esempio Svolto 6.2: Contare i segni invece di moltiplicare a coppie:

$$(-2) \cdot (+3) \cdot (-1) \cdot (-5)$$

1. Conto i negativi: sono tre $(-2, -1, -5)$. Numero dispari, quindi il risultato sarà negativo.

2. Moltiplico i valori assoluti: $2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 = 30$.

3. Metto il segno: il risultato è -30 .

Fatto a coppie avrebbe richiesto tre passaggi con tre decisioni sul segno, e tre occasioni per sbagliare.

La divisione per zero, di nuovo

Anche in $\mathbb{Z}$ dividere per zero non si può, e il segno non cambia niente: $(-5) : 0$ non esiste. Invece $0 : (-5) = 0$, e va bene.

7 Le potenze di un intero

Formula 7.1: Il segno di una potenza: Se la base è positiva, la potenza è positiva. Se la base è **negativa**, il segno dipende dall'esponente:

- esponente **pari** $\rightarrow$ risultato **positivo**: $(-2)^4 = +16$;
- esponente **dispari** $\rightarrow$ risultato **negativo**: $(-2)^3 = -8$.

È la regola dei segni applicata più volte: contano quanti fattori negativi si moltiplicano, e sono tanti quanti dice l'esponente.

 -2^4 e $(-2)^4$ sono numeri diversi

È la trappola più cara del capitolo, e compare in ogni verifica.

$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$$

$$-2^4 = -(2^4) = -(16) = -16$$

La ragione: l'elevamento a potenza si esegue *prima* del segno meno, che si comporta come una moltiplicazione per -1 . Senza parentesi, il meno **non fa parte della base**.

Con esponente dispari il tranello si nasconde, perché i due risultati coincidono: $(-2)^3 = -8$ e $-2^3 = -8$. Non fidarsi: dipende dall'esponente, e con quello pari cambia tutto.

Esempio Svolto 7.1: Quattro potenze da confrontare:

$$(-3)^2 = +9 \quad -3^2 = -9 \quad (-3)^3 = -27 \quad -3^3 = -27$$

Come si legge la differenza. Nel primo e nel terzo caso la base è -3 ; nel secondo e nel quarto la base è 3 e il meno resta fuori, applicato al risultato.

Un caso da ricordare: $(-1)^n$ vale $+1$ se n è pari e -1 se n è dispari. Serve spesso, e si controlla a mente.

Le proprietà delle potenze valgono ancora

Tutte e cinque le proprietà viste con i naturali funzionano identiche in $\mathbb{Z}$, purché la base fra parentesi resti la stessa:

$$(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^5 = -32$$

Attenzione a non mischiare basi diverse: $(-2)^3 \cdot 2^2$ non si semplifica, perché le basi sono -2 e 2 .

8 Espressioni in $\mathbb{Z}$

L'ordine delle operazioni è lo stesso dei naturali. La differenza è che ora ogni passaggio porta con sé un segno, e il segno va deciso *prima* di scrivere il numero.

Metodo 8.1: Un'espressione in $\mathbb{Z}$, senza perdere segni:

1. Parentesi, dalla più interna. Se ne toglie una preceduta da meno, cambio tutti i segni dentro.
2. Potenze: prima decido il segno (base negativa? esponente pari o dispari?), poi calcolo il valore assoluto.
3. Prodotti e divisioni da sinistra a destra: per ognuno decido il segno con la regola, poi moltiplico i valori assoluti.
4. Somme algebriche: raggruppo positivi e negativi.
5. I numeri negativi li riscrivo **sempre fra parentesi** quando finiscono dopo un operatore.

Esempio Svolto 8.1: Espressione con parentesi annidate e potenza:

Calcoliamo $\{ [(-3) \cdot 4 + 20] : (-2) \}^2 - 5$.

