

# FORMULARIO: I NUMERI RAZIONALI

*In ogni riquadro: la regola con le sue condizioni e un esempio con i numeri.*

## 1 Frazioni: le basi

### 1.1 L'insieme $\mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Il denominatore non può essere zero.  $\frac{0}{5} = 0$  invece va bene.

#### ESEMPIO

$$5 = \frac{5}{1} \quad \frac{5}{0} \text{ non esiste}$$

### 1.2 Frazioni equivalenti e riduzione

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} \quad (k \neq 0)$$

Per ridurre ai minimi termini si divide sopra e sotto per il MCD.

#### ESEMPIO

$$\frac{84}{360} : \text{MCD} = 2^2 \cdot 3 = 12 \Rightarrow \frac{84 : 12}{360 : 12} = \frac{7}{30}$$

### 1.3 Confronto

Stesso denominatore: vince il numeratore maggiore. Stesso numeratore: vince il denominatore **minore**. Altrimenti: denominatore comune, oppure prodotti in croce.

#### ESEMPIO

$$\frac{3}{4} > \frac{3}{7} \quad \frac{5}{7} \text{ vs } \frac{7}{9} : \frac{45}{63} < \frac{49}{63}$$

## 2 Le quattro operazioni

### 2.1 Somma e differenza

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

Con denominatori diversi si passa prima al mcm. **Numeratori e denominatori non si sommano fra loro.**

**ESEMPIO**

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq \frac{2}{5}$$

**2.2 Prodotto**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Conviene semplificare in croce *prima* di moltiplicare.

**ESEMPIO**

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

**2.3 Reciproco e quoziente**

Il reciproco di  $\frac{a}{b}$  è  $\frac{b}{a}$  (con  $a \neq 0$ ); il prodotto di un numero per il suo reciproco fa 1.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

**ESEMPIO**

$$\frac{3}{4} : \frac{9}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{2}{3}$$

$$6 : \frac{1}{2} = 12 \quad (\text{dividere può far crescere})$$

**2.4 Frazione di frazione**

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

La linea **più lunga** è quella che divide.

**ESEMPIO**

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$$

### 3 Decimali e numeri periodici

#### 3.1 Quando il decimale è finito

Sia  $\frac{a}{b}$  ridotta ai minimi termini: il decimale è **finito** se e solo se  $b$  contiene soltanto i fattori 2 e 5. Altrimenti è **periodico**.

##### ESEMPIO

$$\frac{7}{8} = 0,875 \quad (8 = 2^3) \quad \frac{4}{7} = 0,\overline{571428}$$

#### 3.2 Frazione generatrice

numeratore = (tutte le cifre) – (quelle non periodiche)

$$\text{denominatore} = \underbrace{9 \dots 9}_{\text{cifre del periodo}} \underbrace{0 \dots 0}_{\text{cifre dell'antiperiodo}}$$

Le cifre si leggono ignorando la virgola.

##### ESEMPIO

$$0,\overline{45} = \frac{45 - 0}{99} = \frac{5}{11}$$

$$2,1\overline{6} = \frac{216 - 21}{90} = \frac{195}{90} = \frac{13}{6}$$

#### 3.3 Il caso che sorprende

$$0,\overline{9} = 1$$

Non «quasi 1»: proprio 1. Da  $10x = 9,\overline{9}$  segue  $9x = 9$ .

##### ESEMPIO

$$0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad 0,\overline{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad 0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$$

### 4 Potenze a esponente intero

#### 4.1 Esponente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Un esponente negativo dice «fai il reciproco». Il *segno* del risultato dipende dalla base, non dall'esponente.

**ESEMPIO**

$$2^{-3} = \frac{1}{8} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

**4.2 I quattro casi col segno**

$$\begin{aligned} (-2)^{-2} &= +\frac{1}{4} & -2^{-2} &= -\frac{1}{4} \\ (-2)^{-3} &= -\frac{1}{8} & -2^{-3} &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

Senza parentesi il meno non fa parte della base.

**ESEMPIO**

Regola: base negativa con esponente pari dà positivo, con esponente dispari dà negativo. Il meno fuori dalla base resta sempre fuori.