1. La quadra, e dentro prima il prodotto.

Segni diversi, quindi il prodotto è negativo: $(-3) \cdot 4 = -12$.

$$\{[-12 + 20] : (-2)\}^2 - 5$$

2. La somma algebrica dentro la quadra.

Segni discordi: $20 - 12 = 8$, e vince il più.

$$\{8 : (-2)\}^2 - 5$$

3. La divisione dentro la graffa.

Segni diversi: il risultato è negativo.

$$(-4)^2 - 5$$

4. La potenza.

Base negativa, esponente *pari*: risultato positivo.

$$16 - 5$$

5. L'ultima somma.

$$16 - 5 = \mathbf{11}$$

6. Controllo. Il punto delicato era il passaggio 4: se si scrive -4^2 invece di $(-4)^2$ si ottiene $-16 - 5 = -21$, e il risultato cambia segno. Quando un quoziente negativo va elevato a potenza, la parentesi non è facoltativa.

9 Gli interi nella realtà

Gli interi non sono un gioco di segni: sono il modo di misurare tutto ciò che ha due direzioni. In tutti questi problemi la domanda vera è una sola: *da dove si conta lo zero?*

Esempio Svolto 9.1: Il termometro: quanti gradi di differenza?:

Alle 6 del mattino ci sono -8 gradi, alle 14 ce ne sono $+5$. Di quanto è salita la temperatura?

1. La differenza si calcola sempre come «arrivo meno partenza».

$$(+5) - (-8)$$

2. Doppio segno.

$$5 + 8 = \mathbf{13} \text{ gradi}$$

3. Controllo sulla retta. Da -8 a 0 ci sono 8 gradi, da 0 a $+5$ altri 5 : in tutto 13 . Torna.

Attenzione: la differenza è 13 , non 3 . Chi sottrae i valori assoluti ($8 - 5$) ottiene 3 e sbaglia, perché i due numeri stanno da parti opposte dello zero.

Esempio Svolto 9.2: Il conto in banca:

Un conto ha 340 euro. Vengono addebitati 180 euro, poi altri 250, poi arriva un versamento di 90. Qual è il saldo?

1. Traduco in somma algebrica.

$$340 - 180 - 250 + 90$$

2. Raggruppamento.

$$\text{positivi: } 340 + 90 = 430 \quad \text{negativi: } -180 - 250 = -430$$

$$430 - 430 = 0$$

Il conto è esattamente a zero. **Nota bene:** se il secondo addebito fosse stato di 300, il saldo sarebbe -50 , cioè un debito di 50 euro — e non «zero perché i soldi sono finiti». Il negativo è un'informazione, non un errore.

Gli anni prima di Cristo e il buco dell'anno zero

Se un imperatore nasce nel -63 (cioè 63 a.C.) e muore nel $+14$, quanti anni ha vissuto? La tentazione è $14 - (-63) = 77$. Ma nel calendario storico **l'anno zero non esiste**: si passa dall'1 a.C. all'1 d.C. Quindi gli anni vissuti sono $77 - 1 = 76$.

È un bell'esempio di un fatto che vale la pena sapere: il modello matematico (la retta degli interi) e la convenzione storica non coincidono, e chi applica la formula senza pensare sbaglia di un anno. Augusto, per la cronaca, morì a 76 anni.

Esempio Svolto 9.3: Quote sopra e sotto il livello del mare:

Un sommozzatore è a -32 metri. Sale di 12 metri, poi scende di 7. A che quota si trova?

1. Salire è positivo, scendere è negativo.

$$-32 + 12 - 7$$

2. Calcolo.

$$-32 + 12 = -20 \rightarrow -20 - 7 = -27 \text{ metri}$$

3. **Controllo di ragionevolezza.** È ancora sotto il livello del mare, quindi il segno meno è quello che ci si aspetta. Un risultato positivo qui avrebbe voluto dire «volato fuori dall'acqua»: segnale che c'era un errore.

Indice analitico

Addizione in $\mathbb{Z}$, 5

Espressioni in $\mathbb{Z}$, 10

Insieme $\mathbb{Z}$, 3

Moltiplicazione in $\mathbb{Z}$, 7

Numeri interi, 3

Opposto, 4

Ordinamento in $\mathbb{Z}$, 4

Parentesi in $\mathbb{Z}$, 6

Potenze in $\mathbb{Z}$, 9

Problemi con i numeri interi, 11

Regola dei segni, 7

Segno di una potenza, 9

Somma algebrica, 5

Valore assoluto, 4