**4.3 Le cinque proprietà, per ogni esponente intero**

|                             |                           |
|-----------------------------|---------------------------|
| Prodotto, stessa base       | $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ |
| Quoziente, stessa base      | $a^m : a^n = a^{m-n}$     |
| Potenza di potenza          | $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ |
| Prodotto, stesso esponente  | $a^n \cdot b^n = (ab)^n$  |
| Quoziente, stesso esponente | $a^n : b^n = (a : b)^n$   |

**ESEMPIO**

$$2^3 \cdot 2^{-5} = 2^{-2} = \frac{1}{4} \quad (3^{-2})^{-1} = 3^2 = 9$$

**4.4 Ricondurre alla stessa base**

Le proprietà valgono solo fra potenze di uguale base: si riscrive ogni base come potenza della più piccola.

$$4 = 2^2 \quad 8 = 2^3 \quad 16 = 2^4 \quad 32 = 2^5 \quad 9 = 3^2 \quad 27 = 3^3 \quad 125 = 5^3$$

**ESEMPIO**

$$\frac{4^3 \cdot 8^2}{2^{11}} = \frac{2^6 \cdot 2^6}{2^{11}} = \frac{2^{12}}{2^{11}} = 2$$

### 4.5 Notazione scientifica

$$a \cdot 10^n \quad \text{con } 1 \leq a < 10, n \in \mathbb{Z}$$

L'ordine di grandezza è  $10^n$  se  $a < \sqrt{10} \approx 3,16$ , altrimenti  $10^{n+1}$ .

#### ESEMPIO

$$149\,600\,000\,000 = 1,496 \cdot 10^{11} \quad 0,00007 = 7 \cdot 10^{-5}$$

Massa dell'elettrone:  $9,11 \cdot 10^{-31}$  kg, ordine di grandezza  $10^{-30}$ .

## 5 Rapporti, proporzioni, percentuali

### 5.1 Proporzione e proprietà fondamentale

$$a : b = c : d \quad \Longleftrightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi: da qui si ricava il termine mancante.

#### ESEMPIO

$$3 : 8 = x : 24 \Rightarrow 8x = 72 \Rightarrow x = 9$$

### 5.2 Direttamente o inversamente proporzionali

$$\text{dirette: } \frac{y}{x} = k \quad \text{inverse: } x \cdot y = k$$

Nelle dirette è costante il **rapporto**, nelle inverse il **prodotto**.

#### ESEMPIO

Pane e prezzo: dirette. Operai e tempo: inverse — 3 operai in 12 giorni, 6 operai in 6 giorni ( $3 \cdot 12 = 6 \cdot 6$ ).

### 5.3 Percentuali: le tre domande

|                              |                             |
|------------------------------|-----------------------------|
| il $p\%$ di $T$              | $P = T \cdot \frac{p}{100}$ |
| che percentuale è $P$ di $T$ | $p = \frac{P}{T} \cdot 100$ |
| il totale, noto il $p\%$     | $T = P \cdot \frac{100}{p}$ |

**ESEMPIO**

$$15\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20} = 0,15$$

Il 15% di 80:  $80 \cdot 0,15 = 12$ .

**5.4 Aumenti e sconti**

$$+p\% \rightarrow \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \quad -p\% \rightarrow \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Due variazioni di fila si **moltiplicano**. Per risalire al valore iniziale si **divide**.

**ESEMPIO**

$$-30\% \text{ e poi } -20\% : 0,7 \cdot 0,8 = 0,56 \Rightarrow -44\%$$

Da 96 dopo uno sconto del 20%:  $T = 96 : 0,8 = 120$ .

**Le frazioni che vale la pena sapere a memoria**

|                       |                           |                           |                            |
|-----------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|
| $\frac{1}{2} = 0,5$   | $\frac{1}{4} = 0,25$      | $\frac{3}{4} = 0,75$      | $\frac{1}{5} = 0,2$        |
| $\frac{1}{8} = 0,125$ | $\frac{1}{3} = 0,\bar{3}$ | $\frac{2}{3} = 0,\bar{6}$ | $\frac{1}{6} = 0,1\bar{6}$ |
| $\frac{1}{10} = 0,1$  | $\frac{1}{20} = 0,05$     | $\frac{1}{100} = 0,01$    | $\frac{1}{9} = 0,1\bar{1}$ |

Servono per riconoscere a occhio se un risultato è plausibile: se un conto dà  $0,\bar{3}$  ci si aspetta un terzo da qualche parte.

**I cinque errori che costano di più**

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ , non  $\frac{2}{5}$ .
- In  $\frac{a+b}{a}$  la **a** **non** si cancella: si semplificano i fattori, non gli addendi.
- $2^{-3} = \frac{1}{8}$ : è positivo.
- +20% e poi -20% non riporta al punto di partenza ( $100 \rightarrow 120 \rightarrow 96$ ).
- Operai e tempo sono *inversamente* proporzionali: costante è il prodotto.